HOCHSCHULE harz

Hochschule für angewandte Wissenschaften (FH)

Material zum Vorkurs Mathematik

Prof. Dr. I. Schütt[1]
Web: http://www2.hs-harz.de/~ischuett
EMail: ischuett@hs-harz.de
Hochschule Harz
Fachbereich Automatisierung und Informatik
Friedrichstraße 57-59
38855 Wernigerode

3. April 2004

[1]Tel.: 03943 / 659 / 311 Fax.: 03943 / 659 / 399

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Dieser Vorkurs richtet sich an diejenigen, die sich in der Mathematik nicht (mehr) so sicher fühlen oder einiges wieder vergessen haben. In dem Kurs werden die wesentlichen Themen der Mittel- und Oberstufenmathematik des Gymnasiums wiederholt und auch ganz einfach das „Rechnen“ geübt.

Dieses Skript basiert auf Material der Bücher [6], [3] und [4], die auch zur weitergehenden Vorbereitung empfohlen werden können, und einer umfangreichen Aufgabenzusammenstellung von Frau Grohs, die diesen Vorkurs mehrmals durchgeführt hat. Weiterhin ist es zu empfehlen, immer eine mathematische Formelsammlung zur Hand zu haben, wie z.B. [1] bzw. [2] oder [5]. Zu den Kapiteln über Vektoren und Differential- und Integralrechnung ist zu sagen, dass sie nur Aufgaben zu diesen Themen beinhalten. Weitergehende Darstellung sind in den Vorlesungsskripten der Grundvorlesungen zur Mathematik zu finden. D.h. auch, diese Themen werden nochmals in der eigentlichen Vorlesung Mathematik 1 behandelt. Meine zugehörigen Skripte sind im Web über die Seite `http://www2.hs-harz.de/~ischuett` zu finden und frei zugänglich.

Abschließend ist zu bemerken, dass es in der Natur der Arbeit liegt, dass man Fehler macht, auch beim Schreiben von Skripten. Deshalb ist der Autor natürlich über Hinweise auf Fehler und sonstige Anregungen dankbar und über die EMail - Adresse ischuett@hs-harz.de jederzeit erreichbar. Da das Skript mit pdfLaTeX erstellt wurde und auf elektronischem Weg im PDF - Format veröffentlicht wird, lassen sich Fehler schnell und einfach berichtigen.

Kapitel 1

Grundlegendes Rechnen

1.1 Mengen

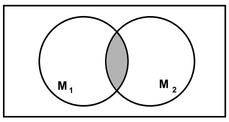
Eine Menge M ist eine Zusammenfassung von wohlbestimmten und wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche Elemente von M genannt werden) zu einem Ganzen.

Mathematische Aussagen über Mengen M_1 und M_2:

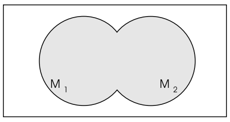
1. $x \in M_1$ heißt „ x ist Element von M_1 “.
2. $x \notin M_1$ heißt „ x ist kein Element von M_1 “.
3. $M_1 = \{x, y, z, \ldots\}$ heißt „ M_1 ist die Menge, die aus den Elementen $x, y, z, \ldots$ besteht “.
4. $M_1 = \{x | x \text{ hat die Eigenschaft } E\}$ heißt „ M_1 ist die Menge aller Elemente x, die die Eigenschaft E haben “.
5. M_1 und M_2 heißen gleich ($M_1 = M_2$), wenn sie dieselben Elemente enthalten.
6. M_1 heißt Teilmenge von M_2 ($M_1 \subset M_2$), wenn für jedes $x \in M_1$ gilt $x \in M_2$.
7. Die Vereinigung $M_1 \cup M_2$ von M_1 und M_2 ist die Menge aller Elemente, die Element einer oder beider Mengen M_1 und M_2 sind.
8. Der Durchschnitt $M_1 \cap M_2$ von M_1 und M_2 ist die Menge aller Elemente, die Element beider Mengen M_1 und M_2 sind.
9. Es sei $M_1 \subset M_2$. Das Komplement $\overline{M}_1$ (auch M_1^c) von M_1 bzgl. M_2 ist die Menge aller Elemente x, für die $x \in M_2$ und $x \notin M_1$ gelten.
10. Die leere Menge $\emptyset$ ist die Menge, die kein Element enthält.
11. Zwei Mengen heißen disjunkt, wenn gilt

$$M_1 \cap M_2 = \emptyset \; .$$

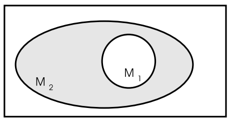
Mit Hilfe von VENN - Diagrammen können Mengen dargestellt werden.



$M_1 \cap M_2$



$M_1 \cup M_2$



$\overline{M}_1$

Wichtige Mengen sind:

1. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ ist die Menge der natürlichen Zahlen.
2. $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$ ist die Menge der ganzen Zahlen.
3. $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \,|\, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ ist die Menge der rationalen Zahlen.
4. $\mathbb{R} = \{x \,|\, x \text{ hat die Darstellung } \pm a_0.a_1a_2a_3 \ldots \text{ mit } a_0, a_1, a_2, \ldots \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}\}$ ist die Menge der reellen Zahlen, die der Zahlengeraden entspricht.
5. Intervalle sind Teilmengen von $\mathbb{R}$. Man unterscheidet für zwei reelle Zahlen a und b:
   (a) Abgeschlossene Intervalle:
   $[a, b] = \{x \,|\, a \leq x \leq b\}$.
   (b) Offene Intervalle:
   $(a, b) = \{x \,|\, a < x < b\}$.
   (c) Halboffene Intervalle:
   $(a, b] = \{x \,|\, a < x \leq b\}$ und $[a, b) = \{x \,|\, a \leq x < b\}$

Aufgaben:

1. Zeichnen Sie VENN - Diagramme der Mengen $M_1 \cap (M_2 \cup M_3)$ und $(M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3)$ und vergleichen Sie die Mengen.
2. Zeichnen Sie VENN - Diagramme der Mengen $M_1 \cup (M_2 \cap M_3)$ und $(M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3)$ und vergleichen Sie die Mengen.
3. Zeichnen Sie VENN - Diagramme der Mengen $\overline{M_1 \cup M_2}$ und $\overline{M_1} \cap \overline{M_2}$ und vergleichen Sie die Mengen.
4. Zeichnen Sie VENN - Diagramme der Mengen $\overline{M_1 \cap M_2}$ und $\overline{M_1} \cup \overline{M_2}$ und vergleichen Sie die Mengen.
5. Zeichnen Sie das VENN - Diagramm der Menge $M_1 \cup ((M_2 \cap M_3) \cap (M_2 \cap M_4))$.
6. Geben Sie alle Teilmengen der Menge $\{1, 4, 5, 10\}$ an.
7. Die Differenz $M_1 \setminus M_2$ der Mengen M_1 und M_2 ist die Menge aller Elemente, für die $x \in M_1$ und $x \notin M_2$ gelten. Stellen Sie $M_1 \setminus M_2$ mit Hilfe der oben erklärten Mengen dar.
8. Stellen Sie die folgenden Mengen durch Aufzählen ihrer Elemente dar:

(a) $\{x \mid x \text{ ist Primzahl und } x < 20\}$.

(b) $(\{x \mid x \text{ ist Primzahl}\} \cup \{x \mid x \text{ ist ganzzahliges Vielfaches von } 3\}) \cap \{x \mid 22 < x \leq 45\}$.

9. Es seien $M_1 = \{4, 8, 12\}$, $M_2 = \{3, 6, 9\}$, $M_3 = \{0, 2, 4, 6\}$ und $M_4 = \{6, 12, 18\}$. Bestimmen Sie $M = ((M_1 \cup M_2) \cap M_3) \setminus M_4$.

10. Es seien $M_1 \cup M_2 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $M_1 \cap M_2 = \{1, 3, 5\}$, $M_1 \setminus M_2 = \{2, 4\}$ und $M_2 \setminus M_1 = \emptyset$. Bestimmen Sie M_1 und M_2.

11. Seien $M_1 = [-3, 3)$ und $M_2 = [1, 7)$. Bestimmen Sie

    (a) $M_1 \cup M_2$.

    (b) $M_1 \cap M_2$.

    (c) $M_1 \setminus M_2$.

    (d) $M_2 \setminus M_1$.

1.2 Grundlegende Rechenregeln

<u>**Rechengesetze und Konventionen:**</u>

1. Kommutativgesetze:
$$a + b = b + a \text{ und } a \cdot b = b \cdot a$$

2. Assoziativgesetze:
$$(a + b) + c = a + (b + c) \text{ und } (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

3. Konvention Punktrechnung vor Strichrechnung:
$$a \pm (b \cdot c) = a \pm b \cdot c \text{ und } a \pm (b : c) = a \pm b : c$$

4. Konvention Malpunkt weglassen: In Fällen, in denen keine Mehrdeutigkeiten auftreten, wird der Malpunkt oft nicht mitgeschrieben.

5. Distributivgesetze:
$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \text{ und } a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

6. Vorzeichenregeln:

    (a) $(+a) \cdot (+b) = (-a) \cdot (-b) = a \cdot b$ und $a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -(a \cdot b)$

    (b) $(+a) : (+b) = (-a) : (-b) = a : b$ und $a : (-b) = (-a) : b = -(a : b)$

7. Divisionen durch 0 sind nicht zulässig (nicht definiert)!!!

8. Division von Klammerausdrücken:

$$(a + b) : c = a : c + b : c \text{ und } (a - b) : c = a : c - b : c$$

9. Multiplikation von Klammerausdrücken:

   (a) $(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$
   (b) $(a + b) \cdot (c - d) = a \cdot c - a \cdot d + b \cdot c - b \cdot d$
   (c) $(a - b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d - b \cdot c - b \cdot d$
   (d) $(a - b) \cdot (c - d) = a \cdot c - a \cdot d - b \cdot c + b \cdot d$

10. Binomische Formeln:

   (a) $(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$
   (b) $(a - b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$
   (c) $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

Aufgaben:

1. Berechnen Sie im Kopf:
   $(a)\, 15 \cdot 17$ $(b)\, 23 \cdot 33$ $(c)\, 47 \cdot 38$ $(d)\, 441 \cdot 7$ $(e)\, 4417 \cdot 3$ $(f)\, 4400 \cdot 19$

2. Welche Klammern sind nicht notwendig?

   (a) $(a + (b : (c - (d \cdot (e \cdot f)))))$
   (b) $(((a \cdot b) : (c \cdot d)) + (e + f))$

3. Fassen Sie zusammen:
   $(a)\, 3x + 2x$ $(b)\, 5x - 7x$ $(c)\, 5p - 0$ $(d)\, 3x - 5y$ $(e)\, 7a - 7a$ $(f)\, 14t - 13t$
   $(g)\, 0.8y - 1.2y$ $(h) 5.2x - 2.4x$ $(i)\, 4.3a - 5a$ $(j)\, 6.4z - 7.8z$ $(k)\, 8a + 7 - 6a$
   $(l)\, e - 2e - 3e$ $(m)\, 4a + 5b - 6b$ $(n)\, 7y + 8x - 7y$ $(o)\, 15ab + 4ab - 10ab$
   $(p)\, -6xy - xy + 8xy$ $(q)\, -4m^3 + 10m^3 - 8m^3$ $(r)\, 11x^2 + 4x - x^2 - 9x$
   $(s)\, 2y^2 - 3y + 2y - y^2$ $(t)\, 5ab - a^2 - 6ab - 3a^2$ $(u)\, -25k^4 - 32k^4 + 48k^4$
   $(v)\, mn + 2n + 8m$

4. Lösen Sie die Klammern auf und fassen zusammen:
   $(a)\, u - v + 7.9 - u + v$ $(b)\, -13.2 + (10 - a) + c - a$ $(c)\, 7b^2 + (3b^2 + 2ab)$
   $(d)\, (4x + 8) + (x - 1)$ $(e)\, (32c - 16d) + (6c + 7d)$ $(f)\, 2a^3 + (3a^3 - a^2 b)$
   $(g)\, (6.3a - 7.2b) + (-2.7a)$ $(i)\, (7a^2 + 7a - 3) + (-4a^2 - 2a + 7)$ $(j)\, (u^2 + 2uv + v^2) + (2uv - u^2 - v^2)$

5. Lösen Sie folgende Klammern auf und fassen zusammen:

   (a) $7a - 3b + (-a + 2c) - (3c - 6b) - (6a - 3c)$
   (b) $5a + (7c - (2a - 3b)) - (4c - a + b)$
   (c) $7a - (3a - (7 + 5b)) + (a - (4 - 6b)) - (2a + 7b)$
   (d) $8a - (a + ((3a - 2b) - (5a + 3b)) - (-a + 6b))$

(e) $(-a)\,(b - a - c)$

(f) $(7\,a - 5\,b)\,(3\,a + 4\,b) - (5\,a - 9\,b)\,(4\,a - b)$

(g) $(1 - a)\,(a - 1) - 2\,(a + 1)\,(a - 2)$

(h) $(a + b - c)\,(a - b - c)$

(i) $(3\,a + 2\,b)\,(4\,a - 3\,b)\,(5\,a - 7\,b)$

6. Ergänzen Sie den linken Term so, dass aus ihm der rechte Term durch Vereinfachung hervorgeht:

   (a) $5\,x + (7\,y - \boxed{}) = 5\,x + 7\,y - 3\,z$

   (b) $(7\,u + \boxed{}) + (\boxed{} + v) = 5\,u - 3\,v$

   (c) $2\,a + (\boxed{} - \boxed{}) = a + 3\,b$

   (d) $6\,m + (\boxed{} - 5\,n) + (\boxed{} - \boxed{}) = 4\,n - p$

7. Lösen Sie folgende Klammern auf und fassen zusammen:
   $(a)\,5\,x - (8\,x + 3\,y)$ $(b) - 11 - (10 - a)$ $(c)\,8\,a - (-7\,b + 2\,a)$ $(d) - (3\,x - 3\,y)$ $(e) - (-4\,a + 7\,b)$ $(f)\,5\,a + b - (3\,a - b + c)$ $(g)\,(3\,x^2 + 7\,x) - (-x^2 + x)$ $(h) - (18\,c - 7\,d) - (13\,c - 11\,d)$ $(i)\,0.6\,y - (3.2\,y + 0.7)$ $(j)\,(11.5\,u - 3.4\,v) - (-7.4\,v)$ $(k)\,-3.47\,a - (-5.7\,a - 1.48\,b)$ $(l)\,-(25.3\,x - 18.4\,y) - (-9.7\,x - 7.3\,y)$ $(m)\,-(4.37\,a^2 - 5.91\,a\,b) - (-2.31\,a^2 - 5.79\,a\,b)$ $(n)\,(-5\,x - 3\,y + 2) - (-3\,x + 2\,y - 1) + (2\,x + 5\,y - 3)$

8. Schreiben Sie die Ausdrücke als Differenz von zwei Termen:
   $(a)\,3\,a - 4\,b - 6$ $(b)\,5\,x\,y + 3\,x\,z + 7\,y\,z$ $(c)\,-4\,u^2 + 11\,v + 7\,w$

9. Ergänzen Sie den linken Term so, dass aus ihm der rechte Term durch Vereinfachung hervorgeht:

   (a) $3\,a - (\boxed{} - 5\,b) = -a + 5\,b$

   (b) $7\,x - (\boxed{} - \boxed{}) = 6\,x + 3\,y$

   (c) $-3\,c - (\boxed{} - 8\,d) - (\boxed{} - \boxed{}) = -4\,c + e$

10. Setzen Sie Klammern, so dass wahre Aussagen entstehen:

    (a) $7\,x - 5\,y - 3\,z = 7\,x - 5\,y + 3\,z$

    (b) $-7\,x + 5\,y - 3\,z = -7\,x - 5\,y - 3\,z$

11. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:
    $(a)\,1.2\,x \cdot 5$ $(b)\,(-1.3) \cdot 2\,y$ $(c)\,0.75\,z \cdot 0.15$ $(d)\,(-3.7\,u)\,0\,v$ $(e)\,7\,a\,5\,b$ $(f)\,9\,x\,(-3\,y)$ $(g)\,(-6\,e)\,(-3\,f)$ $(h)\,0.3\,x\,5\,y$ $(i)\,(-3\,a)\,2\,b\,(-c)$ $(j)\,4\,x\,(-5\,y)\,2\,z$ $(k)\,(-2\,p)\,(-4\,q)\,(-m)$ $(l)\,(-2\,x)\,0\,(-0.37\,y)$ $(m)\,2.5\,k\,(-0.41)$ $(n)\,4.5\,(-1.2\,v)$ $(o)\,0.4\,u\,(-0.2\,v)$

12. Ergänzen Sie den linken Term so, dass der rechte daraus durch Vereinfachung hervorgeht:

    (a) $5\,x\,y \cdot \boxed{} = 35\,x\,y^2$

    (b) $(-7\,a\,b) \cdot \boxed{} = 56\,a\,b\,x$

    (c) $6\,u^2\,v \cdot \boxed{} = -54\,u^2\,v$

(d) $(-8\,m\,n) \cdot \boxed{} = 48\,m^2\,n^2$

13. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke (der Divisor sei immer ungleich 0):
$(a)\,6.4\,a\,b\,c\,:\,8$ $\quad(b)\,27\,x\,y\,:\,(-9)$ $\quad(c)\,1.8\,x\,y\,z\,:\,z$ $\quad(d)\,4\,m\,n^2\,:\,m$ $\quad(e)\,6\,a\,b\,c\,:\,(-3\,c)$ $\quad(f)\,15\,a\,b\,:\,(-5\,a\,b)$ $\quad(g)\,(-2\,p\,q)\,:\,(0.5\,p\,q\,r)$ $\quad(h)\,(-24\,x\,y\,z)\,:\,(-8\,y)$ $\quad(i)\,(-4\,x\,y\,z)\,:\,(-4\,x\,z)$ $\quad(j)\,27\,a^2\,x\,:\,(18\,a\,x^2)$ $\quad(k)\,3\,a^2\,b\,:\,(6\,a^2)$ $\quad(l)\,3.2\,x\,y^2\,:\,(8\,x)$ $\quad(m)\,5.4\,c\,d\,:\,(9\,c^2)$ $\quad(n)\,7.2\,u\,v^2\,:\,24$

14. Führen Sie folgende Divisionen durch (der Divisor sei immer ungleich 0):

    (a) $(4\,a^2 - 12\,a\,x)\,:\,2\,a$

    (b) $(m^2\,n^2 - m\,n)\,:\,(-m\,n)$

    (c) $(s\,t - s^2 - 3\,t)\,:\,t$

    (d) $(45\,a^2\,b^2 + 9\,a^3\,b^2 - 2.7\,a^3\,b^3)\,:\,(90\,a^2\,b^3)$

15. Lösen Sie folgende Klammern auf und fassen zusammen:
$(a)\,7\,(3\,x - 5\,y)$ $\quad(b)\,(5\,u - 9\,v)\,7$ $\quad(c)\,-3\,x\,(0.5\,x - 0.1\,y)$ $\quad(d)\,9\,a\,(a - b + c)$ $\quad(e)\,(3\,m - 2\,n + 5)\,(-7\,m)$ $\quad(f)\,(-a)\,(6\,a\,b + 3\,c - 4)$ $\quad(g)\,0.7\,(0.7\,x\,y + 0.1\,y - 0.4)$ $\quad(h)\,5\,x - 7\,(2\,x - 1)$ $\quad(i)\,3\,y\,(2 - x) + 4\,x\,y$ $\quad(j)\,u\,(v - w) - v\,(u - w)$ $\quad(k)\,4\,a\,(6\,b - 3) - 5\,(3\,a + 2\,a\,b)$ $\quad(l)\,-3\,(a + 7) + 5\,(a - 3) - 8\,(2\,a + 1)$

16. Ergänzen Sie den linken Term, so dass der rechte durch Vereinfachen aus dem linken hervorgeht:

    (a) $3\,(x + \boxed{}\,) - 1.5\,x = 1.5\,x - 3\,y$

    (b) $\boxed{}\,(4\,u^2 - 7\,u + 8) = 28\,u^3 - 49\,u^2 + 56\,u$

    (c) $5\,(\,\boxed{} - \boxed{}\,) + 2\,x - 3\,y = -18\,x + 2\,y$

    (d) $5\,x + 15\,y - \boxed{} = 5\,(x + 3\,y - 2\,z)$

    (e) $\boxed{} - 4\,a\,c - 8\,a\,d = 4\,a\,(2\,a - c - 2\,d)$

17. Klammern Sie den jeweils angegebenen Faktor aus:

    (a) $5\,x + 30\,y$ Faktor: 5

    (b) $8\,m^2 + 16\,m\,n - 44\,m\,n^2$ Faktor: 2, 4, $4\,m$, $-4\,m$

    (c) $-14\,u^2\,v + 21\,u\,v - 35\,u\,v^2$ Faktor: $7\,u\,v$, $-7\,u\,v$

18. Lösen Sie folgende Klammern auf und fassen zusammen:
$(a)\,(r - 3)\,(s + 1)$ $\quad(b)\,(2\,m + n)\,(3\,x - 4\,y)$ $\quad(c)\,(5\,a + 3)\,(2\,a - 5)$ $\quad(d)\,5\,a + (32\,a - 5)$ $\quad(e)\,-(x + 1)\,(x - 4)$ $\quad(f)\,-(3\,a + b)\,(3\,a - b)$ $\quad(g)\,(5\,a - 4\,b - 3\,c)\,(2\,a - b)$ $\quad(h)\,(-x\,y + 3\,y\,z - z)\,(x - y)$ $\quad(i)\,(x + 1)\,(x + 2) + (x + 3)\,(x + 4)$ $\quad(j)\,(2\,x - 3)\,(3\,x - 1) - (6\,x + 2)\,(x - 5)$

19. Ergänzen Sie den linken Term so, dass der rechte aus ihm durch Multiplizieren und Zusammenfassen hervorgeht:

    (a) $(y + 4)\,(y + \boxed{}\,) = y^2 + 2\,y - 8$

    (b) $(z + \boxed{}\,)\,(z - 5) = z^2 - 2\,z - 15$

(c) $(2\,x\,+\,3)\,(\boxed{}\,+\,\boxed{}) = 2\,x^2\,+\,11\,x\,+\,12$

(d) $(a\,+\,2)\,(\boxed{}\,-\,\boxed{}) = a^2\,-\,4$

20. Formen Sie die Summen in Produkte um:
$(a)\,m\,x + m\,y + 10\,x + 10\,y \quad (b)\,7\,a - 7\,b + a\,u - b\,u \quad (c)\,a\,c + b\,c - 2\,a - 2\,b \quad (d)\,x^2 - 9$

21. Wenden Sie die binomischen Formeln an und vereinfachen Sie nach Möglichkeit:

(a) $(-a\,+\,3\,b)^2$

(b) $(-1\,+\,a)\,(a\,+\,1)$

(c) $(-a\,-\,b)\,(a\,-\,b)$

(d) $(-1\,+\,a)^2\,-\,(1\,-\,a)^2$

(e) $(4\,a^2\,-\,3)\,(4\,a^2\,+\,3)\,-\,(3\,a\,-\,4)^2\,+\,(5\,a\,+\,1)^2$

(f) $(a^2\,+\,b^2)^2\,-\,(a^2\,-\,b^2)^2$

(g) $(3\,a\,+\,2\,b\,-\,5\,c)^2$

(h) $(a\,+\,b\,-\,c\,-\,d)^2$

(i) $49\,a^2\,+\,42\,a\,+\,9$

(j) $25\,a^2\,+\,40\,a\,b\,+\,16\,b^2$

(k) $169\,a^2\,-\,130\,a\,b\,+\,25\,b^2$

(l) $9\,a^4\,b^2\,+\,12\,a^2\,b\,+\,4$

(m) $(8\,a\,-\,b)^2\,-\,16\,a^2$

(n) $81\,a^2\,-\,16\,(4\,a\,-\,3\,b)^2$

1.3 Bruchrechnung

<u>Regeln der Bruchrechnung</u>

1. Der Nenner darf nicht identisch 0 sein, bzw. eine Division durch 0 ist nicht erlaubt (nicht definiert)!!!

2. Erweitern:
$$\frac{a}{b} = \frac{a\,c}{b\,c}$$
mit $b \neq 0$ und $c \neq 0$.

3. Kürzen:
$$\frac{a}{b} = \frac{a\,:\,c}{b\,:\,c}$$
mit $b \neq 0$ und $c \neq 0$.

4. Addition gleichnamiger Brüche:
$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a\,+\,b}{c}$$
mit $c \neq 0$.

5. Subtraktion gleichnamiger Brüche:
$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a - b}{c}$$
mit $c \neq 0$.

6. Addition ungleichnamiger Brüche:
$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a\,d}{b\,d} + \frac{c\,b}{d\,b} = \frac{a\,d + c\,b}{b\,d}$$
mit $b \neq 0$ und $d \neq 0$.

7. Subtraktion ungleichnamiger Brüche:
$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a\,d}{b\,d} - \frac{c\,b}{d\,b} = \frac{a\,d - c\,b}{b\,d}$$
mit $b \neq 0$ und $d \neq 0$.

8. Multiplikation eines Bruches mit einer Zahl:
$$\frac{a}{b}\,c = \frac{a\,c}{b}$$
mit $b \neq 0$.

9. Division eines Bruches durch eine Zahl:
$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b\,c}$$
mit $b \neq 0$.

10. Multiplikation zweier Brüche:
$$\frac{a}{b}\,\frac{c}{d} = \frac{a\,c}{b\,d}$$
mit $b \neq 0$ und $d \neq 0$.

11. Division zweier Brüche:
$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b}\,\frac{d}{c} = \frac{a\,d}{b\,c}$$
mit $b \neq 0$ und $d \neq 0$.

Achtung: Es wird meistens die Konvention
$$a\,\frac{b}{c} = a \cdot \frac{b}{c}$$
benutzt und seltener
$$a\,\frac{b}{c} = a + \frac{b}{c}$$
D.h. es gilt beispielsweise
$$6\,\frac{13}{15} = \frac{26}{5} = 5 + \frac{1}{5}$$
Um Missverständnisse im Skript zu vermeiden, setzen wir vor Brüchen $\cdot$ oder $+$.

Aufgaben:

1. Fassen Sie die folgenden Brüche zusammen:

   (a) $\frac{1}{3} + \frac{4}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} - \frac{14}{3}$

   (b) $\frac{3}{7} - \frac{1-6}{7} + \frac{15}{7} - \frac{16}{7}$

   (c) $\frac{a+1}{a} - \frac{a-1}{a} - \frac{1-a}{a}$ mit $a \neq 0$

   (d) $\frac{a+1}{b} - \frac{a-b}{b} - \frac{b-a}{b}$ mit $b \neq 0$

   (e) $\frac{(a-b)^2}{a\,b} - \frac{1-2\,a\,b}{a\,b} - \frac{a^2+b^2}{a\,b}$ mit $a, b \neq 0$

   (f) $\frac{(a-b)^3}{2\,a\,b} - \frac{(a+b)^3}{2\,a\,b}$ mit $a, b \neq 0$

2. Fassen Sie die folgenden Brüche zusammen:

   (a) $5 \cdot \frac{7}{12} + 1 + \frac{41}{72} + 2 + \frac{17}{24} + 9 + \frac{5}{9}$

   (b) $36 + \frac{14}{39} + 19 + \frac{4}{13} + 15 + \frac{5}{6} - 2 - \frac{19}{72}$

   (c) $\frac{5}{18} + \frac{5}{6} - \frac{1}{3} + \frac{14}{27} + \frac{71}{81}$

   (d) $\frac{15}{64} - \frac{77}{96} + \frac{1}{243} - \frac{3-8}{24} + 3 + \frac{1}{1296}$

   (e) $\frac{b+5\,c-a}{6} - \frac{3\,a-7\,b+6\,c}{4} + \frac{4\,a-5\,b+7\,c}{3}$

   (f) $\frac{a-9}{18} + \frac{a-2}{6} + \frac{5\,(2\,a-1)}{12} - \frac{3\,(a-1)}{8} - \frac{2\,(3\,a-4)}{9}$

   (g) $\frac{16\,b+3\,a}{48} + \frac{7\,a-8\,b+9\,c}{24} - \frac{9\,a+8\,b+12\,c}{32}$

   (h) $\frac{4\,c-3\,a}{12\,a\,c} + \frac{5\,b-2\,c}{10\,b\,c} - \frac{b^2-c}{4\,b^2\,c} + \frac{4\,b^2-5\,a}{20\,a\,b^2} + \frac{2}{3\,a} + \frac{a-b}{5\,a\,b}$ mit $a, b, c \neq 0$

   (i) $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} - \frac{a^2+b^2}{2\,b} - 1$ mit $a, b \neq 0$

   (j) $\frac{5\,a-6\,b}{30\,c^2} - \frac{b\,(5\,c^2-3\,a)}{15\,a\,c^2} - \frac{a}{4\,b} + \frac{a\,(3\,c^2-2\,b)}{12\,b\,c^2} + \frac{b}{3\,a}$ mit $a, b, c \neq 0$

   (k) $\frac{3\,a^2+8\,b^2}{6\,a\,b} - \frac{a\,(4\,b-5\,c)}{10\,b\,c} + \frac{4\,a-5\,b}{10\,c} + \frac{b\,(3\,a-2\,c)}{6\,a\,c}$ mit $a, b, c \neq 0$

3. Fassen Sie die folgenden Brüche zusammen und schließen Sie die Werte aus, die a nicht annehmen darf:

   (a) $\frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+2}$

   (b) $\frac{1}{a-2} - \frac{1}{a-1} + \frac{1}{a+1} - \frac{1}{a+2}$

(c) $\dfrac{a}{a-1} + \dfrac{a}{a+1} - 2$

(d) $\dfrac{1}{a+1} - \dfrac{1}{a-1} + \dfrac{1}{(a+1)^2} - \dfrac{1}{(a-1)^2}$

(e) $\dfrac{3a-1}{4a-1} - \dfrac{3}{4}$

(f) $\dfrac{a-2}{a-3} - \dfrac{a-1}{a-2}$

(g) $\dfrac{1}{a+1} + \dfrac{4}{3a+2} - \dfrac{3}{a+1}$

(h) $\dfrac{10}{2a-2} - \dfrac{6a}{3a^2-6a} - \dfrac{9b}{3ab-9b}$

4. Fassen Sie die folgenden Brüche zusammen, wobei immer vorausgesetzt wird, dass die Nenner ungleich 0 seien:

(a) $\dfrac{3ax-3by}{6x^2y-6xy^2} - \dfrac{5a^2x+5aby}{10ax^2y+10axy^2}$

(b) $\dfrac{6ab+9b}{6ab-6b} - \dfrac{6ab-4b}{6ab+6b} - \dfrac{10b^2}{12a^2b^2-12b^2}$

(c) $\dfrac{1}{a^2-b^2} - \dfrac{2b^2}{2a^4-2a^2b^2} - \dfrac{b^2}{a^2b^2} + \dfrac{1}{a^2+b^2+2ab}$

(d) $\dfrac{24a^2b-72ab^2}{60a^2b+24ab^2} - \dfrac{49a^2b-28ab^2}{35a^2b+14ab^2} - \dfrac{20a-10b}{10a-5b}$

(e) $\dfrac{3a+b}{2a^2+2ab} - \dfrac{a^2+b^2}{2a^2b+2ab^2} + \dfrac{2a-5b}{4ab+4b^2}$

(f) $\dfrac{a+2b}{3a^2-3ab} - \dfrac{1}{2b} - \dfrac{3b-a}{2ab-2b^2}$

(g) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} - \dfrac{b^2}{a^2+ab} - \dfrac{a^2}{ab+b^2}$

(h) $\dfrac{9a-b}{6a^2-2ab} - \dfrac{6a+b}{3ab-b^2} + \dfrac{1}{2b}$

5. Fassen Sie die folgenden Brüche zusammen, wobei immer vorausgesetzt wird, dass die Nenner ungleich 0 seien:

(a) $3 \cdot \dfrac{1}{3}$

(b) $\dfrac{5}{8} \cdot \dfrac{8}{5}$

(c) $b \cdot \dfrac{1}{a}$

(d) $\dfrac{0}{b} \cdot \dfrac{b}{c}$

(e) $\left(\dfrac{a}{3b} + \dfrac{3b}{a}\right) \cdot 3ab$

(f) $\left(\dfrac{5\,a}{6\,b\,c} - \dfrac{6\,b}{7\,a\,c} + \dfrac{2\,c}{3\,a\,b}\right) \cdot 84\,a\,b\,c$

(g) $\left(\dfrac{1}{2\,a} + \dfrac{1}{3\,b}\right) \cdot (2\,a - 3\,b)$

(h) $\left(\dfrac{2}{a} + \dfrac{3}{b}\right) \cdot \left(\dfrac{a}{2} - \dfrac{b}{3}\right)$

(i) $\dfrac{4\,a^2 - 9\,b^2}{21\,a^2\,b + 14\,a^3} \cdot \dfrac{7\,a + 5\,a\,b}{6\,b - 4\,a}$

(j) $\dfrac{16\,a^4 - a^2}{24\,a^3 + 8\,a^2} \cdot \dfrac{36\,a^2 + 24\,a + 4}{4\,a + 1}$

(k) $\dfrac{a^2 + 1}{(a + 1)^2} \cdot \dfrac{a^3 + a^2 + a + 1}{(a^2 + 1)^2}$

(l) $\dfrac{4\,a\,b - 3\,a}{9\,a\,b - 3\,b^2} \cdot \dfrac{18\,a - 6\,b}{4\,a^2 + 10\,a\,b} \cdot \dfrac{8\,a\,b - 6\,a}{4\,a\,b + 10\,b^2}$

6. Formen Sie die Ausdrücken zu einfachen Brüchen um, wobei immer vorausgesetzt wird, dass die Nenner ungleich 0 seien:

(a) $\left(\dfrac{a}{2\,b} - \dfrac{2\,b}{a}\right) : \dfrac{a}{a + 2\,b}$

(b) $\left(1 - \dfrac{2}{a} + \dfrac{1}{a^2}\right) : \dfrac{1 - a^2}{a^2}$

(c) $\left(\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}\right) : \left(\dfrac{a}{b} - \dfrac{b}{a}\right)$

(d) $\left(\dfrac{a + b}{b} + \dfrac{a + b}{a}\right) : \left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right)$

(e) $\dfrac{1 - \dfrac{1}{a}}{\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{a^2}}$

(f) $\dfrac{\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} + 1}{\dfrac{a^2 + b}{b} - \dfrac{a + b^2}{a}}$

(g) $\dfrac{\dfrac{a}{a - b} + \dfrac{b}{a + b}}{\dfrac{a}{a + b} - \dfrac{b}{a - b}}$

(h) $\dfrac{\dfrac{a}{1 - a} + \dfrac{a + 1}{a}}{\dfrac{a - 1}{a} - \dfrac{a}{a + 1}}$

(i) $\dfrac{\dfrac{1}{a^3} - \dfrac{1}{b^3}}{\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a\,b} + \dfrac{1}{b^2}}$

(j) $\dfrac{\dfrac{a+b}{a-b} - \dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}{\dfrac{a+b}{a-b} - \dfrac{a-b}{a+b}}$

(k) $\dfrac{1}{a - \dfrac{a}{1 - \dfrac{a}{a-b}}}$

(l) $\dfrac{\dfrac{a + \frac{b}{4}}{a - \frac{b}{4}} - \dfrac{a - \frac{b}{4}}{a + \frac{b}{4}}}{1 + \dfrac{b^2}{16\,a^2 - b^2}}$

7. Vereinfachen Sie folgende Brüche (umformen und kürzen), soweit dies möglich ist, wobei immer vorausgesetzt wird, dass die Nenner ungleich 0 seien:

(a) $\dfrac{35\,a\,c - 50\,b\,c}{7\,a - 10\,b}$

(b) $\dfrac{34\,a\,x + 51\,b\,x - 119\,c\,x}{2\,a + 3\,b - 7\,c}$

(c) $\dfrac{a^2 - a\,b + a\,c}{b - a - c}$

(d) $\dfrac{a\,x + b\,x + a\,y + b\,y}{a + b}$

(e) $\dfrac{91\,a\,b + 7\,b + 39\,a^2 + 3\,a}{13\,a + 1}$

(f) $\dfrac{25\,a^2 - 130\,a\,b + 169\,b^2}{25\,a - 65\,b}$

(g) $\dfrac{2\,x^2 + 8\,x\,y + 8\,y^2}{(x + 2\,y)^2}$

(h) $\dfrac{a^4 - b^4}{(a + b)^2\,(a - b)}$

(i) $\dfrac{(a^2 - b^2)^2 - (a^2 + b^2)^2}{a\,b\,(a + b)}$

1.4 Potenzen und Wurzeln

Wird eine Zahl x n - mal ($n \in \mathbb{N}$) mit sich selbst multipliziert, so setzt man

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdots x}_{\text{n-mal}}$$

Hieraus ergeben sich folgende Konventionen und Gesetze:

1. $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$, mit $x \neq 0$
2. $x^1 = x$
3. $x^0 = 1$, mit $x \neq 0$
4. Potenzrechnung geht vor Punktrechnung:
$$y\,x^n = y \cdot (x^n)$$
5. Addition und Subtraktion:
$$a\,x^n \pm b\,x^n = (a \pm b)\,x^n$$
6. Multiplikation bei gleichen Basen:
$$x^n\,x^m = x^{n+m}$$
7. Division bei gleichen Basen:
$$x^n : x^m = \frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$$
8. Multiplikation bei gleichen Exponenten:
$$x^n\,y^n = (x\,y)^n$$
9. Division bei gleichen Exponenten:
$$x^n : y^n = \frac{x^n}{y^n} = (x : y)^n = \left(\frac{x}{y}\right)^n$$
10. Potenzieren einer Potenz:
$$(x^n)^m = x^{n\,m} = (x^m)^n$$

Aufgaben:

1. Fassen Sie so weit wie möglich zu Potenzen zusammen:

   (a) $(-a^{-1})\,(-a^{-1})\,(-a^{-1})\,(-a^{-1})$

(b) $-\left(\frac{1}{a^{-2}}\,\frac{1}{a^{-2}}\,\frac{1}{a^{-2}}\right)$

(c) $12\,a^2\,b - 6\,a\,b^2 - 15\,a^2\,b + 6\,a\,b^2 - 7\,a^2\,b$

(d) $(3\,a + 2\,b)\,x^4 - x^4\,(2\,b - 3\,a) + x^4\,(3\,a + 2\,b)$

(e) $4\,(a - b)^2 + 2\,(b - a)^2 - 3\,(a - b)^2$

(f) $18\,(a - 1)^3 - 3\,(1 - a)^3 - 15\,(a - 1)^3 + 4\,(1 - a)^3 + 3\,(1 - a)^3$

2. Vereinfachen Sie die Ausdrücke so weit wie möglich, wobei immer vorausgesetzt wird, dass die Nenner ungleich 0 seien:

(a) $\dfrac{3\,a^{n+1}\,6\,x^{n+7}\,9\,b^{x+1}}{3\,x^n\,2\,b^{x+1}\,3\,a}$

(b) $\dfrac{a^{n+1}\,a^{n+1}\,a^n}{a^0\,a^n\,a^{n-1}}$

(c) $\dfrac{a^{x+1}\,b^{x+3}\,a^{3x-1}\,b^{x+3}}{a^{x-1}\,b^{3-x}\,a^x\,b^{x+1}}$

(d) $\dfrac{a^{3n-x}\,b^{2n+x}}{a^{n+2x}\,b^{2n-x}} \cdot \dfrac{x^{3n+2}\,y^{2n-1}}{x^{2n-3}\,y^{n+1}}$

(e) $\dfrac{18\,x^{a+4}}{2\,y^{5a+7}} : \dfrac{4\,x^{7-3a}}{9\,y^{8+5a}}$

(f) $\dfrac{a^{5x-2y}}{b^{6m-1}} : \dfrac{a^{4x+y}}{b^{m-2}}$

(g) $\dfrac{42\,a^2\,b^3\,x^{n+1}}{36\,c^3\,y^2\,z^{n-3}} : \dfrac{70\,a^3\,b^2\,x^{n+2}}{54\,c^2\,y^4\,z^{n-2}}$

(h) $\dfrac{45\,x\,a^3\,9\,y^n\,(a - 1)^2}{9\,y\,b^3\,30\,x^n\,(a + 1)^2} : \dfrac{9\,y^{n-1}\,(1 - a)^3}{24\,x^{n+1}\,(1 + a)^2}$

(i) $\left(\dfrac{4\,b^2\,y^2}{6\,a^2\,x^2}\right)^3 \left(\dfrac{8\,a^3\,y^2}{6\,b^3\,x^3}\right)^4 \left(\dfrac{18\,b^3\,x^6}{16\,a^3\,y^3}\right)^2$

(j) $\left(\dfrac{45\,b^2\,y^3}{24\,a^3\,x}\right)^2 \left(\dfrac{6\,b\,x^3}{9\,a\,y^3}\right)^3 \left(\dfrac{75\,b^3\,x^3}{36\,a^4\,y}\right)^2$

(k) $\left(\dfrac{2\,x\,b^3}{3\,y\,a^3}\right)^3 \left(\dfrac{15\,x^2\,a^3}{8\,y^3\,b}\right)^2 \left(\dfrac{25\,x^3\,b^3}{12\,y^4\,a}\right)^2$

(l) $\dfrac{27\,x^{-5}\,y^{-6}\,z^{-1}}{45\,x^{-4}\,y^{-5}\,z^0}\,\dfrac{49\,x^{-2}\,y^{-3}\,z^{-4}}{42\,x^{-3}\,y^{-4}\,z^{-3}}$

(m) $\dfrac{a^{-2}\,x^{-4}\,y^{-6}}{b^3\,c^{-4}\,z^{-5}} : \dfrac{a^{-3}\,b^{-5}\,x^{-3}}{c^{-5}\,y^6\,z^{-7}}$

Die Umkehrung der Potenzrechnung ist das Wurzelziehen bzw. Radizieren. Die n - te Wurzel ($n > 1$) aus $x \geq 0$ ist die nichtnegative reelle Zahl, deren n - te Potenz gleich a ist, d.h. in Zeichen

$$\sqrt[n]{x} = y \iff y^n = x$$

Von großer Bedeutung ist, dass sich das Wurzelziehen nach den Regel der Potenzrechnung verhält und dass sich eine Wurzel durch eine Potenz mit einer rationalen Zahl darstellen lässt. Genauer gilt:

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

Die Rechenregeln für Potenzen gelten damit entsprechend auch für Wurzeln. Hieraus ergeben sich folgende Konventionen und Gesetze:

1. Man schreibt die 2 - te Wurzel einfacher als

$$\sqrt{x} = \sqrt[2]{x}$$

2. Addition und Subtraktion:

$$a \sqrt[n]{x} \pm b \sqrt[n]{x} = a\, x^{\frac{1}{n}} \pm b\, x^{\frac{1}{n}} = (a \pm b)\, x^{\frac{1}{n}} = (a \pm b) \sqrt[n]{x}$$

3. Multiplikation bei gleichen Radikanten:

$$\sqrt[n]{x} \sqrt[m]{x} = x^{\frac{1}{n}}\, x^{\frac{1}{m}} = x^{\frac{m+n}{n\,m}} = \sqrt[n\,m]{x^{m+n}}$$

4. Division bei gleichen Radikanten:

$$\sqrt[n]{x} : \sqrt[m]{x} = x^{\frac{1}{n}} : x^{\frac{1}{m}} = x^{\frac{m-n}{n\,m}} = \sqrt[n\,m]{x^{m-n}}$$

5. Multiplikation bei gleichen Wurzelexponenten:

$$\sqrt[n]{x} \sqrt[n]{y} = x^{\frac{1}{n}}\, y^{\frac{1}{n}} = (x\,y)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x\,y}$$

6. Division bei gleichen Wurzelexponenten:

$$\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{x} : \sqrt[n]{y} = x^{\frac{1}{n}} : y^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}$$

7. Radizieren einer Wurzel:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{1}{m} \cdot \frac{1}{n}} = x^{\frac{1}{m\,n}} = \sqrt[n\,m]{x}$$

8. Potenzieren einer Wurzel:

$$\left(\sqrt[m]{x}\right)^n = \left(x^{\frac{1}{m}}\right)^n = x^{\frac{1}{m} \cdot n} = x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n}$$

9. Rationalmachen des Nenners:

$$\frac{a}{\sqrt[n]{x}} = \frac{a \sqrt[n]{x^{n-1}}}{x}$$

Aufgaben:

1. Berechnen bzw. vereinfachen Sie die folgenden Produkte und Quotienten, wobei für die Radikanten immer >0 gelten soll:
   $(a)\ \sqrt{16}\,\sqrt{10}$ $(b)\ \sqrt[3]{17}\,\sqrt[3]{3}$ $(c)\ \sqrt[4]{u}\,\sqrt[4]{u^2}\,\sqrt[8]{u^2}$ $(d)\ \sqrt[3]{a^4\,x^2}\,\sqrt[3]{a^2\,x^4}$ $(e)\ \sqrt{18}\ :\ \sqrt{2}$
   $(f)\ \sqrt[3]{40}\ :\ \sqrt[3]{8}$ $(g)\ \sqrt[3]{25}\,\sqrt[3]{5}$ $(h)\ \sqrt{12}\,\sqrt{6}$ $(i)\ \sqrt{x^3}\,\sqrt{x}$ $(j)\ \sqrt[3]{b^5}\ :\ \sqrt[3]{b^2}$
   $(k)\ \sqrt{40}\ :\ \sqrt{10}$ $(l)\ \sqrt{\frac{15}{24}}\ :\ \sqrt{\frac{9}{25}}$

2. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke, wobei für die Radikanten immer >0 gelten soll:

   (a) $\sqrt{\sqrt[3]{a^6\,b^{12}}}$

   (b) $\sqrt[4]{a^2\,\sqrt[3]{a^2}}$

   (c) $\sqrt[3]{\sqrt{a^6\,b^8}}$

   (d) $\sqrt[3]{(a-b)^3\,(a+b)^4}$

   (e) $\sqrt{\frac{a^2}{8}+\sqrt{\left(\frac{a^2}{8}\right)^2+\frac{a^4}{8}}}$

   (f) $\sqrt[4]{\frac{a}{b}\,\sqrt[3]{\frac{b^2}{a}\,\sqrt{\frac{1}{a^2}}}}$

   (g) $\sqrt[3]{a^3\,\sqrt{a^2\,\sqrt[5]{a^8\,\sqrt[4]{a^3}}}}$

   (h) $\sqrt{a\,\sqrt[8]{a^5\,\sqrt[3]{a}}}\ :\ \sqrt[4]{a\,\sqrt[3]{a^2\,\sqrt{a}}}$

   (i) $\dfrac{\sqrt[6]{a^5\,\sqrt[3]{a^2}}}{\sqrt[3]{a^2\,\sqrt[6]{a^4}}}\ :\ \dfrac{\sqrt{a^3\,\sqrt[9]{a^7}}}{\sqrt[9]{a^7\,\sqrt{a}}}$

3. Formen Sie folgende Brüche so um, dass ihre Nenner aus rationalen Zahlen bestehen, wobei für die Radikanten immer >0 gelten soll:

   (a) $\dfrac{1}{\sqrt[9]{x^{13}}}$

   (b) $\dfrac{y^2\,x}{\sqrt{x^3\,y}}$

   (c) $\dfrac{a\,b}{\sqrt[7]{a^2\,b^3}}$

   (d) $\dfrac{16}{3+\sqrt{5}}$

   (e) $\dfrac{16}{3\sqrt{5}-2\sqrt{7}}$

(f) $\dfrac{3 + \sqrt{6}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$

(g) $\dfrac{4\sqrt{10} - 7\sqrt{3}}{\sqrt{10} - \sqrt{3}}$

1.5 Logarithmen

Der Logarithmus $x = \log_a(b)$ ist der Exponent zu der Basis a, für den die Potenz a^x gleich dem Numerus b ist, d.h. in Zeichen

$$\log_a(b) = x \iff a^x = b$$

für $b > 0$ und $a > 0$ mit $a \neq 1$. Hieraus ergeben sich folgende Konventionen und Gesetze:

1. $\log_a(a) = 1$
2. $\log_a(1) = 0$
3. Der Zehnerlogarithmus schreibt sich kürzer $\log_{10}(x) = \lg(x)$
4. Der natürliche Logarithmus schreibt sich kürzer $\log_e(x) = \ln(x)$ ($e \approx 2.718281828\ldots$)
5. Der Zweierlogarithmus schreibt sich kürzer $\log_2(x) = \mathrm{ld}(x)$
6. $\log_a(x\,y) = \log_a(x) + \log_a(y)$
7. $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$
8. $\log_a\left(x^y\right) = y\,\log_a(x)$
9. $\log_a\left(\sqrt[n]{x}\right) = \dfrac{1}{n} \cdot \log_a(x)$
10. $\log_a\left(a^x\right) = x$
11. $\log_a\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$
12. $\log_a(x) = \dfrac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$
13. $\log_a(x) = \dfrac{1}{\log_x(a)}$

Aufgaben:

1. Fassen Sie die folgenden Ausdrücke zusammen:

   (a) $\lg(a) + n\,\lg(a + b) + n\,\lg(a - b)$

   (b) $\lg(a) - \dfrac{1}{2}\,\lg(b) + \dfrac{4}{3}\,\lg(c)$

(c) $\dfrac{1}{3}\lg(a^2 - b^2) - \dfrac{1}{2}\lg(a - b) - \dfrac{1}{2}\lg(a + b)$

(d) $\dfrac{1}{3}\lg(a) + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\lg(a + b) + \dfrac{1}{2}\lg(a - b) - \lg(a) - \lg(b)\right)$

(e) $\dfrac{1}{2}\lg(a^2 - b^2) - \dfrac{1}{3}\left(\lg(a - b) + \lg(a + b)\right)$

(f) $\dfrac{1}{3}\left(\lg(a) + 3\lg(b)\right) - \dfrac{1}{2}\left(4\lg(c) - 2\lg(d)\right)$

(g) $\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{b}{a} + \sqrt{\dfrac{b^2}{a^2} - 1}\right) - \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1}{b - \sqrt{b^2 - a^2}}\right) + \ln\left(\sqrt{a}\right)$

2. Formen Sie die Ausdrücke durch Anwendung der Regeln des Logarithmus um:

(a) $\log\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{u}}\right)$

(b) $\log\left(\sqrt{\dfrac{4\,a^2\,b^3}{c^5}}\right)$

(c) $\log(u^2 + v^2)$

(d) $\ln\left(\sqrt{\dfrac{5\,e}{e^{\ln(5)}}}\right)$

(e) $\ln\left(\dfrac{a^2 - b^2}{(a^2 + b^2)^2}\right)$

Kapitel 2

Gleichungen

2.1 Einfache Gleichungen

Versuchen Sie möglichst alle Gleichungen im Kopf ohne Notieren von Zwischenschritten zu lösen!
Aufgaben:

1. Lösen Sie die folgenden Gleichungen:
   (a) $17 + x = 25$
   (b) $x + 17 = 25$
   (c) $x - 17 = 25$
   (d) $17 - x = 25$
   (e) $-x = 2.4$
   (f) $25 = x + 17$
   (g) $1.2 = x + 1.2$
   (h) $1.2 = x - 1.2$
   (i) $-x = 5 + 4.4$
   (j) $-25 = -x - 17$
2. Lösen Sie die folgenden Gleichungen:
   (a) $5\,x = 75$
   (b) $4\,x = -24$
   (c) $3 : x = 1$
   (d) $6 : x = 1.5$
   (e) $x\,8 = -8$
   (f) $x\,(-9) = 18$
   (g) $6\,x = 6.6$
   (h) $\frac{x}{4} = 25$

(i) $\frac{9}{x} = -3$

(j) $\frac{x}{5} = 10$

3. Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

(a) $2\,x + 3 = 7$

(b) $2\,x + 3 = 7 + x$

(c) $6\,x + 9 = 21$

(d) $7\,x + 16 = 79$

(e) $2\,(x + 4) = 12$

(f) $6(x + 4) = 60$

(g) $8\,(x - 24) = 0$

(h) $(x + 3)\,9 = 63$

(i) $4 + \frac{x}{2} = 6$

(j) $\frac{3}{2} \cdot x + 1 = 2.5$

(k) $\frac{2}{5} - 0.4 + x = 1$

(l) $\frac{3}{2} - 0.8 + x = 1$

(m) $1.9 - \frac{7}{4} + w = 1$

(n) $\frac{5}{8} - x + 0.625 = x$

(o) $\frac{3}{2\,x} - 1 = 4$

(p) $2\,x - (x + 4) = 13$

2.2 Quadratische Gleichungen

Die allgemeine Form einer quadratischen Gleichung ist gegeben durch

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0$$

mit $a \neq 0$. Durch Division durch a geht die quadratische Gleichung in die sogenannte Normalform über:

$$x^2 + p\,x + q = 0$$

Die Lösungsformel für diese Gleichung erhält man durch die **quadratische Ergänzung**. Aus der Gleichung

$$x^2 + p\,x + q = 0$$

folgt durch Subtraktion mit q

$$x^2 + p\,x = -q$$

Durch quadratische Ergänzung mit $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ erhalten wir

$$x^2 + p\,x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

und können auf der linken Seite der Gleichung die binomische Formel anwenden

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

Somit folgt

$$x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

und damit die Lösungsformel der Normalform einer quadratischen Gleichung

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Für die zwei Lösungen x_1 und x_2 der qudratischen Gleichung gilt der Satz von Vieta

$$p = -(x_1 + x_2) \text{ und } q = x_1\,x_2$$

Für das Lösen quadratischer Gleichungen gibt es folgende einfachere Fälle:

1. $x^2 + p\,x = 0 \implies x_1 = 0\,,\ x_2 = -p$
2. $x^2 + q = 0 \implies x_1 = \sqrt{-q}\,,\ x_2 = -\sqrt{-q}$
3. $x^2 = 0 \implies x_1 = 0\,,\ x_2 = 0$

Aufgaben:

1. Lösen Sie die folgenden Gleichungen möglichst im Kopf, ohne Zwischenschritte zu notieren:
   $(a)\, x^2 - 9 = 0$ $(b)\, x^2 = 0$ $(c)\, r^2 - 16 = 0$ $(d)\, a^2 - 4 = 0$ $(e)\, x^2 + 0.125 = \frac{1}{8}$
   $(f)\, x^2 + 9 = 25$ $(g)\, x^2 + 49 = 0$ $(h)\, 2\,x^2 - 1 = 0$ $(i)\, k^2 - \frac{1}{4}\,k = 0$
   $(j)\, x^2 + 9\,x = 0$ $(k)\, -x^2 + 9\,x = 0$ $(l)\, (x - 7)^2 - 49 = 0$
2. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke, indem Sie mittels quadratischer Ergänzung vollständige Quadrate bilden:
   (a) $4\,a^2 - 12\,a + 9\,b^2 - 24\,b = 0$
   (b) $16\,a^2 + 25\,b^2 - 128\,a + 50\,b = 0$
   (c) $3\,a^2 - 2\,b^2 - 2\sqrt{6}\,a + 2\sqrt{6}\,b = 0$
   (d) $4\,x^2 + 12\,x\,y - 9\,a^2 + 12\,a\,b = 0$
3. Lösen Sie die folgenden Gleichungen:
   (a) $x^2 + 5\,x - 14 = 0$
   (b) $x^2 + 12\,x + 11 = 0$
   (c) $x^2 - 144 = 0$

(d) $x^2 + 8x + 16 = 0$

(e) $x^2 - 6x = 40$

(f) $(x - 6)(x + 5) = 0$

(g) $\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{16}$

(h) $(3x - 5)^2 - (2x + 5)^2 = 0$

(i) $3x^2 - 20 = x$

4. Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

(a) $x^2 - 12x + 35 = 0$

(b) $x^2 - 11x + 18 = 0$

(c) $x^2 + 2x - 15 = 0$

(d) $x^2 - 3x - 18 = 0$

(e) $x^2 + 5x + 6 = 0$

5. Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

(a) $x^2 - 8x + 16 = 0$

(b) $x^2 - x - 56 = 0$

(c) $x^2 - 10x + 21 = 0$

(d) $x^2 + 24x + 143 = 0$

(e) $x^2 - x - 42 = 0$

6. Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

(a) $x^2 - 3x - 10 = 0$

(b) $x^2 + x - 12 = 0$

(c) $x^2 - 100 = 0$

(d) $x^2 + 10x + 25 = 0$

(e) $x^2 - 12x = 0$

7. Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

(a) $x - \frac{1}{x} = 0$

(b) $x + \frac{1}{x} = 0$

(c) $x + \frac{1}{x} = 2$

(d) $\frac{x}{6} + \frac{6}{x} = \frac{5(x - 1)}{4}$

(e) $\frac{21 + 65x}{7} - \frac{7}{x} = 8x + 11$

(f) $\dfrac{x\,(x-1)}{x+1} = 6$

(g) $\dfrac{6}{5\,x-1} = 3\,x + 8$

(h) $5\,y + 6 = \dfrac{7}{2\,y+9}$

(i) $x + \dfrac{x}{x-1} = \dfrac{1}{x-1} - 1$

(j) $\dfrac{x}{3} + \dfrac{2}{x-1} = \dfrac{x+1}{x-1} - \dfrac{1}{3}$

(k) $\dfrac{3\,x-7}{x+5} = \dfrac{x-3}{x+2}$

(l) $\dfrac{2\,x-5}{x-1} = \dfrac{5\,x-3}{3\,x+5}$

(m) $\dfrac{5+2\,x}{4\,x-3} = \dfrac{3\,x+3}{7-x}$

(n) $\dfrac{5-r}{2\,r-1} = \dfrac{15-4\,r}{3\,r+1}$

8. Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

(a) $\dfrac{3\,x+5}{x+1} = \dfrac{2\,(x+7)}{x+1} - \dfrac{x+1}{x^2-1}$

(b) $\dfrac{14}{x^2-9} + \dfrac{4-x}{x+3} = \dfrac{7}{x+3} + \dfrac{1}{x-3}$

(c) $\dfrac{7}{z+1} + \dfrac{z+4}{2\,z-2} = \dfrac{3\,z^2-38}{z^2-1}$

(d) $\dfrac{x-1}{2-x} = \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{6-x}{3\,x^2-12}$

2.3 Wurzelgleichungen

Aufgaben:

1. Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

(a) $\sqrt{5\,x-3} = 0$

(b) $\sqrt{7\,x+2} = 4$

(c) $\sqrt{2\,x+4} - 6 = 0$

(d) $\sqrt{2\,x+1} + 3 = 0$

(e) $\sqrt{3\,x+5} = \sqrt{x}$

(f) $\sqrt{3\,x+4} + \sqrt{3\,x-5} = 9$

2. Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

(a) $5\,\sqrt{x} - x = 0$

(b) $2\sqrt{x} + 3 = x$

(c) $x + 2 = \sqrt{-x}$

(d) $2 + \sqrt{x} = x$

(e) $2 - \sqrt{x} = x$

(f) $x - 5\sqrt{x} + 6 = 0$

(g) $x + 5\sqrt{x} + 6 = 0$

(h) $\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{3}{4}$

(i) $4x - 8\sqrt{x} = 8x - 5$

3. Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

(a) $\sqrt{5x + 11} = x + 1$

(b) $\sqrt{2x^2 + 4x - 6} = x + 3$

(c) $x + 1 + \sqrt{5x + 11} = 0$

(d) $\sqrt{9x^2 + 10x - 55} = 3x - 5$

(e) $x = 5 + \sqrt{5x - 1}$

(f) $12 - \sqrt{x - 1} = 2x$

(g) $x - \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{x + 1} = 4$

(h) $\sqrt{2x^2 + \dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{2}} - x - 1 = 0$

4. Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

(a) $\sqrt{52 - 3\sqrt{5x + 6}} = 2\sqrt{10}$

(b) $\sqrt{x + 1 - \sqrt{2x + 3}} = 1$

(c) $\sqrt[4]{19 - 3\sqrt[3]{5x - 9}} = 2$

(d) $\sqrt{x + 9} + \sqrt{x - 12} = \sqrt{x} + \sqrt{x - 7}$

2.4 Exponential- und Logarithmusgleichungen

Aufgaben:

1. Lösen Sie die folgenden Gleichungen:
$(a)\ \lg(x - 4) = 2 \quad (b)\ \lg(1 - 3x) = 0.8 \quad (c)\ \lg(2x - 1) = -0.5 \quad (d)\ \lg(x^2 - 24) = 3$
$(e)\ \mathrm{ld}(x) = 1.4 \quad (f)\ \mathrm{ld}(x - 1) = 2.5 \quad (g)\ \log_3(1 - x) = -0.3 \quad (h)\ \log_5(1 - 2x) = 4$

2. Lösen Sie die folgenden Gleichungen:
$(a)\, 3 \cdot 5^x = 81 \quad (b)\, 2.8 \cdot 1.4^x = 10 \quad (c)\, 0.4 \cdot 3.2^x = 1 \quad (d)\, 5 \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^x = 0.4 \quad (e)\, 3 \cdot 4^x = 5$
$(f)\, 2 \cdot 3^x = 0.8 \quad (g)\, \tfrac{2}{3} \cdot 1.4^x = \sqrt{2} \quad (h)\, 4 - 3 \cdot 2^x = 6.9$

3. Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

   (a) $\lg((x+1)^2) = \lg(2) + \lg(x+1) + \lg(x-1)$

   (b) $\lg(x-2) - \frac{1}{2}\lg(4) = \frac{1}{3}\lg(125) - \lg(x+1)$

   (c) $\frac{1}{3}\ln(x^6) = \frac{1}{2}\ln(81)$

   (d) $\frac{1}{\lg(x)+1} - \frac{3}{\lg(x)-3} = 2$

   (e) $\log_3(x) + \log_5(x) = 5$

   (f) $\ln(x) - \mathrm{ld}(x) + 2\lg(x) = 7$

4. Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

   (a) $\sqrt[x]{10.27} = \sqrt[4]{5}$

   (b) $\left(a^{x-2}\right)^{x+2} = \left(a^{x+3}\right)^{x-4}$

   (c) $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x-3} = \left(\frac{4}{3}\right)^{3x+4}$

   (d) $3^{(2)^x} = 2^{(3)^x}$

   (e) $\sqrt[2x]{3^{3x+2}} = \sqrt[3x]{3^{2x+3}}$

   (f) $3^{9x+1} = 9^{3x-1}$

   (g) $7^{2x+1} - 3^{x-1} = 7^{2x+3} - 3^{x+1}$

   (h) $5^{4\sqrt{x}} - 6\,5^{2\sqrt{x}} = 0$

   (i) $x^x = x$

   (j) $12\,\sqrt[2x]{3} - \sqrt[x]{3} = 27$

   (k) $4^{x^2-x+1} = 8^x$

   (l) $4\,\sqrt[x]{7} = 5\,\sqrt[x]{3}$

2.5 Lineare Gleichungssysteme

Ein lineares Gleichungssystem mit n Gleichungen und n Unbekannten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ hat die Form

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1\,a_{1,1} & + & x_2\,a_{1,2} & + & \ldots & + & x_n\,a_{1,n} & = & b_1 \\ x_1\,a_{2,1} & + & x_2\,a_{2,2} & + & \ldots & + & x_n\,a_{2,n} & = & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1\,a_{n,1} & + & x_2\,a_{n,2} & + & \ldots & + & x_n\,a_{n,n} & = & b_n \end{array}$$

Für die Lösungsmenge eines solchen linearen Gleichungssystems gibt es drei Möglichkeiten:

1. Die Lösungsmenge L besteht aus genau einer Lösung für $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

2. Die Lösungsmenge L ist die leere Menge, d.h. $L = \emptyset$.

3. Die Lösungsmenge L ist unendlich groß, d.h. $|L| = \infty$.

Es gibt drei elementare Lösungsverfahren:

1. Das Gleichsetzungsverfahren: Man löst zwei Gleichungen nach einer gleichen Unbekannten auf, setzt sie gleich und erhält dabei eine Gleichung mit einer Unbekannten weniger. Dieses Verfahren bietet sich eigentlich nur für lineare Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten und zwei Gleichungen an.

2. Das Einsetzungsverfahren: Man löst eine Gleichung nach einer Unbekannten auf und setzt das Ergebnis in die anderen Gleichungen ein.

3. Das Additionsverfahren: Man addiert ein Vielfaches einer Gleichung zu Vielfachen der anderen Gleichungen, so dass eine Unbekannte in den anderen Gleichungen nicht mehr auftritt.

Aufgaben:

1. Bestimmen Sie die Lösungsmengen der Gleichungssysteme:

   $(a)\ \begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 12 \\ & & y & = & 5 \end{array}$ $\qquad (b)\ \begin{array}{rcrcl} x & - & y & = & 7 \\ & & x & = & 2y \end{array}$

   $(c)\ \begin{array}{rcrcrcl} 4x & + & 6y & = & 2 & & \\ & & x & = & y & + & 3 \end{array}$ $\qquad (d)\ \begin{array}{rcrcrcl} & & y & = & 2x & - & 4 \\ -3x & + & 5y & = & 1 & & \end{array}$

   $(e)\ \begin{array}{rcrcl} 5x & + & 2y & = & 17 \\ 2x & + & 3y & = & 12 \end{array}$ $\qquad (f)\ \begin{array}{rcrcr} 4x & - & 6y & = & -1 \\ 6x & + & 4y & = & 1 \end{array}$

   $(g)\ \begin{array}{rcrcl} 2x & - & 4y & = & 3 \\ 0.5x & - & y & = & 1 \end{array}$ $\qquad (h)\ \begin{array}{rcrcl} \frac{x}{4} & + & \frac{y}{3} & = & 8 \\ \frac{x}{3} & + & \frac{y}{5} & = & 7 \end{array}$

   $(i)\ \begin{array}{rcrcr} 3x & + & 4y & = & 5 \\ 9x & + & 2 & = & 12y \end{array}$ $\qquad (j)\ \begin{array}{rcrcr} 2x & - & 3y & = & 15 \\ 6x & - & 54 & = & 9y \end{array}$

   $(k)\ \begin{array}{rcrcl} 2(x+1) & + & 7(y+6) & = & 1 \\ 3(x-1) & - & 5(y+1) & = & 5 \end{array}$ $\qquad (l)\ \begin{array}{rcrcl} 2(x-1) & - & 3(y-1) & = & 1 \\ 4(2x+1) & + & 3(3y-1) & = & 8 \end{array}$

   $(m)\ \begin{array}{rcrcl} 0.4x & + & 7.2y & = & 4.6 \\ 5.1x & - & 3.7y & = & 8.9 \end{array}$ $\qquad (n)\ \begin{array}{rcrcrcl} & & 19.2x & = & 8.1 & - & 3.5y \\ 4.3y & + & 0.2 & = & 2.7x & & \end{array}$

   $(o)\ \begin{array}{rcrcl} 0.5x & + & 0.9y & = & 0.3 \\ -0.4x & + & 0.3y & = & 1.8 \end{array}$

2. Bestimmen Sie die Lösungsmengen der Gleichungssysteme:

$$(a)\quad \begin{array}{rcrcl} 3x & - & 5 & = & y \\ -x & + & 7 & = & y \end{array} \qquad (b)\quad \begin{array}{rcrcl} 4 & - & 7y & = & x \\ 3y & + & 9 & = & x \end{array}$$

$$(c)\quad \begin{array}{rcrcl} 3x & + & y & = & 11 \\ -2x & + & y & = & 16 \end{array} \qquad (d)\quad \begin{array}{rcrcl} x & - & 2y & = & 4 \\ x & + & 3y & = & 9 \end{array}$$

$$(e)\quad \begin{array}{rcrcl} 2x & + & 9 & = & 5y \\ 8x & - & 9 & = & 5y \end{array} \qquad (f)\quad \begin{array}{rcrcl} 3y & + & 1 & = & 4x \\ 3y & + & 1 & = & 5x \end{array}$$

$$(g)\quad \begin{array}{rcrcl} y & - & 2x & = & 13 \\ 8x & - & 7y & = & 5 \end{array} \qquad (h)\quad \begin{array}{rcrcrcl} & & 4y & = & 15 & - & x \\ 2x & - & 7 & = & 8y & & \end{array}$$

$$(i)\quad \begin{array}{rcrcl} 4x & - & 5y & = & 8 \\ 7x & + & 5y & = & 3 \end{array} \qquad (j)\quad \begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & -7 \\ 2x & + & 7y & = & 6 \end{array}$$

$$(k)\quad \begin{array}{rcrcl} -2x & + & 3y & = & 5 \\ 6x & + & 11y & = & 5 \end{array} \qquad (l)\quad \begin{array}{rcrcr} 0.4x & + & 0.3y & = & 10 \\ 1.2x & - & 1.5y & = & -18 \end{array}$$

3. Bestimmen Sie die Lösungsmengen der Gleichungssysteme:

$$(a)\quad \begin{array}{rcrcl} \dfrac{x-2y}{3} & + & \dfrac{2x+y}{6} & = & 1 \\ \dfrac{2y-x}{6} & + & \dfrac{2x+y}{2} & = & \dfrac{2}{3} \end{array} \qquad (b)\quad \begin{array}{rcrcl} \dfrac{x+3y}{4} & - & \dfrac{4x-2y}{3} & = & -\dfrac{7}{6} \\ \dfrac{x+3y}{6} & + & \dfrac{2x-y}{4} & = & \dfrac{7}{12} \end{array}$$

$$(c)\quad \begin{array}{rcl} \dfrac{3}{7-2y} & = & \dfrac{2}{5-3x} \\ x - y & = & 4 \end{array} \qquad (d)\quad \begin{array}{rcl} \dfrac{1}{3x-5} & = & \dfrac{4}{7y-13} \\ \dfrac{8}{3x+y} & = & \dfrac{1}{y-x} \end{array}$$

$$(e)\quad \begin{array}{rcl} \dfrac{x+1}{x+y} & = & \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{9-y}{x+1} & = & \dfrac{1}{2} \end{array} \qquad (f)\quad \begin{array}{rcl} \dfrac{x-3}{y-1} & = & \dfrac{x+2}{y+1} \\ \dfrac{x-1}{y-4} & = & \dfrac{x+4}{y+3} \end{array}$$

4. Bestimmen Sie die Lösungsmengen der Gleichungssysteme:

$$(a)\quad \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 18 \\ & & 2y & - & z & = & 3 \\ & & & & z & = & 7 \end{array} \qquad (b)\quad \begin{array}{rcrcrcr} 4x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ 3x & + & 2y & + & 3z & = & 16 \\ 5x & - & y & + & 3z & = & 12 \end{array}$$

$$(c)\quad \begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & z & = & 3 \\ x & + & y & - & z & = & 4 \\ 3x & + & y & + & z & = & 4 \end{array}$$

$$(d)\quad \begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & - & u & = & -3 \\ 2x & - & y & + & z & + & u & = & 2 \\ & & 3y & - & z & - & u & = & 2 \\ x & + & y & + & z & + & u & = & 3 \end{array}$$

$$(e)\quad \begin{array}{rcrcrcr} -2x & + & y & - & z & = & 5 \\ x & + & y & + & z & = & 1 \\ 2x & - & y & + & z & = & -5 \end{array}$$

$$(f)\quad \begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & z & = & 8 & - & 4y \\ x & + & y & = & 6 & - & z \\ 3x & - & 5z & = & -2 & - & 5y \end{array}$$

$$(g)\quad \begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & - & z & + & 3 & = & 0 \\ & & & & 4x & - & y & = & -5 \\ & & 4x & + & 2z & + & y & = & 5 \end{array}$$

2.6 Ungleichungen

Im Fall der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ gibt es folgende Relationen, durch die die Ordnung dieser Zahlen beschrieben wird:

1. gleich: „$=$“
2. (echt) kleiner: „$<$“
3. kleiner oder gleich : „$\leq$“
4. (echt) größer: „$>$“
5. größer oder gleich : „$\geq$“

Zwischen zwei reellen Zahlen a und b besteht immer genau eine der drei Beziehungen

$$a = b \quad \text{oder} \quad a < b \quad \text{oder} \quad a > b$$

Rechenregeln für Ungleichungen: Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, dann gelten:

1. $a \leq a$ (Reflexivität)
2. Aus $a \leq b$ und $b \leq c$ folgt $a \leq c$ (Transitivität)
3. Aus $a \leq b$ und $b \leq a$ folgt $a = b$ (Antisymmetrie)
4. Aus $a \leq b$ folgt $a + c \leq b + c$
5. Aus $a \leq b$ und $c \leq d$ folgt $a + c \leq b + d$
6. Aus $a < b$ und $c \leq d$ folgt $a + c < b + d$
7. Aus $a \leq b$ und $c \geq 0$ folgt $a\,c \leq bc$
8. Aus $a \leq b$ und $c \leq 0$ folgt $a\,c \geq bc$

9. Aus $a \leq b$ folgt $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$

Aufgaben:

1. Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen:
$(a)\, 2 - x < 0 \quad (b)\, -2x > 6 \quad (c)\, -x < -1 \quad (d)\, \frac{2}{3} < \frac{1}{6} + \frac{5}{9} \cdot x \quad (e)\, \frac{15-x}{3} < 4$
$(f)\, \frac{x}{2} - \frac{x}{3} \geq 1$

2. Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen:
$(a)\, 3x + 7 > 5x \quad (b)\, 3 + 7x > 5x \quad (c)\, 3x \geq 9x - 12 \quad (d)\, 2x + 1 < 4x - 1$
$(e)\, 0.3x - 0.3 \leq 1.9x + 4.5 \quad (f)\, 3(x-1) > x + 5 \quad (g)\, 5(x+2) > 4(1-x)$
$(h)\, (x-2)(x+3) < (x-3)(x+2)$

3. Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen:
   (a) $x^2 + 4x + 3 \geq 0$
   (b) $x^2 - 2x + 1 \geq \dfrac{5}{2} \cdot x - 1$
   (c) $\dfrac{2x-1}{2x+1} + \dfrac{3x+1}{x-2} > 4$
   (d) $\dfrac{2x+1}{2x-2} + \dfrac{2x-3}{3x-3} \geq 1$

4. Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Ungleichungssysteme:
   (a) $4(x-3) + 4 > 2 - 1$ und $\dfrac{x}{2} + 1 > 7 - x$
   (b) $\dfrac{x+3}{2} < \dfrac{x+1}{4}$ und $x > 2x + 1$
   (c) $\dfrac{1}{3} \cdot x - \dfrac{1}{4} > 4x - 2$ und $x + 3 \leq 4(x+6)$
   (d) $5x - 8 < \dfrac{3}{4} \cdot x + 9$ und $x - 1 > \dfrac{1}{2}(x+5)$
   (e) $13x + 11 \geq 10x - 1$ und $5x + 3 > 2(x-3)$
   (f) $3 + 3x \leq 6x - 7$ und $x - 3 \leq \dfrac{2}{5}(x-3)$

5. Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen:
   (a) $-7 \leq x - 3 \leq -2$
   (b) $-3 < 2x + 4 < 5$
   (c) $1 < 1 - x \leq 2$

6. Stellen Sie die Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen grafisch dar:
$(a)\, \dfrac{8}{x} + 7 < 3 \quad (b)\, \dfrac{10}{x} - 3 > 2 \quad (c)\, 7 - \dfrac{2}{x} \leq 3 \quad (d)\, 2 + \dfrac{6}{x} > -1 \quad (e)\, \dfrac{7x-3}{8x-5} < 1$
$(f)\, \dfrac{x+1}{x-1} > 3 \quad (g)\, \dfrac{x}{x-1} > 0 \quad (h)\, \dfrac{3x}{x+2} \leq 1 \quad (i)\, \dfrac{4x-2}{2x+5} \geq 2$

2.7 Beträge

Der Betrag oder auch Absolutbetrag $|a|$ einer Zahl a wird erklärt durch

$$|a| = \begin{cases} a & \text{für } a \geq 0 \\ -a & \text{für } a < 0 \end{cases}$$

Der Betrag stellt den Abstand einer Zahl auf der Zahlengeraden vom Nullpunkt dar.

Rechenregeln und Eigenschaften für Beträge:

1. $|-a| = |a|$
2. $|a| \geq 0$
3. $|a| = 0 \iff a = 0$
4. $|a\,b| = |a|\,|b|$
5. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ mit $b \neq 0$
6. $|a + b| \leq |a| + |b|$ (Dreiecksungleichung)

Aufgaben:

1. Stellen Sie die Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen grafisch dar:
   $(a)\ |x - 5| < 3$ $\quad (b)\ |4x + 2| > 5$ $\quad (c)\ |x - 1| < 5$ $\quad (d)\ |x + 2| = 7$
   $(e)\ |x + 3| = |3x - 4|$ $\quad (f)\ |x^2 - 2x - 8| = 7$ $\quad (g)\ |2x - x^2| = 8$ $\quad (h)\ |3x - 5| > 2\,|x + 2|$
   $(i)\ |2x - 3| < x + 3$ $\quad (j)\ |x^2 - 6x + 8| \geq 3$ $\quad (k)\ |x^2 - 6x + 11| < 1$ $\quad (l)\ \left|\frac{x+3}{1-x}\right| > 3$
   $(m)\ \left|\frac{1-4x}{2-x}\right| > 4$ $\quad (n)\ \frac{|x-1|}{2x+2} \geq 1$

Kapitel 3

Trigonometrie

3.1 Dreiecke

Zur Winkelmessung unterscheidet man zwei verschiedene Winkelmaße: das Gradmaß und das Bogenmaß. Beide beruhen auf Kreisteilungen. Beim Gradmaß wird ein Vollwinkel in 360 gleiche Teile eingeteilt (Sexagesimaleinteilung). Die Einheit des Gradmaßes ist Grad °. 1° entspricht $\frac{1}{360}$ des Vollwinkels. Untereinheiten des Grads sind Minuten und Sekunden:

1. $1^\circ = 60'$ (Minuten)
2. $1' = 60''$ (Sekunden)

Beim Bogenmaß wird ein Vollwinkel bezogen auf den Kreisumfang eines Kreises mit Radius 1. D.h. der Vollwinkel im Bogenmaß entspricht $2\,\pi$. Die Einheit des Bogenmaßes ist der Radiant (rad). Grad α wird durch die Formel

$$x = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \alpha$$

in Radiant x und Radiant x durch die Formel

$$\alpha = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot x$$

in Grad α umgerechnet.
Eigenschaften von Dreiecken:

1. Die Winkelsumme im Dreieck beträgt 180°
2. Die Summe der Außenwinkel beträgt 360°
3. Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt, der zugleich der Schwerpunkt des Dreiecks ist. Die Seitenhalbierenden teilen einander im Verhältnis $1 : 2$
4. Die Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt, der zugleich der Mittelpunkt des Umkreises ist.
5. Die Winkelhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt, der zugleich Mittelpunkt des Inkreises ist.

6. Die Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.
7. Zwei Dreiecke heißen kongruent oder deckungsgleich, wenn sie so verschoben bzw. gedreht werden können, dass sie vollständig zusammenfallen.
8. Dreiecke sind kongruent, wenn sie übereinstimmen in:
   (a) den drei Seiten (SSS)
   (b) zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel (SWS)
   (c) zwei Seiten und dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel (SSW)
   (d) einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln (WSW)
9. Dreiecke sind ähnlich, wenn sie übereinstimmen in
   (a) dem Verhältnis der drei Seiten
   (b) dem Verhältnis zweier Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel
   (c) dem Verhältnis zweier Seiten und dem größeren dieser Seite gegenüberliegenden Winkel

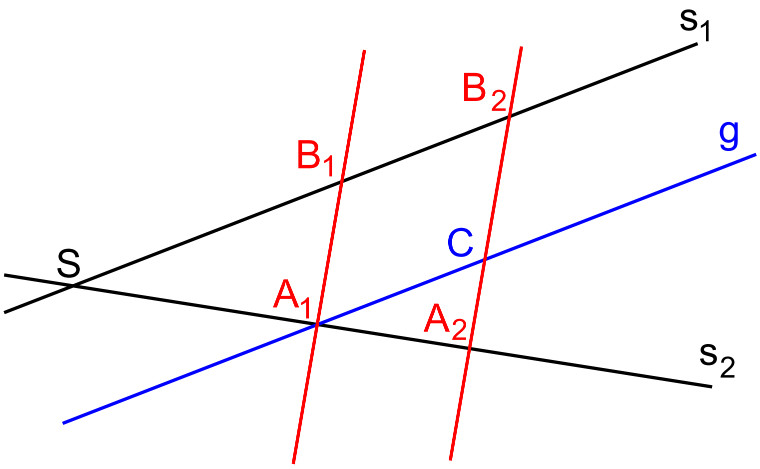


Abbildung 3.1: Grafik zu den Strahlensätzen.

Seien die Bezeichnungen wie in Abbildung 3.1 gegeben, dann gelten die Strahlensätze:

1. Erster Strahlensatz:
   Zwei nicht parallele Strahlen s_1 und s_2 haben den gemeinsamen Startpunkt S. Werden diese Strahlen von zwei parallelen Geraden geschnitten, so verhalten sich die Längen der Abschnitte auf dem einen Strahl wie die zugehörigen Längen der Abschnitte auf dem anderen Strahl. Es gelten die Verhältnisse:
   (a) $\overline{SA_1} : \overline{SA_2} = \overline{SB_1} : \overline{SB_2}$
   (b) $\overline{SA_1} : \overline{A_1A_2} = \overline{SB_1} : \overline{B_1B_2}$
   (c) $\overline{SA_2} : \overline{A_1A_2} = \overline{SB_2} : \overline{B_1B_2}$

2. Zweiter Strahlensatz:
   Zwei nicht parallele Strahlen s_1 und s_2 haben den gemeinsamen Startpunkt S. Werden diese Strahlen von zwei parallelen Geraden geschnitten, so verhalten sich die Längen der Abschnitte auf dem einen Strahl wie die zugehörigen Längen der Abschnitte auf den Parallelen. Es gelten die Verhältnisse:

   (a) $\overline{A_1B_1} : \overline{A_2B_2} = \overline{SA_1} : \overline{SA_2}$
   (b) $\overline{A_1B_1} : \overline{A_2B_2} = \overline{SB_1} : \overline{SB_2}$

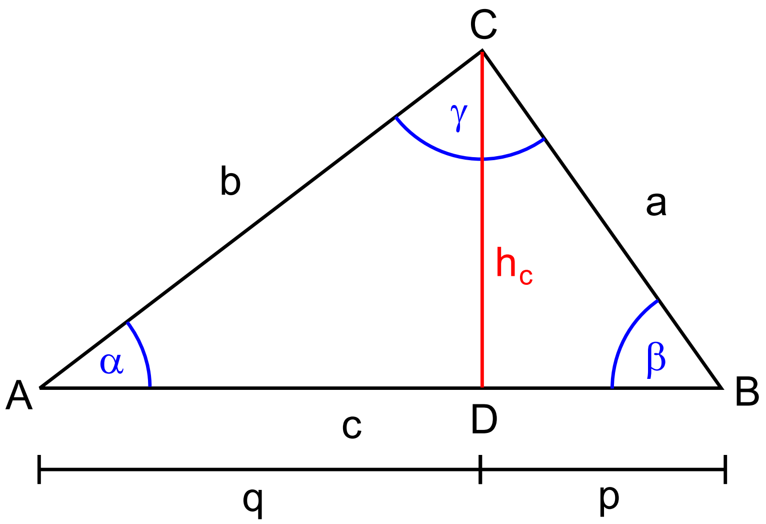


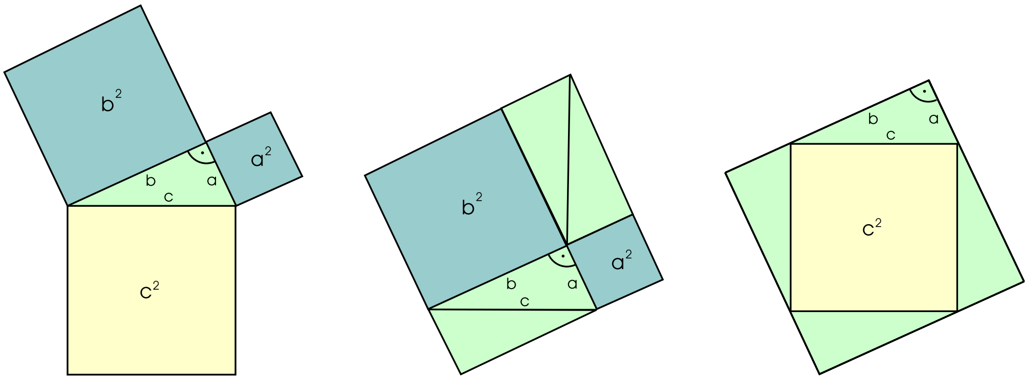
Abbildung 3.2: Grafik zu Eigenschaften von Dreiecken.

Eigenschaften von rechtwinkligen Dreiecken: Wir verwenden die Bezeichnungen von Abbildung 3.2, und setzen voraus, dass γ ein rechter Winkel ist, d.h. es gilt $\gamma = 90°$.

1. **Satz des Pythagoras:** Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Hypothenuse gleich der Summe der Quadrate über den Katheten, bzw. es gilt
$$c^2 = a^2 + b^2$$

2. **Kathetensatz (des Euklid:** Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über einer Kathete flächengleich dem Rechteck aus der Hypothenuse und der Projektion dieser Kathete auf die Hypothenuse, d.h. es gilt
$$a^2 = p\,c \quad \text{und} \quad b^2 = q\,c$$

3. **Höhensatz (des Euklid):** Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Höhe auf der Hypothenuse flächengleich mit dem Rechteck aus den Hypothenusenabschnitten, d.h. es gilt
$$h_c^2 = q\,p$$



(a) (b) (c)

Abbildung 3.3: Satz des Pythagoras.

Beweis des Satzes des Pythagoras:

Der Beweis des Satzes des Pythagoras folgt direkt aus der Abbildung 3.3. Bild (a) von Abbildung 3.3 zeigt die geometrische Bedeutung des Satzes des Pythagoras. Wir müssen also zeigen, dass die Summe der Flächeninhalte der Quadrate mit den Seitenlängen der Katheten a und b gleich dem Flächeninhalt des Quadrats mit der Seitenlänge der Hypothenuse c ist. Bild (b) von Abbildung 3.3 zeigt, dass

$$(a + b)^2 - 2\,a\,b = a^2 + b^2 \tag{3.1}$$

gilt. Aus Bild (c) von Abbildung 3.3 folgt

$$(a + b)^2 - 2\,a\,b = c^2 \,. \tag{3.2}$$

Die Gleichungen 3.1 und 3.2 ergeben zusammen

$$a^2 + b^2 = c^2 \,.$$

□

Beweis des Höhensatzes:

Mit den Bezeichnungen von Abbildung 3.2 folgen aus dem Satz des Pythagoras

$$a^2 = h_c^2 + p^2$$

und

$$b^2 = h_c^2 + q^2 \,,$$

also gilt

$$a^2 + b^2 = 2\,h_c^2 + p^2 + q^2 \,. \tag{3.3}$$

Gleichung 3.3 und der Satz des Pythagoras ergeben nun

$$\begin{aligned} p^2 + 2\,p\,q + q^2 &= (p + q)^2 \\ &= c^2 \\ &= a^2 + b^2 \\ &= 2\,h_c^2 + p^2 + q^2 \,, \end{aligned}$$

womit

$$p\,q = h_c^2$$

folgt.

$\square$

<u>Beweis des Kathetensatzes:</u>
Mit den Bezeichnungen von Abbildung 3.2 folgt aus dem Satz des Pythagoras und dem Höhensatz

$$a^2 = h_c^2 + p^2 = p\,q + p^2 = p\,(q + p) = p\,c\,.$$

Entsprechend erhalten wir

$$b^2 = h_c^2 + q^2 = p\,q + q^2 = q\,(p + q) = q\,c\,.$$

$\square$

Aufgaben:

1. Folgende Winkel sind im Bogenmaß bzw. Gradmaß anzugeben:
   $(a)\,15°$ $(b)\,225°$ $(c)\,105°$ $(d)\,277,5°$ $(e)\,31°\,17'\,20''$ $(f)\,\frac{\pi}{8}$ $(g)\,\frac{\pi}{12}$ $(h)\,5.19$ $(i)\,0.22$ $(j)\,1$

2. Gegeben ist ein Dreieck mit $a = 4.5$ cm, $b = 12.2$ cm und $c = 11.7$ cm. Konstruieren Sie dieses Dreieck. Zeichnen Sie die Seitenhalbierenden, die Mittelsenkrechten, die Winkelhalbierenden und die Höhen sowie den In- und Umkreis.

3.2 Trigonometrische Funktionen

Die Seitenverhältnisse in rechtwinkligen Dreiecken lassen Rückschlüsse auf die entsprechenden Winkel zu. Dies wird durch die trigonometrischen Funktionen beschrieben, wobei wir uns auf die Bezeichnungen von Abbildung 3.2 beziehen und davon ausgehen, dass $\gamma = 90°$ ist:

1. Sinus von α: $\sin(\alpha) = \dfrac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}} = \dfrac{a}{c}$
2. Cosinus von α: $\cos(\alpha) = \dfrac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}} = \dfrac{b}{c}$
3. Tangens von α: $\tan(\alpha) = \dfrac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \dfrac{a}{b}$
4. Kotangens von α: $\cot(\alpha) = \dfrac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}} = \dfrac{b}{a}$

Aufgrund der Strahlensätze hängen diese Verhältnisse nur vom Winkel α ab. Da $\beta = 90° - \alpha$ ist, gelten folgende Beziehungen:

1. $\sin(\beta) = \sin(90° - \alpha) = \cos(\alpha)$
2. $\cos(\beta) = \cos(90° - \alpha) = \sin(\alpha)$
3. $\tan(\beta) = \tan(90° - \alpha) = \cot(\alpha)$
4. $\cot(\beta) = \cot(90° - \alpha) = \tan(\alpha)$

Weiterhin gelten:

1. $\tan(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$
2. $\cot(\alpha) = \dfrac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$

Abbildung 3.4 zeigt im Fall, dass die Hypothenuse gleich 1 ist, die trigonometrischen Funktionen geometrisch auf. Aufgrund des Satzes von Pythagoras gelten:

1. $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$
2. $1 + \tan^2(\alpha) = \dfrac{1}{\cos^2(\alpha)}$

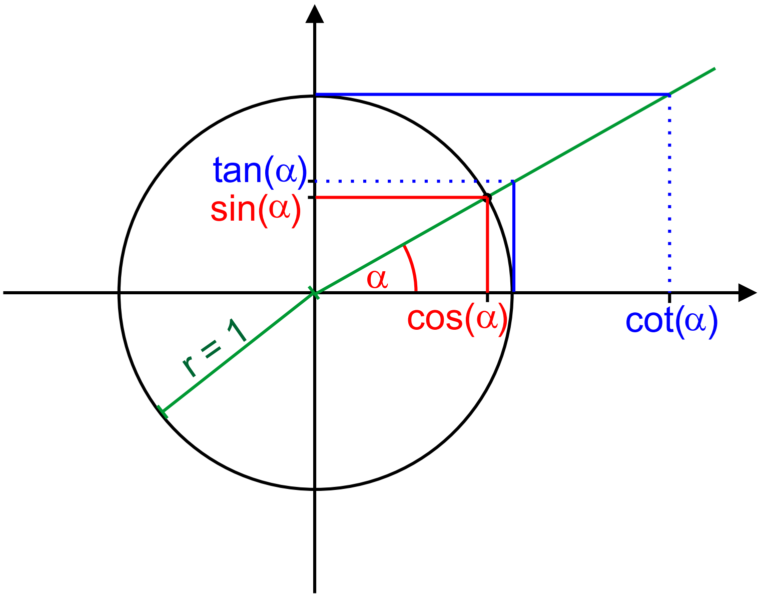


Abbildung 3.4: Grafik zu den trigonometrischen Funktionen.

3. $1 + \cot^2(\alpha) = \dfrac{1}{\sin^2(\alpha)}$

Spezielle Werte der trigonometrischen Funktionen sind aus der Tabelle 3.1 zu entnehmen. Da die trigonometrischen Funktionen periodisch sind, gibt es keine Umkehrfunktionen auf ganz $\mathbb{R}$. Deshalb sind die Umkehrfunktionen nur für Teilintervalle definiert:

1. Die Funktion

$$\arcsin : [-1, 1] \to \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

heißt **Arcussinus** und ist definiert durch

$$\arcsin(y) = x \iff \sin(x) = y \,.$$

Radiant	Grad	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\tan(\alpha)$	$\cot(\alpha)$
0	$0°$	0	1	0	nicht definiert
$\frac{\pi}{6}$	$30°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$45°$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	$60°$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	$90°$	1	0	nicht definiert	0

Tabelle 3.1: Spezielle Werte der trigonometrischen Funktionen

2. Die Funktion

$$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$$

heißt **Arcuscosinus** und ist definiert durch

$$\arccos(y) = x \iff \cos(x) = y\,.$$

3. Die Arcustangensfunktion $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ wird definiert durch

$$\arctan(y) = x \iff \tan(x) = y$$

4. Die Cotangensfunktion $\cot : \mathbb{R} \to (0,\pi)$ wird definiert durch

$$\operatorname{arccot}(y) = x \iff \cot(x) = y$$

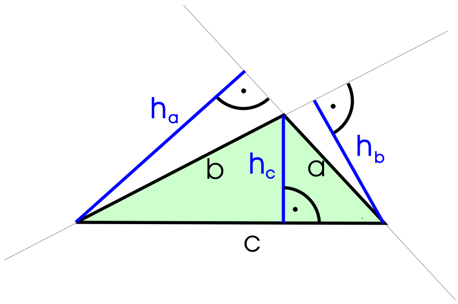


Abbildung 3.5: Höhen eines Dreiecks.

<u>**Eigenschaften von allgemeinen Dreiecken:**</u> Wir verwenden die Bezeichnungen von Abbildung 3.2 und Abbildung 3.5:

1. **Flächeninhalt:** Für den Flächeninhalt F von Dreiecken gilt:

$$F = \frac{1}{2}\,a\,h_a = \frac{1}{2}\,b\,h_b = \frac{1}{2}\,c\,h_c\,.$$

2. **Sinussatz:** Für Dreiecke gilt

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

3. **Kosinussatz:** Für Dreiecke gelten

$$\begin{array}{ccccccc} a^2 & = & b^2 & + & c^2 & - & 2\,b\,c\,\cos(\alpha) \\ b^2 & = & a^2 & + & c^2 & - & 2\,a\,c\,\cos(\beta) \\ c^2 & = & a^2 & + & b^2 & - & 2\,a\,b\,\cos(\gamma) \end{array}$$

Beweis zum Flächeninhalt von Dreiecken: Aus Abbildung 3.6 (a) bis (c) folgt

$$F = \frac{1}{2}\, a\, h_a$$

Aus Abbildung 3.6 (d) bis (f) folgt

$$F = \frac{1}{2}\, b\, h_b$$

Aus Abbildung 3.6 (g) bis (i) folgt

$$F = \frac{1}{2}\, c\, h_c$$

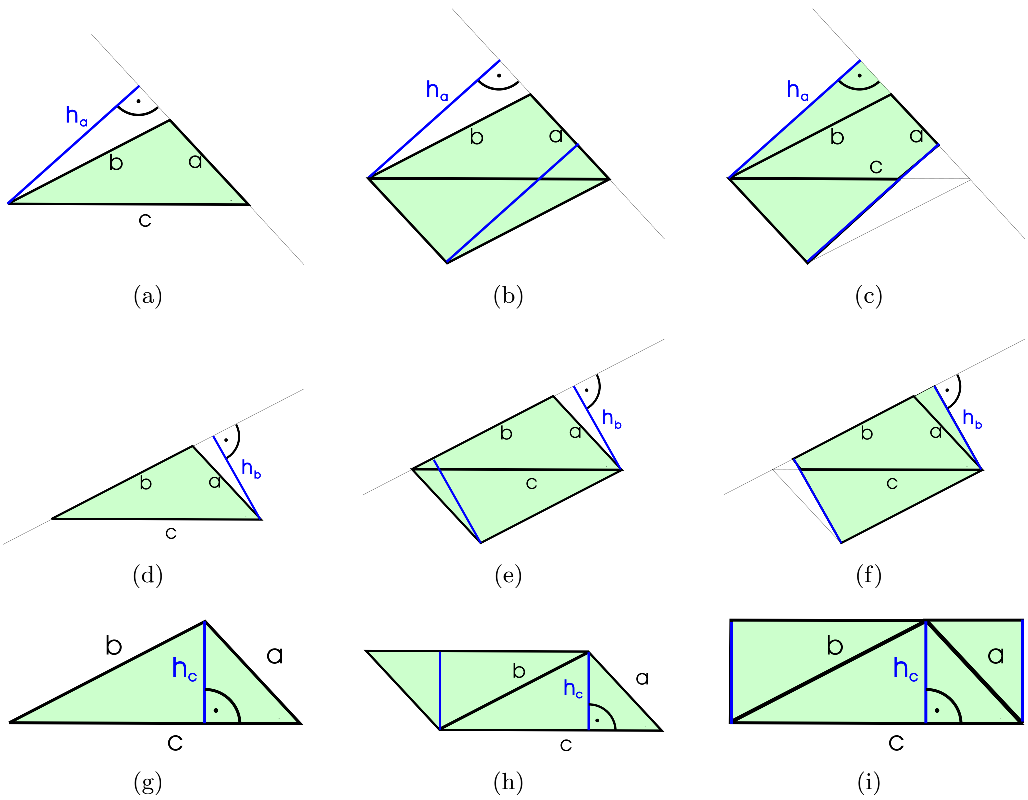


Abbildung 3.6: Flächeninhalt eines Dreiecks.

Additionstheoreme für Sinus und Cosinus:

1. $\sin(x \pm y) = sin(x)\, cos(y) \pm \cos(x)\, sin(y)$
2. $\cos(x \pm y) = \cos(x)\, cos(y) \mp sin(x)\, sin(y)$
3. $\sin(2\, x) = 2\, sin(x)\, \cos(x)$
4. $\cos(2\, x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

5. $\sin(x) + \sin(y) = 2\,\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

6. $\sin(x) - \sin(y) = 2\,\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

7. $\cos(x) + \cos(y) = 2\,\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

8. $\cos(x) - \cos(y) = 2\,\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

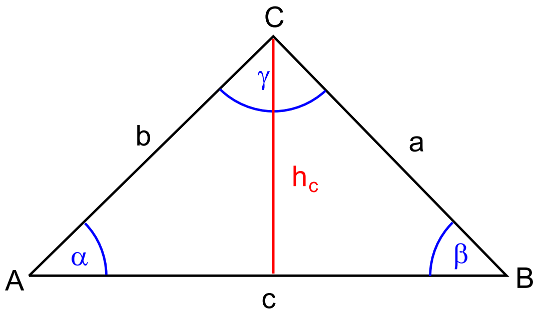


Abbildung 3.7: Gleichschenkliges Dreieck.

Aufgaben:

1. Berechnen Sie die fehlenden Seiten und Winkel eines Dreiecks mit $\gamma = 90°$, wie in Abbildung 3.2 dargestellt:
   $(a)\, a = 6.0\,\text{cm}$ und $b = 2.5\,\text{cm}$ $(b)\, a = 280\,\text{m}$ und $b = 360\,\text{m}$ $(c)\, a = 24.8\,\text{m}$ und $b = 34.2\,\text{m}$ $(d)\, a = 47\,\text{m}$ und $\beta = 38°$ $(e)\, b = 24.5\,\text{m}$ und $\alpha = 62.5°$ $(f)\, a = 120\,\text{m}$ und $\alpha = 41°$ $(g)\, c = 6.4\,\text{km}$ und $\alpha = 32°$ $(h)\, a = 15.8\,\text{m}$ und $c = 24.3\,\text{m}$ $(i)\, b = 39.2\,\text{cm}$ und $c = 56.4\,\text{cm}$

2. Berechnen Sie p, q und h_c im Dreieck von Abbildung 3.2, wobei immer $\gamma = 90°$ vorausgesetzt wird:
   $(a)\, a = 6\,\text{cm}$ und $c = 10\,\text{cm}$ $(b)\, b = 4.5\,\text{m}$ und $\alpha = 43.5°$ $(c)\, a = 8\,\text{m}$ und $\alpha = 28°$ $(d)\, c = 12\,\text{cm}$ und $\alpha = 72°$ $(e)\, c = 14.5\,\text{m}$ und $\beta = 48.5°$ $(f)\, a = 14\,\text{cm}$ und $b = 25.8\,\text{cm}$

3. Sei ein gleichschenkliges Dreieck wie in Abbildung 3.7 gegeben. Berechnen Sie die fehlenden Seiten und Winkel sowie den Flächeninhalt des Dreiecks:
   $(a)\, b = 58.6\,\text{m}$ und $\alpha = 62°$ $(b)\, a = 45.2\,\text{m}$ und $\gamma = 98°$ $(c)\, c = 124.8\,\text{m}$ und $\beta = 36°$ $(d)\, c = 9.76\,\text{m}$ und $\gamma = 79.5°$ $(e)\, a = 65.4\,\text{m}$ und $c = 54.7\,\text{m}$

4. Sei ein Parallelogramm mit den Bezeichnungen wie in Abbildung 3.8 gegeben. Berechnen Sie den Flächeninhalt:

   (a) $a = 8\,\text{cm}\,,\ d = 10\,\text{cm}\,,\ \alpha = 60°$

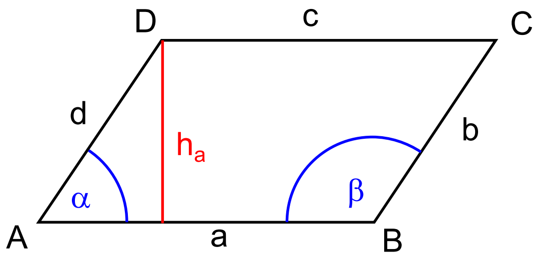


Abbildung 3.8: Parallelogramm.

(b) $a = 12\,\mathrm{m}$, $b = 7.5\,\mathrm{m}$, $\beta = 125°$

5. Drücken Sie $\tan(\alpha)$ durch $\sin(\alpha)$ $(\cos(\alpha))$ aus. Berechnen Sie $\tan(\alpha)$ für $\sin(\alpha) = \frac{3}{4}$.

6. Drücken Sie $\sin(\alpha)$ durch $\tan(\alpha)$ aus. Berechnen Sie $\sin(\alpha)$ für $\tan(\alpha) = 3\sqrt{3}$ Siehe hierzu Abbildung 3.9.

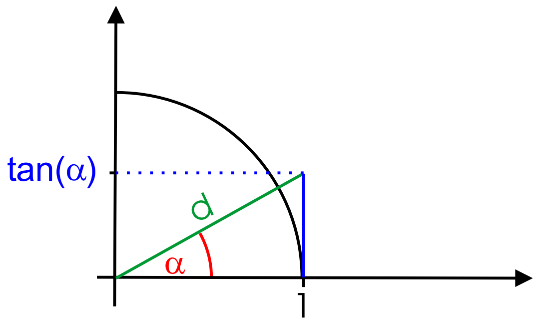


Abbildung 3.9: $d = \sqrt{1 + \tan^2(\alpha)}$.

7. Berechnen Sie $\cos(\alpha)$ für $\tan(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

8. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

   (a) $\tan(\alpha)\cos(\alpha)$

   (b) $\dfrac{\sin(\alpha)}{\tan(\alpha)}$

   (c) $\sin^3(\alpha) + \sin(\alpha)\cos^2(\alpha)$

   (d) $\dfrac{1}{\cos(\alpha)\tan(\alpha)}$

   (e) $\dfrac{\cos(\alpha)}{\tan(\alpha)}$

   (f) $\dfrac{1}{\cos^2(\alpha)}$

   (g) $\sqrt{1 + \cos(\alpha)}\,\sqrt{1 - \cos(\alpha)}$

(h) $\cos(\alpha) + \sin(\alpha)\tan(\alpha)$

9. Konstruieren Sie die Dreiecke und berechnen Sie die fehlenden Seiten und Winkel, wobei wir uns auf die Bezeichnungen von Abbildung 3.2 beziehen:

(a) $a = 4.5\,\text{cm}\,,\ b = 5.7\,\text{cm}\,,\ \beta = 70°$

(b) $a = 4\,\text{cm}\,,\ c = 5\,\text{cm}\,,\ \gamma = 25°$

(c) $b = 6.8\,\text{cm}\,,\ c = 6.2\,\text{cm}\,,\ \beta = 80°$

(d) $a = 7.5\,\text{cm}\,,\ b = 5\,\text{cm}\,,\ \alpha = 110°$

(e) $b = 9\,\text{cm}\,,\ c = 5.8\,\text{cm}\,,\ \beta = 141.5°$

(f) $b = 3.6\,\text{cm}\,,\ c = 8\,\text{cm}\,,\ \gamma = 99°$

10. Konstruieren Sie die **beiden** möglichen Dreiecke und berechnen Sie die fehlenden Seiten und Winkel, wobei wir uns auf die Bezeichnungen von Abbildung 3.2 beziehen:

(a) $a = 3.3\,\text{cm}\,,\ b = 5.2\,\text{cm}\,,\ \alpha = 35°$

(b) $b = 4.2\,\text{cm}\,,\ c = 8.3\,\text{cm}\,,\ \beta = 30°$

(c) $a = 8.5\,\text{cm}\,,\ c = 6\,\text{cm}\,,\ \gamma = 33.5°$

(d) $b = 7\,\text{cm}\,,\ c = 5.6\,\text{cm}\,,\ \gamma = 50°$

(e) $a = 6.7\,\text{cm}\,,\ b = 5.6\,\text{cm}\,,\ \beta = 54°$

(f) $b = 6\,\text{cm}\,,\ c = 5\,\text{cm}\,,\ \gamma = 49°$

11. Bestimmen Sie die Winkel der Dreiecke, wobei wir uns auf die Bezeichnungen von Abbildung 3.2 beziehen:

(a) $a = 4\,\text{cm}\,,\ b = 5\,\text{cm}\,,\ c = 6\,\text{cm}$

(b) $a = 3\,\text{cm}\,,\ b = 6\,\text{cm}\,,\ c = 4\,\text{cm}$

(c) $a = 334\,\text{m}\,,\ b = 178\,\text{m}\,,\ c = 247\,\text{m}$

(d) $a = 50.8\,\text{m}\,,\ b = 53.6\,\text{m}\,,\ c = 39.4\,\text{m}$

12. Drücken Sie (mit Hilfe der Additionstheoreme) $\cos(3\,\alpha)$ durch $\cos(\alpha)$ aus.

13. Berechnen Sie für $\sin(\alpha) = \frac{2}{3}\sqrt{2}$ und $\cos(\beta) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ mit Hilfe der Additionstheoremen: (a) $\sin(\alpha+\beta)$ (b) $\sin(\alpha-\beta)$ (c) $\cos(\alpha+\beta)$ (d) $\cos(\alpha-\beta)$ (e) $\sin(2\,\alpha)$ (f) $\sin(2\,\beta)$ (g) $\cos(2\,\alpha)$ (h) $\cos(2\,\beta)$

14. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

(a) $\cos(45° + \alpha) + \cos(45° - \alpha)$

(b) $\sin(\alpha + 60°) - \sin(\alpha - 60°)$

(c) $\cos(60° + \alpha) - \cos(60° - \alpha)$

(d) $\cos(\alpha - \beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$

15. Beweisen Sie die Additionstheoreme der Tangensfunktion

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)} \quad \text{und} \quad \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

(Anleitung: Drücken Sie $\tan(\alpha + \beta)$ durch $\sin(\alpha + \beta)$ und $\cos(\alpha + \beta)$ aus, dividieren Sie Zähler und Nenner durch $\cos(\alpha)\cos(\beta)$) Bestimmen Sie weiterhin $\tan(75°)$ und $\tan(15°)$ mit Hilfe der Tabelle 3.1.

16. Es seien für α und β $\sin(\alpha) = \frac{12}{13}$ und $\cos(\beta) = \frac{4}{5}$ bekannt. Berechnen Sie:
(*a*) $\tan(\alpha)$ (*b*) $\tan(\beta)$ (*c*) $\tan(\alpha + \beta)$ (*d*) $\tan(\alpha - \beta)$

17. Welche Formel für $\tan(2\,\alpha)$ ergibt sich aus den Additionstheoremen der Tangensfunktion?

Kapitel 4

Vektoren

4.1 Grundlagen

Aufgaben:

1. Geben Sie an, welche der auf dem Quader in Abbildung 4.1 eingezeichneten Pfeile zum Vektor $\vec{a}$ gehören:
   $(a)\, \vec{a} = \vec{EH}$ $(b)\, \vec{a} = \vec{DH}$ $(c)\, \vec{a} = \vec{CD}$ $(d)\, \vec{a} = \vec{AH}$ $(e)\, \vec{a} = \vec{HG}$ $(f)\, \vec{a} = \vec{AF}$

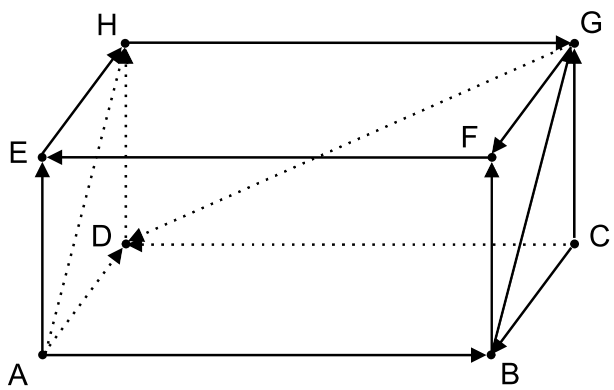


Abbildung 4.1: Quader.

   Begründen Sie außerdem, weshalb die Pfeile $\vec{AB}$ und $\vec{FE}$ nicht zum gleichen Vektor gehören.

2. Zeichnen Sie den Pfeil $\vec{P_1P_2}$ sowie den zum gleichen Vektor gehörenden Pfeil Q_1Q_2 in ein Koordinatensystem ein. Bestimmen Sie den jeweils fehlenden Punkt.
   $(a)\, P_1(3|1),\ P_2(7|4),\ Q_1(1|4)$ $(b)\, P_1(1|5),\ P_2(4|2),\ Q_2(7|-1)$ $(c)\, P_1(1|1|3),\ P_2(3|4|5),\ Q_1(2|5|4)$

3. Berechnen Sie die Komponentendarstellung des Vektors $\vec{a} = \vec{PQ}$:
   $(a)\, P(2|5),\ Q(3|8)$ $(b)\, P(-4|7),\ Q(3|6)$ $(c)\, P(3|-4|5),\ Q(2|2|6)$ $(d)\, P(5|5|2.5),\ Q(8|6|4)$

4. Der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ verschiebt den Punkt P in den Punkt Q. Bestimmen Sie P bzw.

Q :
$(a)\, P(2|3|1),\ Q = ?$ $(b)\, P(-1|4|-3),\ Q = ?$ $(c)\, P = ?,\ Q(7|6|3)$ $(d)\, P = ?,\ Q(0|0|0)$

5. Zeichnen Sie ein Parallelogramm A_1, A_2, A_3, A_4 und das durch die Seitenmitten M_1, M_2, M_3, M_4 bestimmte Viereck. Fassen Sie jeweils diejenigen Pfeile zusammen, welche den gleichen Vektor beschreiben. Welche Vektoren sind zueinander entgegengesetzt? Welche Vektoren besitzen den gleichen Betrag?

6. Wieviele verschiedene Verschiebungen des Raumes können durch geordnete Paare von Eckpunkten eines Würfels beschrieben werden?

7. Bezüglich eines Koordinatensystems ist der Punkt $P_1(1|2)$ gegeben. Der Vektor $\vec{v} = 0\vec{P}_1$ legt eine Verschiebung v fest. Bestimmen Sie die Koordinaten der Bildpunkte von $P_2(3|4)$, $P_3(-1|0)$, und $P_4(-3|-2)$ bzgl. $\vec{v}$. Geben Sie die Koordinaten der Originalpunkte von $\tilde{P}_5(1|-3)$, $\tilde{P}_6(4|1)$, und $\tilde{P}_7(-3|0)$ bzgl. der Verschiebung $\vec{v}$ an. Tragen Sie alle gegebenen und ermittelten Original- bzw. Bildpunkte in ein Koordinatensystem ein und verbinden Sie jeweils den Originalpunkt mit dem zugehörigen Bildpunkt durch einen Pfeil.

8. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:
   (a) $\vec{a} + \vec{b} - (\vec{c} + \vec{a}) + (-\vec{b})$
   (b) $(\vec{m} - \vec{n}) + (\vec{m} + \vec{n}) - \vec{m}$
   (c) $((\vec{r} - \vec{t}) - (\vec{s} - \vec{v})) - ((\vec{r} - \vec{s}) - (\vec{t} - \vec{v})) + \vec{r} - \vec{s}$
   (d) $\vec{PQ} - (\vec{RS} + \vec{SS} - \vec{QP}) + \vec{RS}$

9. Lösen Sie die folgenden Vektorgleichungen nach $\vec{x}$ auf:
   (a) $\vec{s} - \vec{x} + \vec{r} = \vec{x} + \vec{r}$
   (b) $-(\vec{d} - \vec{x}) + (\vec{d} + \vec{x}) = \vec{d} - (\vec{r} - \vec{x})$

10. Berechnen Sie die Summe der beiden Vektoren, sofern dies möglich ist:
$(a) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ $(b) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(c) \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ $(d) \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
$(e) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

11. Bestimmen Sie zeichnerisch und rechnerisch die angegebene Summe der Vektoren $\vec{u}$, $\vec{w}$ und $\vec{v}$ (Bezeichnung der Vektoren von links nach rechts) in Abbildung 4.2:
$(a)\, \vec{u} + \vec{v}$ $(b)\, \vec{u} + \vec{w}$ $(c)\, \vec{v} + \vec{w}$ $(d)\, (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$ $(e)\, \vec{v} + \vec{u}$ $(f)\, \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ $(g)\, \vec{u} + \vec{u}$ $(h)\, \vec{w} + \vec{w} + \vec{w}$
Was fällt Ihnen auf, wenn Sie die Resultate von (a) und (e) bzw. (d) und (f) vergleichen?

12. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{e} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Vektoren, sofern dies möglich ist:

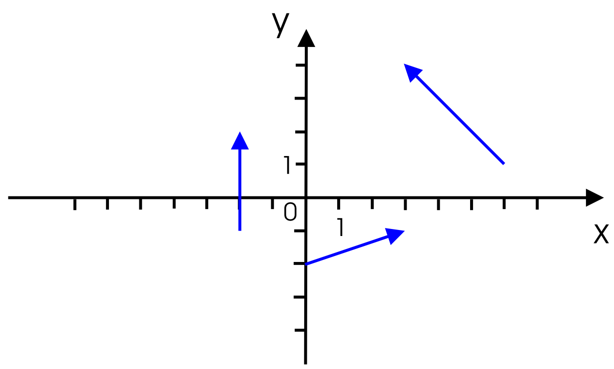


Abbildung 4.2: Vektoren $\vec{u}$, $\vec{w}$ und $\vec{v}$ von links nach rechts bezeichnet.

$(a)\,\vec{a} - \vec{b}$ $(b)\,\vec{c} - \vec{d}$ $(c)\,\vec{e} - \vec{f}$ $(d)\,\vec{a} - \vec{e}$ $(e)\,\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$ $(f)\,\vec{a} - \vec{a}$ $(g)\,\vec{a} + \vec{c} - \vec{d}$
$(h)\,\vec{d} + \vec{d} - \vec{b} + \vec{a} - \vec{c} - \vec{b}$ $(i)\,\vec{0} - \vec{a}$

13. Vektoren einer Ebene sind durch ihre Koordinaten gegeben. Ermitteln Sie rechnerisch und zeichnerisch die Koordinaten der Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ mit:

    (a) $\vec{u} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

    (b) $\vec{v} = 0.5\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

    (c) $\vec{w} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

14. Stellen Sie fest, für welche $a \in \mathbb{R}$ die folgenden Bedingungen gelten:

    (a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0.5 \end{pmatrix}, \ |\vec{a}| = 1.5$

    (b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ 2\,a \end{pmatrix}, \ |\vec{a}| = 1$

    (c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}, \ |\vec{a}| = a + 1$

    (d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2\,a \\ 2 \\ a \end{pmatrix}, \ |\vec{a}| = 3$

15. Bestimmen Sie $|\vec{AB}|$ für $A(1|-2|4)$ und $B(2|3|-1)$ bzw. $A(a_1|a_2|a_3)$ und $B(b_1|b_2|b_3)$.

16. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

    (a) $4\,(\vec{a} - 2\,\vec{b}) + 2\,(3\,\vec{b} - 2\,\vec{a}) + 4\,\vec{b}$

    (b) $\frac{2}{3}\,\vec{a} + \left(\frac{3}{2}\,\vec{a} - \frac{5}{4}\,\vec{b}\right) - 3\,\vec{a}$

(c) $\frac{1}{4}\vec{x} + \frac{\vec{x}+\vec{y}}{2} - \frac{\vec{x}}{3}$

(d) $4\vec{b}\left(\frac{3}{2} - 1.25\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{6}{5}\vec{b}\right)$

(e) $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 3\left(1.5\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}\right)$

17. Die Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{b}$ sind durch ihre Koordinaten gegeben. Stellen Sie den Vektor $\vec{b}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ dar:

(a) $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(c) $\vec{b} = \begin{pmatrix} 11 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(d) $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

18. Alle Vektoren einer Ebene bzw. des Raumes sind durch ihre Koordinaten bzgl. eines kartesischen Koordinatensystems gegeben. Die Koordinatenachsen werden durch die paarweisen orthogonalen Einheitsvektoren $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ bzw. $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$ aufgespannt. Berechnen Sie das Skalarprodukt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

(a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{a} = 4\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = -2\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(d) $\vec{a} = -6\,\vec{e}_1 + 8\,\vec{e}_2$, $\vec{b} = 3\,\vec{e}_1 - 4\,\vec{e}_2 + 12\,\vec{e}_3$

(e) $\vec{a} = 2\,(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) + \vec{e}_3$, $\vec{b} = 4\,\vec{e}_1 + 10\,\vec{e}_2 - \vec{e}_3$

19. Berechnen Sie das Skalarprodukt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

(a) $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = 15°$

(b) $|\vec{a}| = 2.5$, $|\vec{b}| = 2$, $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = 90°$

(c) $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$, $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = 135°$

(d) $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 1$, $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = 105°$

20. Man bestimme die Parameterform für die Gerade g durch die Punkte P_1 und P_2, ermittle außerdem eine Gleichung von g in analytischer Form und überprüfe das Ergebnis zeichnerisch.

(a) $P_1(1|2)$, $P_2(0|-1)$

(b) $P_1(2|-1)$, $P_2(3|4)$

(c) $P_1(-4|8)$, $P_2(0|0)$

(d) $\vec{x}_1 = 0\vec{P}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = 0\vec{P}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

(e) $\vec{x}_1 = 0\vec{P}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = 0\vec{P}_2 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}$

21. Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden g, welche durch die Punkte P_0 und P_1 bestimmt ist:
$(a)\, P_0(1|0|2)$, $P_1(1|1|1)$ $(b)\, P_0(-1|0.5|1)$, $P_1(0|0|-1)$ $(c)\, P_0(3|2|1)$, $P_1(1|2|3)$ $(d)\, P_0(0|0|0)$, $P_1(1$
$1)$

22. Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden g, die durch einen Punkt P_0 und einen Richtungsvektor $\vec{a}$ festgelegt ist und untersuchen Sie, welcher der Punkte A, B und C auf g liegt:

    (a) $P_0(1|3|-1)$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A(-1|2|-2)$, $B(7|6|3)$, $C(-5|0|-4)$

    (b) $P_0(0|1|-1)$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A(3|7|-1)$, $B(-2|-3|-1)$, $C(1|-3|-1)$

    (c) $P_0(1|2|-2)$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $A(0|0|0)$, $B(0|2|-3)$, $C(4|2|1)$

23. Weisen Sie nach, dass die gegebenen Geradengleichungen dieselbe Gerade beschreiben:

    (a) $y = 4x + 2$ und $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$

    (b) $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ und $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

    (c) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

    (d) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$

24. Ermitteln Sie eine Parametergleichung der Geraden g_1, welche

    (a) parallel zu der durch $P_1(3|4|7)$ und $P_2(1|1|4)$ bestimmten Geraden g_2 verläuft und den Punkt $P_0(1|0|1)$ enthält,

    (b) orthogonal zu der durch $y = 2x + 3$ festgelegten Geraden verläuft und den Punkt $A(1|7)$ enthält,

    (c) parallel zur z - Achse verläuft und den Punkt $P_0(-1|-2|3)$ enthält.

Kapitel 5

Differential- und Integralrechnung

5.1 Funktionen

Aufgaben:

1. Gegeben sind lineare Funktionen f mit folgenden analytischen Ausdrücken $y = f(x)$:
   $(a)\, y = 2\,x + 1 \quad (b)\, y = 0.2\,(2\,x - 15) \quad (c)\, y = \frac{1}{3}(5 - 2\,x) \quad (d)\, 12 = 4\,y - 6\,x$
   Skizzieren Sie den Funktionsverlauf. Ermitteln Sie Steigung und Steigungswinkel der Geraden.

2. Gegeben sind zwei Punkte P_1 und P_2 einer Geraden g. Geben Sie die analytische Form der Geraden g an und ermitteln Sie deren Nullstellen: (a) $P_1(-1|2)$, $P_2(2|5)$ (b) $P_1(-2|1)$, $P_2(4|4)$ (c) $P_1(-3|1)$, $P_2(6|-2)$ (d) $P_1(0|-4)$, $P_2(-2|4)$ (e) $P_1(6|-3)$, $P_2(-3|3)$

3. Ermitteln Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Grafen der Funktion f und g:

   (a) $f(x) = x + 1$ und $g(x) = 3\,x + 2$
   (b) $f(x) = -5\,x - 7$ und $g(x) = 5\,x - 2$

4. Skizzieren Sie das Kurvenbild der folgenden quadratischen Funktionen mit Hilfe der Nullstellen, Scheitelpunktskoordinaten und des Schnittpunkts mit der y - Achse:

   (a) $f(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 2\,x - 8)$
   (b) $f(x) = -\frac{1}{4}(x + 4)^2$
   (c) $f(x) = x^2 - 6\,x + 12$

5. Bestimmen Sie die Gleichung für die quadratische Funktion $y = a\,x^2 + b\,x + c$, von der folgendes bekannt ist:

   (a) Der Graf der Funktion geht durch die Punkte $P_1(0|-3)$, $P_2(-1|2)$ und $P_3(1|6)$.
   (b) Der Graf der Funktion geht durch die Punkte $P_1(1|0)$, $P_2(2|3)$ und $P_3(0|0)$.
   (c) Der Graf der Funktion geht durch die Punkte $P_1(0|3)$, $P_2(1|2)$ und hat eine Nullstelle bei $x = 2$.

6. Ermitteln Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Grafen der Funktion f und g:

   (a) $f(x) = x + 1$ und $g(x) = x^2 + 1$

   (b) $f(x) = -x^2 + 1$ und $g(x) = x^2 - 2x + 1$

   (c) $f(x) = x^3$ und $g(x) = x^2 + x$

   (d) $f(x) = x + 9$ und $g(x) = 6\sqrt{x}$

7. Vom Grafen einer Exponentialfunktion $y = k\,a^x$ sind zwei Punkte bekannt. Um welche Funktion handelt es sich?
   (*a*) $P_1(1|3)$, $P_2(2|12)$ (*b*) $P_1(2|4.5)$, $P_2(3|6.75)$ (*c*) $P_1(-3|-8)$, $P_2(2|-0.25)$
   (*d*) $P_1(0|0.5)$, $P_2(-1|0.1)$ (*e*) $P_1(2|0.05)$, $P_2(-2|500)$

8. Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich einer Funktion mit der angegebenen Gleichung an:
   (*a*) $y = \log_a(-x)$ (*b*) $y = \log_a(1 - x^2)$ (*c*) $y = \log_a(1 - x)$ (*d*) $y = \log_a(x^2)$
   (*e*) $y = \log_a(1 + x^2)$ (*f*) $y = \log_a(\sqrt{x})$

9. Welcher der beiden Logarithmen ist größer?
   (*a*) $\log_2(7)$, $\log_2(9)$ (*b*) $\log_{0.5}(6)$, $\log_{0.5}(8)$ (*c*) $\log_5(5)$, $\log_6(6)$ (*d*) $\log_7(4)$, $\log_5(4)$
   (*e*) $\log_{\frac{1}{2}}(5)$, $\log_{\frac{1}{3}}(5)$ (*f*) $\log_7(1)$, $\log_8(1)$

10. Lösen Sie die Ungleichungen:
    (*a*) $\lg(x) > 5$ (*b*) $\lg(-x) > 5$ (*c*) $\lg(x^2) > 5$ (*d*) $\lg^2(x) > 5$ (*e*) $\lg(x) < 2\lg(x)$
    (*f*) $\lg(x) > 3\lg(x)$

11. Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion f für $x \to \infty$ und für $x \to -\infty$:

    (a) $f(x) = \dfrac{6}{x^2}$

    (b) $f(x) = \dfrac{3x}{x + 2}$

    (c) $f(x) = 4 - x^3$

    (d) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x + 1}$

    (e) $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 - 2}$

    (f) $f(x) = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x}}$

12. Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion f im Unendlichen. Geben Sie gegebenenfalls die waagerechte Asymptote an.

    (a) $f(x) = \dfrac{4 - x^3}{4 + x^3}$

    (b) $f(x) = \dfrac{8x^2 - 3x^3}{2x^2 - x}$

    (c) $f(x) = \dfrac{3x + 2}{x^2 + 5x}$

(d) $f(x) = \dfrac{4}{3\,x - 2}$

13. Ermitteln Sie folgende Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{3\,x^2 - 3}{x + 1}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 + x}{x}$

(c) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2\,x^3 - 6\,x^2}{x^2 - 3\,x}$

(d) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x + 2}{2\,x^2 + 4\,x}$

(e) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(2 + h)^2 - 4}{h}$

(f) $\lim\limits_{x\to \sqrt{2}} \dfrac{x^4 - 4}{x^2 - 2}$

(g) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2 - 3\,x - 18}{x + 3}$

(h) $\lim\limits_{c\to 1} \dfrac{c^2 - 1}{c^3 - 1}$

5.2 Differentialrechnung

Aufgaben:

1. Differenzieren Sie die folgenden Funktionen:

(a) $f(x) = -\dfrac{1}{2}\,x^4 + \dfrac{1}{3}\,x^3 - 2\,x^2 + \dfrac{1}{x} - 5$

(b) $f(x) = a^2\,x^3 - \sqrt{b}\,x^2 + \dfrac{1}{2}\,c\,x - 1$

(c) $f(x) = -2\,x^{-5} + 3\,x^{-3} - 12\,x^{-2} + 4$

(d) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}} - 3\,\sqrt[3]{x^2} + \dfrac{6\,\sqrt[3]{x}}{x}$

(e) $f(x) = \left(\sqrt{x} - 1\right)\left(1 + \sqrt{x}\right)$

(f) $f(x) = (1 - x^{-4})\,(x^{-1} + x^2)$

(g) $f(x) = \left(x^2 + 2\,x\,\sqrt{x} + x\right)\left(x - \sqrt{x}\right)$

(h) $f(x) = (a\,x^2 - b)^2$

(i) $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{3\,x^3}$

(j) $f(x) = \dfrac{2\,x^3 - 3}{x^2}$

(k) $f(x) = \sqrt[3]{\sqrt{x}}$

(l) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \left(1 + \sqrt[4]{x}\right)$

(m) $f(x) = \frac{x}{e^x}$

(n) $f(x) = \sqrt{x} \sin(x)$

(o) $f(x) = 5^x + 2^x$

(p) $f(x) = \sin(x) \ln(x)$

(q) $f(x) = \sin(x^2)$

(r) $f(x) = 1 - \cos(x^2)$

(s) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

(t) $f(x) = \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}$

(u) $f(x) = \sin^2(x)$

(v) $f(x) = e^{\sin(x)}$

(w) $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$

(x) $f(x) = \log_7(x)$

2. Bilden Sie die ersten drei Ableitungen:

(a) $f(x) = x^n$

(b) $f(x) = \sqrt{x}$

(c) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

(d) $f(x) = \frac{x}{1 - x}$

(e) $f(x) = \sin(1 - 2x)$

(f) $f(x) = \log_5(x)$

(g) $f(x) = e^{-x}$

(h) $f(x) = 2x^5 - x^4$

3. Welchen Winkel bildet die Tangente im Punkt $P_0(x_0|y_0)$ an der Kurve von $f(x)$ mit der x - Achse?

(a) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$

(b) $f(x) = x^2 + x - 1$, $x_0 = 2$

(c) $f(x) = \sin(2x)$, $x_0 = 0.5$

(d) $f(x) = \log_4(x)$, $x_0 = 5$

4. Untersuchen Sie die Funktionen auf lokale Extrema und Wendepunkte. In welchen Intervallen sind die Funktionen monoton steigend bzw. fallend?

(a) $f(x) = x^2 - 2x + 3$

(b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x + 7$

(c) $f(x) = x^3\,(8 - x)$

(d) $f(x) = (x - 2)^4 + 4$

(e) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

(f) $f(x) = \dfrac{x^2 - 7\,x + 6}{x - 10}$

5.3 Integralrechnung

Aufgaben:

1. Bestimmen Sie die Stammfunktionen und kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse:

   (a) $f(x) = -\dfrac{1}{2}$

   (b) $f(t) = \dfrac{t}{2} - \dfrac{2}{t^2}$

   (c) $f(x) = (1 - x)\,(2 + x)$

   (d) $f(a) = 3\,a + 2$

   (e) $f(x) = \sqrt{2\,x}$

   (f) $f(z) = -3\,z^{-3}$

   (g) $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$

   (h) $f(x) = \dfrac{3\,x^2 - 4\,x}{3\,x}$

   (i) $f(x) = y^3$

2. Bestimmen Sie die Stammfunktionen:

   (a) $f(x) = 3\,a^2 - 2$

   (b) $f(x) = 2$

   (c) $f(x) = \sin(x) + x$

   (d) $f(r) = \pi\,r^2$

   (e) $f(x) = 3\,x^4 - x^5 + 7\,x^2 - 1$

3. Bestimmen Sie die Stammfunktionen:

   (a) $\displaystyle\int \left(\frac{3}{2}\,x^2 + 5\right) dx$

   (b) $\displaystyle\int 3\,x\,dx$

   (c) $\displaystyle\int \left(t^2 - \frac{3}{2\,t^3}\right) dt$

   (d) $\displaystyle\int (1 - 2\,x)^2\,dx$

(e) $\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$

(f) $\int (a - 2)^3 \, da$

(g) $\int (1 - 2x)(3x - 5) \, dx$

(h) $\int \left(\frac{x}{5} - a \right) dx$

(i) $\int \left(x^4 - \frac{3}{2} a x^2 + 2 - \frac{3}{x^2} \right) dx$

(j) $\int \left(a x^{-3} - \frac{1}{b x^2} \right) dx$

(k) $\int \left(\frac{1}{2} - 3 e^x \right) dx$

(l) $\int \left(x - 2 \sin(x) + \frac{1}{2} \cos(x) \right) dx$

4. Berechnen Sie:

(a) $\int_{-3}^{0} 2 \, dt$

(b) $\int_{-2}^{-1} (-x^2 + x + 1) \, dx$

(c) $\int_{-2}^{1} \left(x^3 - 2x \right) dx$

(d) $\int_{\frac{1}{2}}^{3} \left(\frac{2}{3} x^2 - \sqrt{x} \right) dx$

(e) $\int_{-1}^{0} a x^2 \, dx$

(f) $\int_{-1}^{0} a x^2 \, da$

(g) $\int_{-0.3}^{1.7} 1 \, dx$

(h) $\int_{-1}^{1} y (1 - y)(2y + 1) \, dy$

(i) $\int_{1}^{3} \left(\frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2} \right) dx$

(j) $\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin(x) - \cos(x)) \, dx$

(k) $\int_{0}^{2\pi} \left(\frac{1}{3} \cos(x) - \frac{1}{2} \sin(x) \right) dx$

(l) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \left(\frac{2}{x} - x - 1 \right) dx$

(m) $\displaystyle\int_{-1}^{0} (3\,e^{x} + 1)\,dx$

(n) $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{x - 1}{x}\,dx - \int_{3}^{5} \left(1 - \frac{1}{x} \right) dx$

5. Der Graf der Funktion f und die x - Achse begrenzen eine Fläche vollständig. Berechnen Sie jeweils den Inhalt A dieser Fläche:

   (a) $f(x) = -4\,x^2 + 8\,x$

   (b) $f(x) = (x - 3)^2 - 2$

   (c) $f(x) = x^3 + 2\,x^2 - 3\,x$

   (d) $f(x) = \dfrac{2}{5}\,x^3 - \dfrac{1}{10}\,x^4$

   (e) $f(x) = -\dfrac{1}{9}\,x^4 + \dfrac{2}{3}\,x^2$

6. Der Graf der Funktion f und die Koordinatenachsen begrenzen eine Fläche vollständig. Berechnen Sie jeweils den Inhalt A dieser Fläche:

   (a) $f(x) = (x + 2)^2$

   (b) $f(x) = x^3 - 8$

   (c) $f(x) = -x^3 + 3\,x + 2$

   (d) $f(x) = -\sqrt{4 - x}$

   (e) $f(x) = e^x - 2$

7. Durch die Grafen der Funktionen f und g wird eine Fläche vollständig eingeschlossen. Berechnen Sie jeweils den Inhalt A dieser Fläche:

   (a) $f(x) = \dfrac{1}{4}\,x^2\ ,\ g(x) = -\dfrac{1}{2}\,x^2 + \dfrac{3}{2}\,x + 6$

   (b) $f(x) = \sqrt{2\,x}\ ,\ g(x) = \dfrac{1}{2}\,x^2$

   (c) $f(x) = x^3\ ,\ g(x) = -x^2 + 2\,x$

Kapitel 6

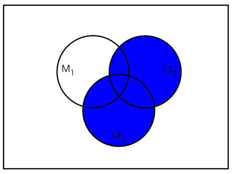
Lösungen

6.1 Lösungen zum Kapitel „Grundlegendes Rechnen“

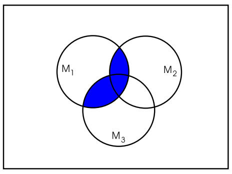
6.1.1 Lösungen zum Abschnitt „Mengen“

Aufgaben:

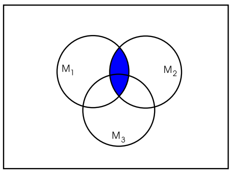
1.



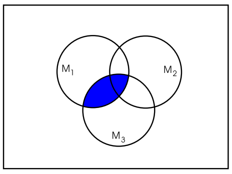
(a) $M_2 \cup M_3$



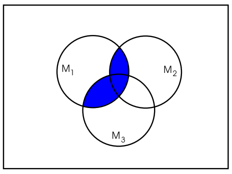
(b) $M_1 \cap (M_2 \cup M_3)$



(c) $M_1 \cap M_2$

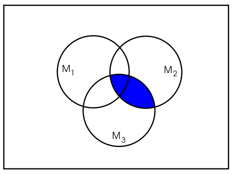


(d) $M_1 \cap M_3$

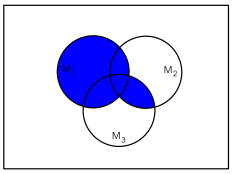


(e) $(M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3)$

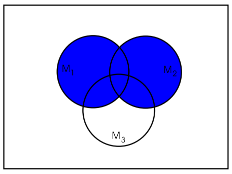
2.



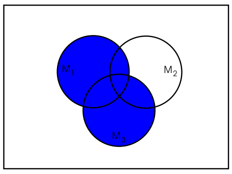
(a) $M_2 \cap M_3$



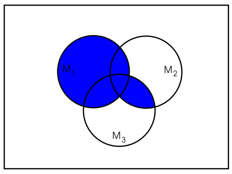
(b) $M_1 \cup (M_2 \cap M_3)$



(c) $M_1 \cup M_2$

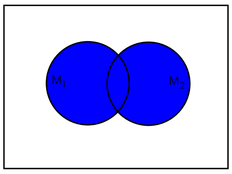


(d) $M_1 \cup M_3$

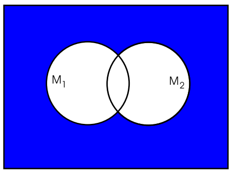


(e) $(M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3)$

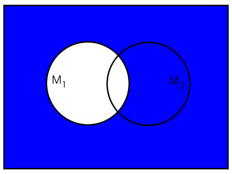
3.



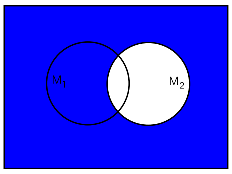
(a) $M_1 \cup M_2$



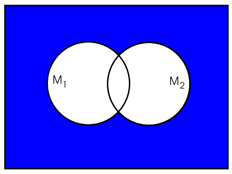
(b) $\overline{M_1 \cup M_2}$



(c) $\overline{M_1}$

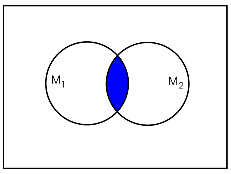


(d) $\overline{M_2}$

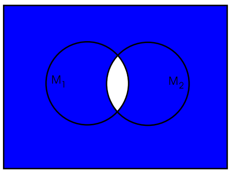


(e) $\overline{M_1} \cap \overline{M_2}$

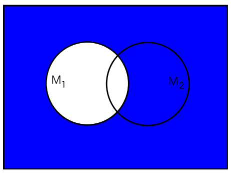
4.



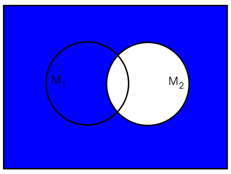
(a) $M_1 \cap M_2$



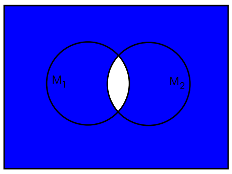
(b) $\overline{M_1 \cap M_2}$



(c) $\overline{M_1}$

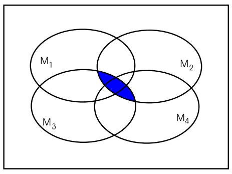


(d) $\overline{M_2}$

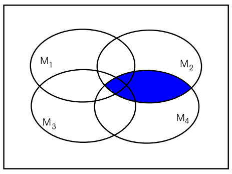


(e) $\overline{M_1} \cup \overline{M_2}$

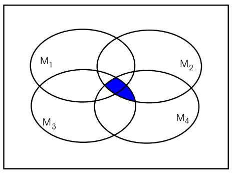
5.



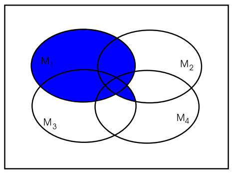
(a) $M_2 \cap M_3$



(b) $M_2 \cap M_4$



(c) $(M_2 \cap M_3) \cap (M_2 \cap M_4)$



(d) $M_1 \cup ((M_2 \cap M_3) \cap (M_2 \cap M_4))$

6. $\emptyset$, $\{1\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{10\}$, $\{1,4\}$, $\{1,5\}$, $\{1,10\}$, $\{4,5\}$, $\{4,10\}$, $\{ 5 , 10 \}$, $\{1,4,5\}$, $\{ 1, 4, 10 \}$, $\{1,5,10\}$, $\{4,5,10\}$, $\{1,4,5,10\}$.

7. $M_1 \cap \overline{M_2}$.

8. (a) $\{2,3,5,7,11,13,17,19\}$ (b) $\{23,24,27,29,30,31,33,36,37,39,41,42,43,45\}$.

9. $\{4\}$.

10. $M_1 = \{1,2,3,4,5\}$ und $M_2 = \{1,3,5\}$.

11. (a) $[-3,7)$ (b) $[1,3)$ (c) $[-3,1)$ (d) $[3,7)$

6.1.2 Lösungen zum Abschnitt „Grundlegende Rechenregeln“

Aufgaben:

1. (a) 255 (b) 759 (c) 1786 (d) 3087 (e) 13251 (f) 83600
2. (a) $a + b : (c - d \cdot e \cdot f)$ (b) $a \cdot b : (c \cdot d) + e + f$.
3. (a) $5\,x$ (b) $-2\,x$ (c) $5\,p$ (d) $3\,x - 5\,y$ (e) 0 (f) t (g) $-0.4\,y$
(h) $2.8\,x$ (i) $-0.7\,a$ (j) $-1.4\,z$ (k) $2\,a + 7$ (l) $-4\,e$ (m) $4\,a - b$ (n) $8\,x$
(o) $9\,a\,b$ (p) $x\,y$ (q) $-2\,m^3$ (r) $10\,x^2 - 5\,x$ (s) $y^2 - y$ (t) $-a\,b - 4\,a^2$
(u) $-9\,k^4$ (l) $m\,n + 2\,n + 8\,m$.
4. (a) 7.9 (b) $-3.2 - 2\,a + c$ (c) $10\,b^2 + 2\,a\,b$ (d) $5\,x + 7$ (e) $38\,c - 9\,d$
(f) $5\,a^3 - a^2\,b$ (g) $3.6\,a - 7.2\,b$ (i) $3\,a^2 + 5\,a + 4$ (j) $4\,u\,v$
5. (a) $3\,b + 2\,c$ (b) $4\,a + 2\,b + 3\,c$ (c) $3\,a + 4\,b + 3$ (d) $8\,a + 11\,b$
(e) $-a\,b + a^2 + a\,c$ (f) $a^2 + 54\,a\,b - 29\,b^2$ (g) $3 - 3\,a^2 + 4\,a$ (h) $a^2 - 2\,a\,c - b^2 + c^2$
(i) $60\,a^3 - 89\,a^2\,b - 23\,a\,b^2 + 42\,b^3$
6. (a) $5\,x + (7\,y - 3\,z)$ (b) $(7\,u + (-4\,v)) + ((-2\,u) + v)$ (c) zum Beispiel $2\,a + (3\,b - a)$
(d) zum Beispiel $6\,m + ((-p) - 5\,n) + (9\,n - 6\,m)$
7. (a) $-3\,x - 3\,y$ (b) $-21 + a$ (c) $6\,a + 7\,b$ (d) $-3\,x + 3\,y$ (e) $4\,a - 7\,b$
(f) $2\,a + 2\,b - c$ (g) $4\,x^2 + 6\,x$ (h) $-31\,c + 18\,d$ (i) $-2.6\,y - 0.7$
(j) $11.5\,u + 4\,v$ (k) $2.23\,a + 1.48\,b$ (l) $-15.6\,x + 25.7\,y$ (m) $-2.06\,a^2 + 11.7\,a\,b$
(n) 0
8. (a) $3\,a - (4\,b + 6)$ (b) $5\,x\,y - (-3\,x\,z - 7\,y\,z)$ (c) $(11\,v + 7\,w) - 4\,u^2$
9. (a) $3\,a - (4\,a - 5\,b)$ (b) $7\,x - (x - 3\,y)$ (c) $-3\,c - (c - 8\,d) - (8\,d - e)$
10. (a) $7\,x - (5\,y - 3\,z) = 7\,x - 5\,y + 3\,z$ (b) $-(7\,x + 5\,y) - 3\,z = -7\,x - 5\,y - 3\,z$
11. (a) $6\,x$ (b) $-2.6\,y$ (c) $0.1125\,z$ (d) 0 (e) $35\,a\,b$ (f) $-27\,x\,y$
(g) $18\,e\,f$ (h) $1.5\,x\,y$ (i) $6\,a\,b\,c$ (j) $-40\,x\,y\,z$ (k) $-8\,p\,q\,m$ (l) 0
(m) $-1.025\,k$ (n) $-5.4\,v$ (o) $-0.08\,u\,v$
12. (a) $7\,y$ (b) $-8\,x$ (c) -9 (d) $-6\,m\,n$
13. (a) $0.8\,a\,b\,c$ (b) $-3\,x\,y$ (c) $1.8\,x\,y$ (d) $4\,n^2$ (e) $-2\,a\,b$ (f) -3
(g) $-4 : r$ (h) $3\,x\,z$ (i) y (j) $(3\,a) : (2\,x)$ (k) $b : 2$ (l) $0.4\,y^2$
(m) $0.6\,d : c$ (n) $0.3\,u\,v^2$
14. (a) $2\,a - 6\,x$ (b) $-m\,n + 1$ (c) $s - s^2 : t - 3$ (d) $1 : (2\,b) + a : (10\,b) - 0.03\,a$
15. (a) $21\,x - 35\,y$ (b) $35\,u - 63\,v$ (c) $-1.5\,x^2 + 0.3\,x\,y$ (d) $9\,a^2 - 9\,a\,b + 9\,a\,c$
(e) $-21\,m^2 + 14\,n\,m - 35\,m$ (f) $-6\,a^2\,b - 3\,a\,c + 4\,a$ (g) $0.49\,x\,y + 0.07\,y - 0.28$
(h) $-9\,x + 7$ (i) $6\,y + x\,y$ (j) $-u\,w + v\,w$ (k) $14\,a\,b - 27\,a$ (l) $-14\,a - 44$
16. (a) $3\,(x + (-y)) - 1.5\,x = 1.5\,x - 3\,y$ (b) $7\,u\,(4\,u^2 - 7\,u + 8) = 28\,u^3 - 49\,u^2 + 56\,u$
(c) $5((-4\,x) - (-y)) + 2\,x - 3\,y = -18\,x + 2\,y$ (d) $5\,x + 15\,y - 10\,z = 5\,(x + 3\,y - 2\,z)$
(e) $8\,a^2 - 4\,a\,c - 8\,a\,d = 4\,a\,(2\,a - c - 2\,d)$
17. (a) $5\,(x + 6\,y)$ (b) $2\,(4\,m^2 + 8\,m\,n - 22\,m\,n^2)$, $4\,(2\,m^2 + 4\,m\,n - 11\,m\,n^2)$, $4\,m\,(2\,m + 4\,n - 11\,n^2)$, $-4\,m\,(-2\,m - 4\,n + 11\,n^2)$ (c) $7\,u\,v\,(-2\,u + 3 - 5\,v)$, $-7\,u\,v\,(2\,u - 3 + 5\,v)$

18. (a) $r\,s + r - 3\,s - 3$ (b) $6\,m\,x - 8\,m\,y + 3\,n\,x - 4\,n\,y$ (c) $10\,a^2 - 19\,a - 15$
(d) $37\,a - 5$ (e) $-x^2 + 3\,x + 4$ (f) $-9\,a^2 + b^2$ (g) $10\,a^2 - 13\,a\,b + 4\,b^2 - 6\,a\,c + 3\,b\,c$
(h) $-x^2\,y + x\,y^2 + 3\,x\,y\,z - 3\,y^2\,z - z\,x + z\,y$ (i) $2\,x^2 + 10\,x + 14$ (j) $17\,x + 13$

19. (a) $(y+4)\,(y+(-2))$ (b) $(z+3)\,(z-5)$ (c) $(2\,x+3)\,(x+4)$ (d) $(a+2)\,(a-2)$

20. (a) $(x+y)\,(m+10)$ (b) $(a-b)\,(7+u)$ (c) $(a+b)\,(c-2)$ (d) $(x+3)\,(x-3)$

21. (a) $a^2 - 6\,a\,b + 9\,b^2$ (b) $-1 + a^2$ (c) $-a^2 + b^2$ (d) 0 (e) $16\,a^4 + 16\,a^2 + 34\,a - 24$ (f) $4\,a^2\,b^2$ (g) $9\,a^2 + 12\,a\,b - 30\,a\,c + 4\,b^2 - 20\,b\,c + 25\,c^2$
(h) $a^2 + 2\,a\,b - 2\,a\,c - 2\,a\,d + b^2 - 2\,b\,c - 2\,b\,d + 2\,c\,d + c^2 + d^2$ (i) $(7\,a + 3)^2$
(j) $(5\,a + 4\,b)^2$ (k) $(13\,a - 5\,b)^2$ (l) $(3\,a^2\,b + 2)^2$ (m) $48\,a^2 - 16\,a\,b + b^2$
(n) $-175\,a^2 + 384\,a\,b - 144\,b^2$

6.1.3 Lösungen zum Abschnitt „Bruchrechnung“

<u>**Aufgaben:**</u>

1. (a) -2 (b) 1 (c) $\dfrac{a+1}{a}$ (d) $\dfrac{a+1}{b}$ (e) $\dfrac{-1}{a\,b}$ (f) $\dfrac{-b^2 - 3\,a^2}{a}$

2. (a) $\dfrac{67}{4}$ (b) $\dfrac{4985}{72}$ (c) $\dfrac{176}{81}$ (d) $\dfrac{41143}{15552}$ (e) $\dfrac{5\,a + 3\,b + 20\,c}{12}$ (f) $\dfrac{a+1}{72}$
(g) $\dfrac{7\,a - 24\,b}{96}$ (h) $\dfrac{1}{a}$ (i) $\dfrac{-2\,a\,b + 2\,a^2 - a^3 + 2\,b^2 - a\,b^2}{2\,a\,b}$ (j) 0 (k) $\dfrac{a^2 + b^2}{a\,b}$

3. (a) $\dfrac{3\,a^2 + 6\,a + 2}{a^3 + 3\,a^2 + 2\,a}$, $a \neq 0, -1, -2$ (b) $\dfrac{2\,a^2 + 4}{a^4 - 5\,a^2 + 4}$, $a \neq 2, 1, -1, -2$
(c) $\dfrac{2}{a^2 - 1}$, $a \neq 1, -1$ (d) $\dfrac{-2\,a^2 - 4\,a + 2}{a^4 - 2\,a^2 + 1}$, $a \neq 1, -1$ (e) $\dfrac{-1}{16\,a - 4}$, $a \neq \dfrac{1}{4}$
(f) $\dfrac{1}{a^2 - 5\,a + 6}$, $a \neq 2, 3$ (g) $\dfrac{-2\,a}{3\,a^2 + 5\,a + 2}$, $a \neq -1, -\dfrac{2}{3}$
(h) $\dfrac{-8\,a + 18}{a^3 - 6\,a^2 + 11\,a - 6}$, $a \neq 1, 2, 3$

4. (a) $\dfrac{b - a}{y^2 - x^2}$ (b) $\dfrac{25\,a}{6\,a^2 - 6}$ (c) $\dfrac{1}{(a+b)^2}$ (d) -3 (e) $\dfrac{1}{4\,a + 4\,b}$ (f) $\dfrac{-2}{3\,a}$
(g) 1 (h) $\dfrac{-3\,a + b}{2\,a\,b}$

5. (a) 1 (b) 1 (c) $\dfrac{b}{a}$ (d) 0 (e) $a^2 + 9\,b^2$ (f) $70\,a^2 - 72\,b^2 + 56\,c^2$
(g) $\dfrac{4\,a^2 - 9\,b^2}{6\,a\,b}$ (h) $\dfrac{9\,a^2 - 4\,b^2}{6\,a\,b}$ (i) $\dfrac{-5\,b - 7}{14\,a}$ (j) $\dfrac{a + 12\,a^2 - 1}{2}$ (k) $\dfrac{1}{a+1}$
(l) $\dfrac{9\,a - 24\,a\,b + 16\,a\,b^2}{25\,b^4 + 20\,a\,b^3 + 4\,a^2\,b^2}$

6. (a) $\dfrac{a^3 - 8\,b^3 - 4\,a\,b^2 + 2\,a^2\,b}{2\,a^2\,b}$ (b) $\dfrac{1 - a}{1 + a}$ (c) $\dfrac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$ (d) $a + b$ (e) a
(f) $\dfrac{1}{a - b}$ (g) $\dfrac{-2\,a\,b - a^2 + b^2}{2\,a\,b - a^2 + b^2}$ (h) $\dfrac{a + b}{a - 1}$ (i) $\dfrac{b - a}{a\,b}$ (j) $\dfrac{1}{2}$ (k) $\dfrac{b}{a^2}$
(l) $\dfrac{b}{a}$

7. (a) $5\,c$ (b) $17\,x$ (c) $-a$ (d) $x + y$ (e) $7\,b + 3\,a$ (f) $\dfrac{5\,a - 13\,b}{5}$
   (g) 2 (h) $\dfrac{a^2 + b^2}{a + b}$ (i) $\dfrac{-4\,a\,b}{a + b}$

6.1.4 Lösungen zum Abschnitt „Potenzen und Wurzeln“

Lösungen zum Abschnitt „Potenzen“

Aufgaben:

1. (a) a^{-4} (b) $-a^6$ (c) $-10\,a^2\,b$ (d) $x^4\,(9\,a + 2\,b)$ (e) $3\,(a - b)^2$
   (f) $(1 - a)^3$
2. (a) $9\,a^n\,x^7$ (b) a^{n+3} (c) $a^{2\,x+1}\,b^{2\,x+2}$ (d) $a^{2\,n-3\,x}\,b^{2\,x}\,x^{n+5}\,y^{n-2}$
   (e) $\dfrac{81}{4}\,x^{4\,a-3}\,y$ (f) $a^{x-3\,y}\,b^{-5\,m-1}$ (g) $\dfrac{9}{10}a^{-1}\,b\,x^{-1}\,c^{-1}\,y^2\,z$
   (h) $-4\,x^2\,a^3\,b^{-3}\,(a - 1)^{-1}$ (i) $\dfrac{32}{27}\,y^8\,x^{-6}$ (j) $\dfrac{15625}{3456}\,b^{13}\,y^{-5}\,x^{13}\,a^{-17}$
   (k) $\dfrac{15625}{3456}\,b^{13}\,y^{-17}\,x^{13}\,a^{-5}$ (l) $\dfrac{7}{10}\,z^{-2}$ (m) $a\,x^{-1}\,b^2\,c^{-1}\,z^{-2}$

Lösungen zum Abschnitt „Wurzeln“

Aufgaben:

1. (a) $\sqrt{160} = 4\,\sqrt{10}$ (b) $\sqrt[3]{51}$ (c) u (d) $a^2\,x^2$ (e) 3 (f) $\sqrt[3]{5}$ (g) 5
   (h) $\sqrt{72} = 3\,\sqrt{8}$ (i) x^2 (j) b (k) 2 (l) $\sqrt{\dfrac{125}{72}} = \dfrac{5}{3}\sqrt{\dfrac{5}{8}}$
2. (a) $a\,b^2$ (b) $a^{\frac{2}{3}}$ (c) $a\,b^{\frac{4}{3}}$ (d) $(a - b)\,(a + b)^{\frac{4}{3}}$ (e) $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ (f) $a^{\frac{1}{12}}\,b^{\frac{-1}{12}}$
   (g) $a^{\frac{13}{8}}$ (h) $a^{\frac{3}{8}}$ (i) a^{-1}
3. (a) $x^{\frac{-13}{9}}$ (b) $y^{\frac{3}{2}}\,x^{\frac{-1}{2}}$ (c) $a^{\frac{5}{7}}\,b^{\frac{4}{7}}$ (d) $12 - 4\,\sqrt{5}$ (e) $\dfrac{48\,\sqrt{5} + 32\,\sqrt{7}}{17}$
   (f) $\sqrt{3}$ (g) $\dfrac{19 - 3\,\sqrt{30}}{7}$

6.1.5 Lösungen zum Abschnitt „Logarithmen“

Aufgaben:

1. (a) $\lg(a\,(a + b)^n\,(a - b)^n)$ (b) $\lg(a\,b^{\frac{-1}{2}}\,c^{\frac{4}{3}})$ (c) $\lg((a^2 - b^2)^{\frac{-1}{6}})$
   (d) $\lg((a^2 - b^2)^{\frac{1}{6}}\,b^{\frac{-1}{3}})$ (e) $\dfrac{1}{6}\,\lg(a^2 - b^2)$ (f) $\lg(a^{\frac{1}{3}}\,b\,c^{-2}\,d)$ (g) $\ln(a)$
2. (a) $\dfrac{-1}{4}\,\log(u)$ (b) $\log(2) + \log(a) + \dfrac{3}{2}\,log(b) - \dfrac{5}{2}\,log(c)$ (c) $\log(u^2 + v^2)$
   (d) $\dfrac{1}{2}$ (e) $\ln(a^2 - b^2) - 2\,\ln(a^2 + b^2)$

6.2 Lösungen zum Kapitel „Gleichungen“

6.2.1 Lösungen zum Abschnitt „Einfache Gleichungen“

Aufgaben:

1. (a) 8 (b) 8 (c) 42 (d) -8 (e) -2.4 (f) 8 (g) 0 (h) 2.4
   (i) -9.4 (j) 8

2. (a) 15 (b) -6 (c) 3 (d) 4 (e) -1 (f) -2 (g) 1.1 (h) 100
   (i) -3 (j) 50

3. (a) 2 (b) 4 (c) 2 (d) 9 (e) 2 (f) 6 (g) 24 (h) 4 (i) 4 (j) 1
   (k) 1 (l) 0.3 (m) 0.85 (n) 0.625 (o) $\dfrac{3}{10}$ (p) 17

6.2.2 Lösungen zum Abschnitt „Quadratische Gleichungen“

Aufgaben:

1. (a) ± 3 (b) 0 (c) ± 4 (d) ± 2 (e) 0 (f) ± 4 (g) $\emptyset$ (h) $\dfrac{\pm 1}{\sqrt{2}}$
   (i) $0, \dfrac{1}{4}$ (j) $0, -9$ (k) $0, 9$ (l) $0, 14$

2. (a) $(2\,a - 3) + (3\,b - 4) = 25$ (b) $(4\,a - 16)^2 + (5\,b + 5)^2 = 281$
   (c) $(\sqrt{3}\,a - \sqrt{2})^2 - (\sqrt{2}\,b - \sqrt{3})^2 = -1$ (d) $(2\,x + 3\,y)^2 - (3\,a - 2\,b)^2 = 9\,y^2 - 4\,b^2$

3. (a) $2, -7$ (b) $-1, -11$ (c) ± 12 (d) -4 (e) $10, -4$ (f) $6, -5$
   (g) $\pm \dfrac{\sqrt{61}}{12}$ (h) $0, 10$ (i) $\dfrac{1}{6} \pm \dfrac{\sqrt{241}}{6}$

4. (a) $5, 7$ (b) $2, 9$ (c) $-5, 3$ (d) $-3, 6$ (e) $-3, -2$

5. (a) 4 (b) $-7, 8$ (c) $3, 7$ (d) $-13, -11$ (e) $-6, 7$

6. (a) $-2, 5$ (b) $-4, 3$ (c) $-10, 10$ (d) -5 (e) $0, 12$

7. (a) ± 1 (b) $\emptyset$ (c) 1 (d) $\dfrac{-24}{13}, 3$ (e) $\dfrac{-7}{9}, 7$ (f) $\dfrac{7}{2} \pm \dfrac{\sqrt{73}}{2}$ (g) $\dfrac{-14}{5}, \dfrac{1}{3}$
   (h) $\dfrac{-47}{10}, -1$ (i) -2 (j) 2 (k) $\dfrac{1}{2}, 1$ (l) $-7, 4$ (m) $\dfrac{-11}{7}, 2$ (n) 2

8. (a) $\dfrac{9}{2} \pm \dfrac{\sqrt{41}}{2}$ (b) $-5, 4$ (c) $\dfrac{-11}{5}, 6$ (d) $-3, \dfrac{2}{3}$

6.2.3 Lösungen zum Abschnitt „Wurzelgleichungen“

Aufgaben:

1. (a) $\frac{3}{5}$ (b) 2 (c) 16 (d) 4 (e) $\emptyset$ (f) 7
2. (a) 0, 25 (b) 9 (c) -1 (d) 4 (e) 1 (f) 4, 9 (g) $\emptyset$ (h) 4 (i) $\frac{1}{4}$
3. (a) 5 (b) $-3, 5$ (c) -2 (d) 2 (e) 13 (f) 5 (g) $\frac{21}{4}$ (h) $\frac{1}{2}, 1$
4. (a) 2 (b) 3 (c) 2 (d) 16

6.2.4 Lösungen zum Abschnitt „Exponential- und Logarithmusgleichungen“

Aufgaben:

1. (a) 104 (b) -1.769858 (c) 0.6581139 (d) ± 32 (e) 2.63901582
   (f) 6.65685425 (g) 0.2807769 (h) -312
2. (a) 2.047818584 (b) 3.783271062 (c) 0.787766061 (d) 6.229213301
   (e) 0.368482797 (f) -0.8340437672 (g) 2.235069098 (h) $\emptyset$
3. (a) 3 (b) 4 (c) ± 3 (d) 1, 10 (e) 26.17003393 (f) 13742689.53
4. (a) 5.788920482 (b) -8 (c) $-\frac{1}{5}$ (d) 1.135882568 (e) $\emptyset$ (f) -1
   (g) -1.73144352 (h) 0 (i) 1 (j) $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ (k) $\frac{1}{2}, 2$ (l) 3.797097677

6.2.5 Lösungen zum Abschnitt „Lineare Gleichungssysteme“

Aufgaben:

1. (a) $x = 7, y = 5$ (b) $x = 14, y = 7$ (c) $x = 2, y = -1$ (d) $x = 3, y = 2$
   (e) $x = \frac{27}{11}, y = \frac{26}{11}$ (f) $x = \frac{1}{26}, y = \frac{5}{26}$ (g) $\emptyset$ (h) $x = 12, y = 15$
   (i) $x = \frac{13}{18}, y = \frac{17}{24}$ (j) $\emptyset$ (k) $x = -4, y = -5$ (l) $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}$
   (m) $x = 2.123, y = 0.521$ (n) $x = 0.386, y = 0.196$ (o) $x = -3, y = 2$
2. (a) $x = 3, y = 4$ (b) $x = \frac{15}{2}, y = \frac{-1}{2}$ (c) $x = -1, y = 14$
   (d) $x = 6, y = 1$ (e) $x = 3, y = 3$ (f) $x = 0, y = \frac{-1}{3}$
   (g) $x = -16, y = -19$ (h) $x = \frac{37}{4}, y = \frac{23}{16}$ (i) $x = 1, y = \frac{-4}{5}$
   (j) $x = -11, y = 4$
   (k) $x = -1, y = 1$ (l) $x = 10, y = 20$

3. (a) $x = \frac{6}{5}, y = \frac{-2}{5}$ (b) $x = \frac{23}{25}, y = \frac{-3}{25}$ (c) $x = -3, y = -7$
   (d) $x = 7, y = 11$ (e) $x = 7, y = 5$ (f) $x = \frac{-14}{5}, y = \frac{-33}{25}$

4. (a) $x = 6, y = 5, z = 7$ (b) $x = 1, y = 2, z = 3$ (c) $x = \frac{7}{3}, y = \frac{-2}{3}, z = \frac{-7}{3}$
   (d) $x = 1, y = 1, z = -2, u = 3$ (e) $x = \frac{-4}{3} - \frac{2}{3}z, y = \frac{7}{3} - \frac{1}{3}z$
   (f) $x = 16 - 5z, y = -10 + 4z$ (g) $x = -1, y = 1, z = 4$

6.2.6 Lösungen zum Abschnitt „Ungleichungen“

Aufgaben:

1. (a) $(2\,,\infty)$ (b) $(-\infty\,, -3)$ (c) $(1\,,\infty)$ (d) $(\frac{9}{10}\,,\infty)$ (e) $(3\,,\infty)$
   (f) $[6\,,\infty)$

2. (a) $(-\infty\,, \frac{7}{2})$ (b) $(\frac{-3}{2}\,,\infty)$ (c) $(-\infty\,, 2]$ (d) $(1\,,\infty)$ (e) $[-3\,,\infty)$
   (f) $(4\,,\infty)$ (g) $(\frac{-2}{3}\,,\infty)$ (h) $(-\infty\,, 0)$

3. (a) $(-\infty\,, -3] \cup [-1\,,\infty)$ (b) $(-\infty\,, 0.5] \cup [4\,,\infty)$ (c) $(\frac{-11}{12}\,, \frac{-1}{2}) \cup (2\,,\infty)$
   (d) $(-\infty\,, \frac{-3}{4}] \cup (1\,,\infty)$

4. (a) $(4\,,\infty)$ (b) $(-\infty\,, -5)$ (c) $[-7\,, \frac{21}{44})$ (d) $\emptyset$ (e) $(-3\,,\infty)$ (f) $\emptyset$

5. (a) $[-4\,, 1]$ (b) $(-3.5\,, 0.5)$ (c) $(0\,, -1]$

6. (a) $(-2\,, 0)$ (b) $(0\,, 2)$ (c) $(0\,, \frac{1}{2})$ (d) $(-\infty\,, -2) \cup (0\,,\infty)$ (e) $(-\infty\,, \frac{5}{8}) \cup$
   $(2\,,\infty)$ (f) $(1\,, 2)$ (g) $(-\infty\,, 0) \cup (1\,,\infty)$ (h) $(-2\,, 1]$ (i) $(-\infty\,, \frac{-5}{2})$

6.2.7 Lösungen zum Abschnitt „Beträge“

Aufgaben:

1. (a) $(2\,, 8)$ (b) $(-\infty\,, \frac{-7}{4}) \cup (\frac{3}{4}\,,\infty)$ (c) $(-4\,, 6)$ (d) $-9, 5$ (e) $\frac{1}{4}, \frac{7}{2}$
   (f) $-3, 5, 1 \pm \sqrt{2}$ (g) $-2, 4$ (h) $(-\infty\,, \frac{1}{5}) \cup (9\,,\infty)$ (i) $(0\,, 6)$
   (j) $(-\infty\,, 1] \cup [5\,,\infty)$ (k) $\emptyset$ (l) $(0\,, 1) \cup (1\,, 3)$ (m) $(\frac{9}{8}\,, 2) \cup (2\,,\infty)$
   (n) $(-1\,, \frac{-1}{3}]$

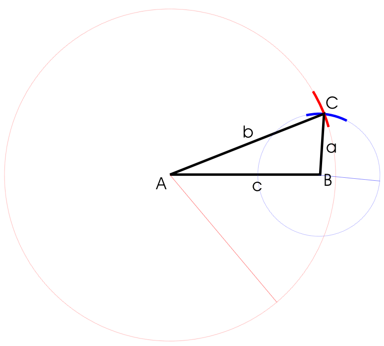
6.3 Lösungen zum Kapitel „Trigonometrie“

6.3.1 Lösungen zum Abschnitt „Dreiecke“

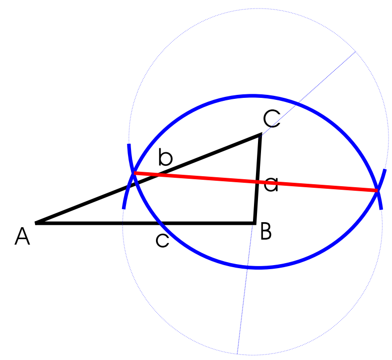
Aufgaben:

1. (a) 0.2617993878 (b) 3.92699 (c) 1.832595 (d) 4.843288674 (e) 0.5460941304
   (f) 22.5° (g) 15° (h) 297.3650957° (i) 12.60507149° (j) 57.29577951°

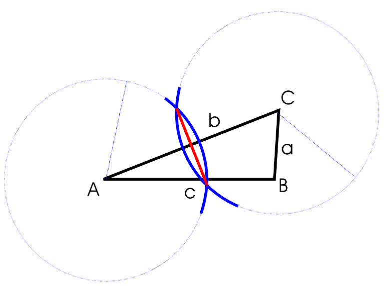
2.



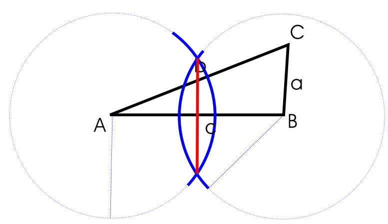
(a) Konstruktion des Dreiecks



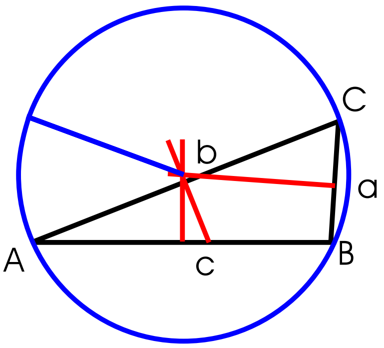
(b) Konstruktion der Mittelsenkrechten auf a



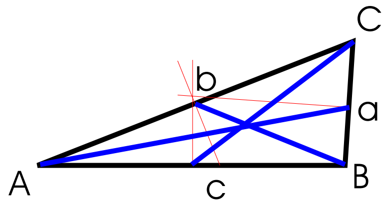
(c) Konstruktion der Mittelsenkrechten auf b



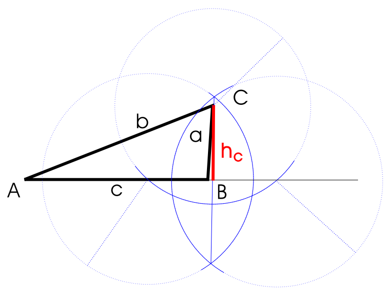
(d) Konstruktion der Mittelsenkrechten auf c



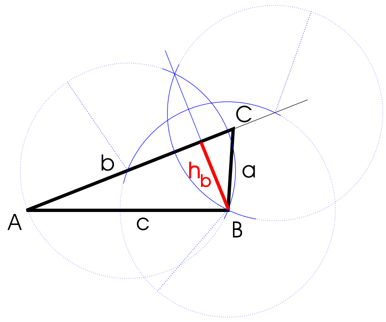
(e) Konstruktion des Umkreises



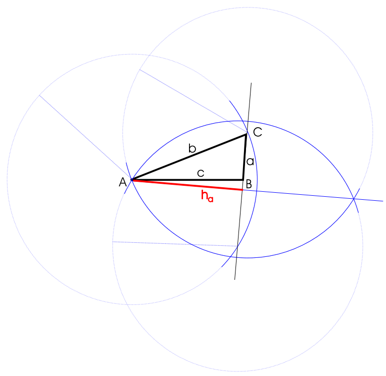
(f) Konstruktion der Seitenhalbierenden



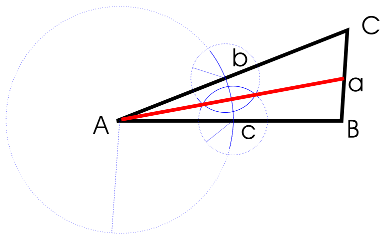
(g) Konstruktion der Höhe h_c



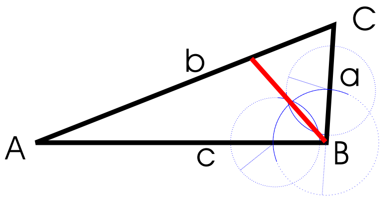
(h) Konstruktion der Höhe h_b



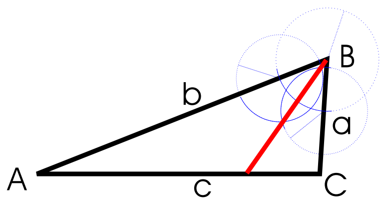
(i) Konstruktion der Höhe h_a



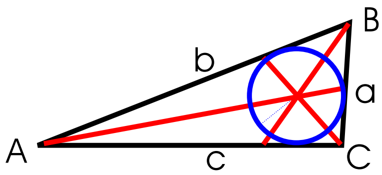
(j) Konstruktion der Winkelhalbierenden des Winkels α



(k) Konstruktion der Winkelhalbierenden des Winkels β



(l) Konstruktion der Winkelhalbierenden des Winkels γ



(m) Konstruktion des Inkreises

6.3.2 Lösungen zum Abschnitt „Trigonometrische Funktionen“

Aufgaben:

1. (a) $a = 6\,cm$, $b = 2.5\,cm$, $c = 6.5\,cm$, $\alpha = 67.4°$, $\beta = 22.6°$, $\gamma = 90°$
   (b) $a = 280\,m$, $b = 360\,m$, $c = 456.07\,m$, $\alpha = 37.9°$, $\beta = 52.1°$, $\gamma = 90°$
   (c) $a = 24.8\,m$, $b = 34.2\,m$, $c = 42.26\,m$, $\alpha = 35.9°$, $\beta = 54.1°$, $\gamma = 90°$
   (d) $a = 47\,m$, $b = 36.7\,m$, $c = 59.6\,m$, $\alpha = 52°$, $\beta = 38°$, $\gamma = 90°$ (e) $a = 47.1\,m$, $b = 24.5\,m$, $c = 53.1\,m$, $\alpha = 62.5°$, $\beta = 27.5°$, $\gamma = 90°$ (f) $a = 120\,m$, $b = 138\,m$, $c = 182.9\,m$, $\alpha = 41°$, $\beta = 49°$, $\gamma = 90°$ (g) $a = 3.4\,km$, $b = 5.4\,km$, $c = 6.4\,km$, $\alpha = 32°$, $\beta = 58°$, $\gamma = 90°$ (h) $a = 15.8\,m$, $b = 18.46\,m$, $c = 24.3\,m$, $\alpha = 40.6°$, $\beta = 49.4°$, $\gamma = 90°$ (i) $a = 40.55\,cm$, $b = 39.2\,cm$, $c = 56.4\,cm$, $\alpha = 46°$, $\beta = 44°$, $\gamma = 90°$

2. (a) $a = 6\,cm$, $b = 8\,cm$, $c = 10\,cm$, $\alpha = 36.9°$, $\beta = 53.1°$, $\gamma = 90°$, $p = 3.6\,cm$, $q = 6.4\,cm$, $h_c = 4.8\,cm$ (b) $a = 4.27\,m$, $b = 4.5\,m$, $c = 6.2\,m$, $\alpha = 43.5°$, $\beta = 46.5°$, $\gamma = 90°$, $p = 2.9\,m$, $q = 3.3\,m$, $h_c = 3.1\,m$ (c) $a = 8\,m$, $b = 15.04\,m$, $c = 17.04\,m$, $\alpha = 28°$, $\beta = 62°$, $\gamma = 90°$, $p = 3.76\,m$, $q = 13.3\,m$, $h_c = 7.06\,m$
   (d) $a = 11.41\,cm$, $b = 3.71\,cm$, $c = 12\,cm$, $\alpha = 72°$, $\beta = 18°$, $\gamma = 90°$, $p = 10.85\,cm$, $q = 1.15\,cm$, $h_c = 3.53\,cm$ (e) $a = 9.61\,m$, $b = 10.86\,m$, $c = 14.5\,m$, $\alpha = 41.5°$, $\beta = 48.5°$, $\gamma = 90°$, $p = 6.37\,m$, $q = 8.13\,m$, $h_c = 7.2\,m$ (f) $a = 14\,cm$, $b = 25.8\,cm$, $c = 29.35\,cm$, $\alpha = 28.5°$, $\beta = 61.5°$, $\gamma = 90°$, $p = 6.68\,cm$, $q = 22.68\,cm$, $h_c = 12.31\,cm$

3. (a) $a = 58.6\,m$, $b = 58.6\,m$, $c = 55.02\,m$, $\alpha = 62°$, $\beta = 62°$, $\gamma = 56°$, $h_c = 51.74\,m$, Flächeninhalt $= 1423.44\,m^2$ (b) $a = 45.2\,m$, $b = 45.2\,m$, $c = 68.23\,m$, $\alpha = 41°$, $\beta = 41°$, $\gamma = 98°$, $h_c = 29.65\,m$, Flächeninhalt $= 1011.58\,m^2$
   (c) $a = 77.13\,m$, $b = 77.13\,m$, $c = 124.8\,m$, $\alpha = 36°$, $\beta = 36°$, $\gamma = 108°$, $h_c = 45.34\,m$, Flächeninhalt $= 2829\,m^2$ (d) $a = 7.63\,m$, $b = 7.63\,m$, $c = 9.76\,m$, $\alpha = 50.25°$, $\beta = 50.25°$, $\gamma = 79.5°$, $h_c = 5.87\,m$, Flächeninhalt $= 28.63\,m^2$

(e) $a = 65.4\,m$, $b = 65.4\,m$, $c = 54.7\,m$, $\alpha = 65.28°$, $\beta = 65.28°$, $\gamma = 49.44°$, $h_c = 59.41\,m$, Flächeninhalt $= 1624.77\,m^2$

4. (a) Flächeninhalt $= 69.28\,cm^2$ (b) Flächeninhalt $= 73.72\,m^2$

5.
$$\tan(\alpha) = \frac{sin(\alpha)}{\sqrt{1 - \sin^2(\alpha)}}\ ,\ \tan(\alpha) = \frac{\sqrt{1 - \cos^2(\alpha)}}{\cos(\alpha)}\ ,\ \frac{3}{\sqrt{7}}$$

6.
$$\sin(\alpha) = \frac{\tan(\alpha)}{\sqrt{1 + \tan^2(\alpha)}}\ ,\ \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{28}}$$

7.
$$\cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(\alpha)}}\ ,\ \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$$

8. (a) $\sin(\alpha)$ (b) $\cos(\alpha)$ (c) $\sin(\alpha)$ (d) $\dfrac{1}{\sin(\alpha)}$ (e) $\dfrac{1}{\sin(\alpha)} - \sin(\alpha)$
(f) $1 + \tan^2(\alpha)$ (g) $\sin(\alpha)$ (h) $\dfrac{1}{\cos(\alpha)}$

9. (a) $a = 4.5\,cm$, $b = 5.7\,cm$, $c = 5.36\,cm$, $\alpha = 47.89°$, $\beta = 70°$, $\gamma = 62.1°$ (b) $a = 4\,cm$, $b = 8.33\,cm$, $c = 5\,cm$, $\alpha = 19.8°$, $\beta = 135.2°$, $\gamma = 25°$ (c) $a = 4.07\,cm$, $b = 6.8\,cm$, $c = 6.2\,cm$, $\alpha = 36.1°$, $\beta = 80°$, $\gamma = 63.9°$ (d) $a = 7.5\,cm$, $b = 5\,cm$, $c = 4.14\,cm$, $\alpha = 110°$, $\beta = 38.8°$, $\gamma = 31.2°$ (e) $a = 3.7\,cm$, $b = 9\,cm$, $c = 5.8\,cm$, $\alpha = 14.8°$, $\beta = 141.5°$, $\gamma = 23.7°$ (f) $a = 6.6\,cm$, $b = 3.6\,cm$, $c = 8\,cm$, $\alpha = 54.6°$, $\beta = 26.4°$, $\gamma = 99°$

10. (a) $\beta_1 = 64.7°$, $\gamma_1 = 80.3°$, $c_1 = 5.67\,cm$; $\beta_2 = 115.3°$, $\gamma_2 = 29.7°$, $c_2 = 2.85\,cm$
(b) $\alpha_1 = 68.8°$, $\gamma_1 = 81.2°$, $a_1 = 7.83\,cm$; $\alpha_2 = 51.2°$, $\gamma_2 = 98.8°$, $a_2 = 6.54\,cm$
(c) $\alpha_1 = 51.4°$, $\beta_1 = 95.1°$, $b_1 = 10.83\,cm$; $\alpha_2 = 128.6°$, $\beta_2 = 17.9°$, $b_2 = 3.35\,cm$
(d) $\alpha_1 = 56.8°$, $\beta_1 = 73.2°$, $a_1 = 6.11\,cm$; $\alpha_2 = 23.2°$, $\beta_2 = 106.8°$, $a_2 = 2.89\,cm$
(e) $\alpha_1 = 75.5°$, $\gamma_1 = 50.5°$, $c_1 = 5.34\,cm$; $\alpha_2 = 104.5°$, $\gamma_2 = 21.5°$, $c_2 = 2.53\,cm$
(f) $\alpha_1 = 66.1°$, $\beta_1 = 64.9°$, $a_1 = 6.06\,cm$; $\alpha_2 = 15.9°$, $\beta_2 = 115.1°$, $a_2 = 1.82\,cm$

11. (a) $\alpha = 41.4°$, $\beta = 55.8°$, $\gamma = 82.8°$ (b) $\alpha = 26.4°$, $\beta = 117.3°$, $\gamma = 36.3°$
(c) $\alpha = 102.4°$, $\beta = 31.4°$, $\gamma = 46.2°$ (d) $\alpha = 64.1°$, $\beta = 71.7°$, $\gamma = 44.2°$

12. $4\cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha)$

13. (a) $\dfrac{\sqrt{6}}{3} + \dfrac{1}{6}$ (b) $\dfrac{\sqrt{6}}{3} - \dfrac{1}{6}$ (c) $\dfrac{\sqrt{3}}{6} - \dfrac{\sqrt{2}}{3}$ (d) $\dfrac{\sqrt{3}}{6} + \dfrac{\sqrt{2}}{3}$ (e) $\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$
(f) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (g) $\dfrac{-7}{9}$ (h) $\dfrac{1}{2}$

14. (a) $2\cos(45°)\cos(\alpha)$ (b) $2\sin(60°)\cos(\alpha)$ (c) $-2\sin(60°)\sin(\alpha)$ (d) $\cos(\alpha)\cos(\beta)$

15.

$$
\begin{aligned}
\tan(\alpha + \beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} \\
&= \frac{\sin(\alpha)\,\cos(\beta) + \sin(\beta)\,\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)\,\cos(\beta) - \sin(\alpha)\,\sin(\beta)} \\
&= \frac{\frac{\sin(\alpha)\,\cos(\beta)}{\cos(\alpha)\,\cos(\beta)} + \frac{\sin(\beta)\,\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)\,\cos(\beta)}}{1 - \frac{\sin(\alpha)\,\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\,\cos(\beta)}} \\
&= \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\,\tan(\beta)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tan(\alpha - \beta) &= \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} \\
&= \frac{\sin(\alpha)\,\cos(\beta) - \sin(\beta)\,\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)\,\cos(\beta) + \sin(\alpha)\,\sin(\beta)} \\
&= \frac{\frac{\sin(\alpha)\,\cos(\beta)}{\cos(\alpha)\,\cos(\beta)} - \frac{\sin(\beta)\,\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)\,\cos(\beta)}}{1 + \frac{\sin(\alpha)\,\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\,\cos(\beta)}} \\
&= \frac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha)\,\tan(\beta)}
\end{aligned}
$$

$$\tan(75^\circ) = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}\,,\ \tan(15^\circ) = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

16. (a) $\frac{12}{5}$ (b) $\frac{4}{3}$ (c) $\frac{-56}{27}$ (d) $\frac{16}{63}$

17.

$$\tan(2\,\alpha) = \frac{2\,\tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}$$

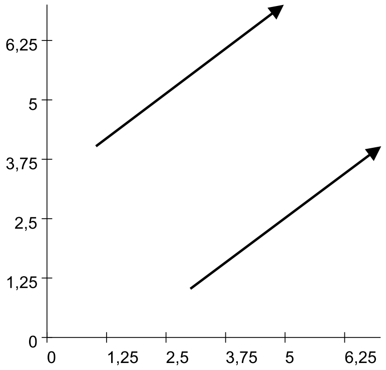
6.4 Lösungen zum Kapitel „Vektoren“

6.4.1 Lösungen zum Abschnitt „Grundlagen“

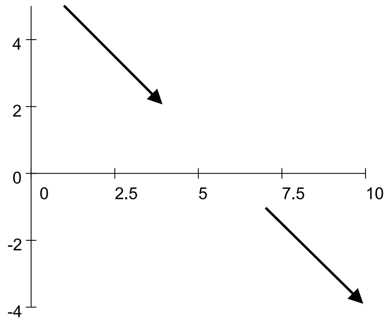
Aufgaben:

1. (a) $\vec{AD}$ (b) $\vec{CG}, \vec{AE}, \vec{BF}$ (c) $\vec{FE}$ (d) $\vec{BG}$ (e) $\vec{AB}$ (f) keiner
   Die Pfeile $\vec{AB}$ und $\vec{FE}$ gehören zu Vektoren, deren Richtungen entgegengesetzt sind.

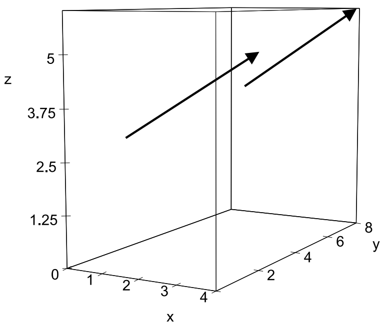
2. (a) $Q(5|7)$ (b) $Q(10|-4)$ (c) $Q(4|8|6)$



(n) (a)



(o) (b)

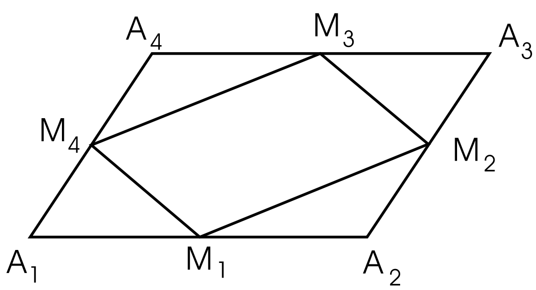


(p) (c)

3. (a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ (b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$ (c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ (d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1.5 \end{pmatrix}$

4. (a) $Q = (3|6|3)$ (b) $Q = (0|7|-1)$ (c) $P = (6|3|1)$ (d) $P = (-1|-3|-2)$

5.

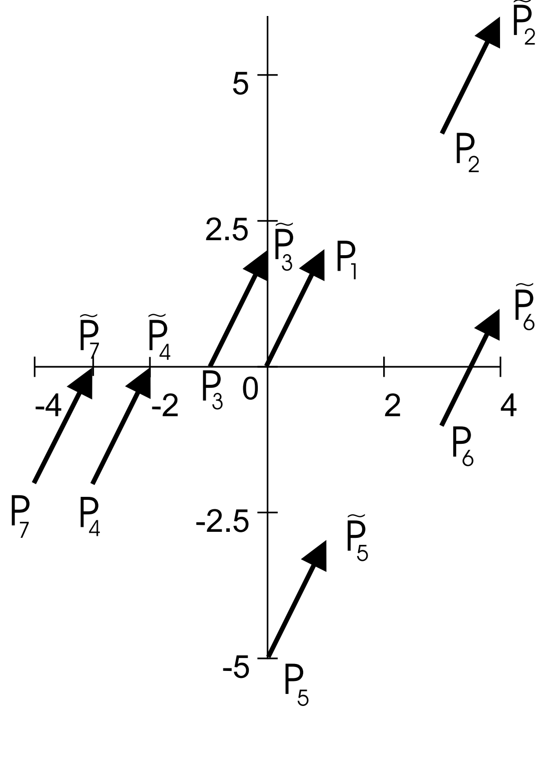


Folgende Gleichheiten bestehen:
$\vec{a} = \overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{A_4A_3}$, $\vec{b} = \overrightarrow{A_2A_1} = \overrightarrow{A_3A_4}$
$\vec{c} = \overrightarrow{A_1A_4} = \overrightarrow{A_2A_3}$, $\vec{d} = \overrightarrow{A_4A_1} = \overrightarrow{A_3A_2}$
$\vec{e} = \overrightarrow{A_1M_1} = \overrightarrow{M_1A_2} = \overrightarrow{A_4M_3} = \overrightarrow{M_3A_3}$

$\vec{f} = \overrightarrow{M_1A_1} = \overrightarrow{A_2M_1} = \overrightarrow{M_3A_4} = \overrightarrow{A_3M_3}$
$\vec{g} = \overrightarrow{A_1M_4} = \overrightarrow{M_4A_4} = \overrightarrow{A_2M_2} = \overrightarrow{M_2A_3}$
$\vec{h} = \overrightarrow{M_4A_1} = \overrightarrow{A_4M_4} = \overrightarrow{M_2A_2} = \overrightarrow{A_3M_2}$
$\vec{i} = \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_4M_3}$, $\vec{j} = \overrightarrow{M_2M_1} = \overrightarrow{M_3M_4}$
$\vec{k} = \overrightarrow{M_1M_4} = \overrightarrow{M_2M_3}$, $\vec{l} = \overrightarrow{M_4M_1} = \overrightarrow{M_3M_2}$
Entgegengesetzte Vektoren sind:
$\vec{a}$ und $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$, $\vec{e}$ und $\vec{f}$, $\vec{g}$ und $\vec{h}$, $\vec{i}$ und $\vec{j}$, $\vec{k}$ und $\vec{l}$
Vektoren mit gleichen Beträgen:
$|\vec{a}| = |\vec{b}|$, $|\vec{c}| = |\vec{d}|$, $|\vec{e}| = |\vec{f}|$, $|\vec{g}| = |\vec{h}|$, $|\vec{i}| = |\vec{j}|$, $|\vec{k}| = |\vec{l}|$

6. 6 unterschiedliche Verschiebungen durch die Kanten, 12 unterschiedliche Verschiebungen durch die Diagonalen der Seitenflchen, 8 unterschiedliche Verschiebungen durch die Raumdiagonalen und die identische Abbildung des Raumes: 27.

7. $\tilde{P}_2(4|6)$, $\tilde{P}_3(0|2)$, $\tilde{P}_4(-2|0)$, $P_5(0|-5)$, $\tilde{P}_6(3|-1)$, $P_7(-4|-2)$.



8. (a) $-\vec{c}$ (b) $\vec{m}$ (c) $\vec{r} - \vec{s}$ (d) $\vec{0}$

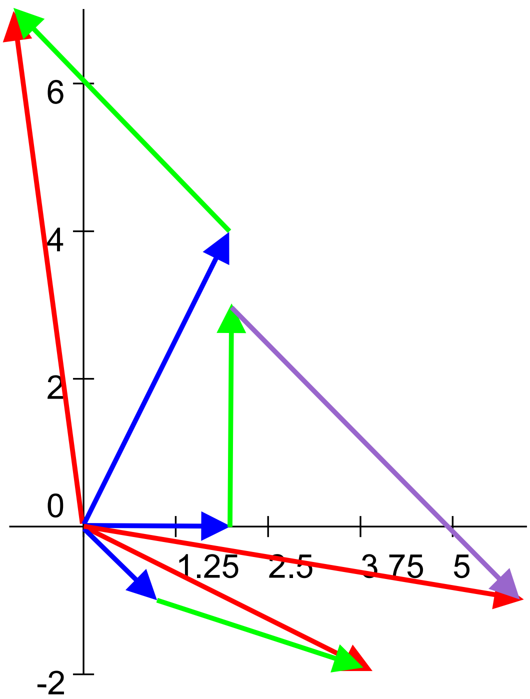
9. (a) $\vec{x} = \frac{1}{2}\vec{s}$ (b) $\vec{x} = \vec{d} - \vec{r}$

10. (a) $\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ (d) nicht möglich

11. $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$, (a) $\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}$ (g) $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ (h) $\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}$ Beim Vergleich der Vektoren von (a) und (e) bzw. (d) und (f) zeigt sich die Kommutativität bzw. Assoziativität der Addition von Vektoren.

12. (a) $\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}$ (d) nicht möglich (e) $\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (g) $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$ (h) $\begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}$ (i) $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

13. (a) $\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$



14. (a) $a = \pm 1$ (b) $a = \pm\sqrt{\frac{1}{5}}$ (c) $a = 0$ (d) $a = \pm 1$

15. $\sqrt{51}$ bzw. $\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$

16. (a) $2\,\vec{b}$ (b) $\frac{-5}{6}\,\vec{a} - \frac{5}{4}\,\vec{b}$ (c) $\frac{5}{12}\,\vec{x} + \frac{1}{2}\,\vec{y}$ (d) $\frac{7}{10}\,\vec{b}$ (e) $\begin{pmatrix} -29 \\ 46 \end{pmatrix}$

17. (a) $\vec{a_1} + \vec{a_2}$ (b) $2\,\vec{a_1} - 2\,\vec{a_2}$ (c) $3\,\vec{a_1} - 2\,\vec{a_2}$ (d) $-3\,\vec{a_1} + 2\,\vec{a_2}$

18. (a) 0 (b) -104 (c) 2 (d) -50 (e) 27

19. (a) 11.59 (b) 0 (c) -8.49 (d) -0.26

20. (a) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $y = 3x - 1$
    (b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $y = 5x - 11$
    (c) $\vec{x} = t \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix}$, $y = -2x$
    (d) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix}$, $y = \frac{-3}{7}x + \frac{25}{7}$
    (e) $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1.5 \\ 2 \end{pmatrix}$, $y = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}$

21. (a) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0.5 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -0.5 \\ -2 \end{pmatrix}$ (c) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ (d) $\vec{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

22. (a) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A \in g$, $B \notin g$, $C \in g$
    (b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A \in g$, $B \in g$, $C \notin g$
    (c) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $A \notin g$, $B \in g$, $C \in g$

23. Es reicht zu zeigen, dass jeweils zwei Punkte beide Gleichungen erfüllen:
    (a) Die Punkte $P(1|6)$ und $Q(3|14)$ erfüllen beide Gleichungen.
    (b) Der Punkt $P(3|4)$ erfüllt nur eine der Gleichungen, damit gehören beide Gleichungen zu verschiedenen Geraden. (c) Die Punkte $P(1|3)$ und $Q(3|-1)$ erfüllen beide Gleichungen.
    (c) Die Punkte $P(3|0|1)$ und $Q(2|-1|3)$ erfüllen beide Gleichungen.

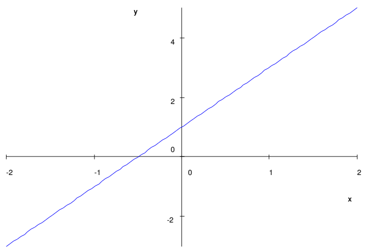
24. (a) $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ (b) $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ (c) $\vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

6.5 Lösungen zum Kapitel „Differential- und Integralrechnung“

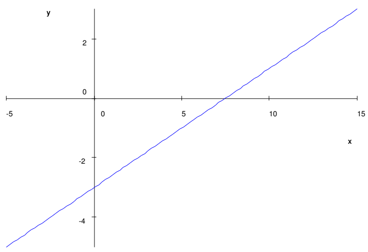
6.5.1 Lösungen zum Abschnitt „Funktionen“

Aufgaben:

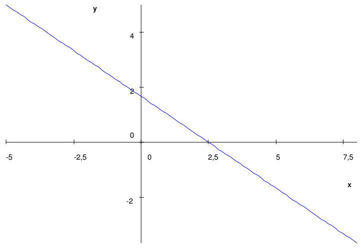
1. (a) Steigung = 2, Winkel = $63.4°$



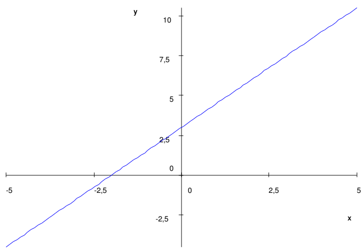
   (b) Steigung = 0.4, Winkel = $21.8°$



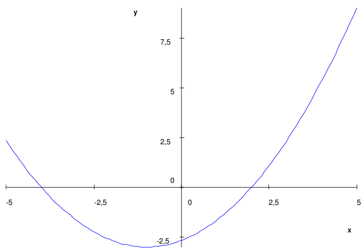
   (c) Steigung = $\dfrac{-2}{3}$, Winkel = $326.3°$



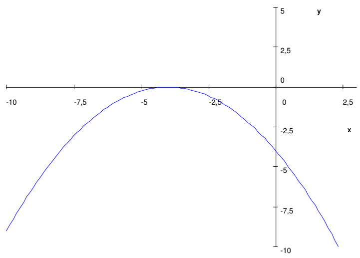
(d) Steigung = 1.5, Winkel = 56.3°



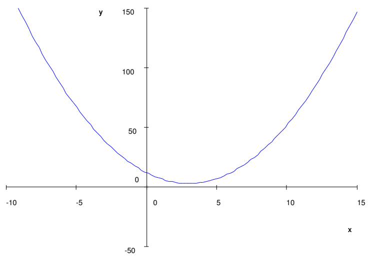
2. (a) $g(x) = x + 3\ ,\ n = -3$ (b) $g(x) = \dfrac{x}{2} + 2\ ,\ n = -4$ (c) $g(x) = \dfrac{-x}{3}\ ,\ n = 0$
   (d) $g(x) = -4\,x - 4\ ,\ n = -1$ (e) $g(x) = -\dfrac{2}{3}\,x + 1\ ,\ n = \dfrac{3}{2}$
3. (a) Schnittpunkt $= (-0.5|0.5)$ (b) Schnittpunkt $= (-0.5|-4.5)$
4. (a) Nullstellen $x_1 = 2\ ,\ x_2 = -4$, Scheitelpunkt $= (-1|-3)$, Schnittpunkt $= (0|\dfrac{-8}{3})$



(b) Nullstellen $x_1 = -4$, $x_2 = -4$, Scheitelpunkt $= (-4|0)$, Schnittpunkt $= (0|-4)$



(c) Keine reellen Nullstellen , Scheitelpunkt $= (3|3)$, Schnittpunkt $= (0|12)$



5. (a) $y = 7x^2 + 2x - 3$ (b) $y = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x$ (c) $y = \frac{-1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 3$

6. (a) Schnittpunkte: $(1|2)$ und $(0|1)$ (b) Schnittpunkte: $(0|1)$ und $(1|0)$ (c) Schnittpunkte: $(0|0)$, $(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}|2 - \frac{3}{2}\sqrt{5})$ und $(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}|2 + \frac{3}{2}\sqrt{5})$ (d) Schnittpunkt: $(9|18)$

7. (a) $y = 0.75 \cdot 4^x$ (b) $y = 2 \cdot 1.5^x$ (c) $y = -1 \cdot 0.5^x$ (d) $y = 0.5 \cdot 5^x$ (e) $y = 5 \cdot 0.1^x$

8. (a) $(-\infty, 0)$ (b) $(-1, 1)$ (c) $(-\infty, 1)$ (d) $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ (e) $\mathbb{R}$ (f) $(0, \infty)$

9. (a) $\log_2(9)$ (b) $\log_{0.5}(6)$ (c) Gleichheit (d) $\log_5(4)$ (e) $\log_{\frac{1}{3}}(5)$ (f) Gleichheit

10. (a) $(10^5, \infty)$ (b) $(-\infty, (-1) \cdot 10^5)$ (c) $(10^{\frac{5}{2}}, \infty)$ (d) $(10^{\sqrt{5}}, \infty)$ (e) $(1, \infty)$ (f) $(0, 1)$

11. (a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ (b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 3$ (c) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ (d) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ (e) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$
(f) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

12. (a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -1$ (b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$
(c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ (d) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$

13. (a) -6 (b) 1 (c) 6 (d) $\frac{-1}{4}$ (e) 4 (f) 4 (g) -9 (h) $\frac{2}{3}$

6.5.2 Lösungen zum Abschnitt „Differentialrechnung“

Aufgaben:

1. (a) $f'(x) = -2\,x^3 + x^2 - 4\,x - x^{-2}$ (b) $f'(x) = 3\,a^2\,x^2 - 2\sqrt{b}\,x + \frac{1}{2}\,c$
(c) $f'(x) = 10\,x^{-6} - 9\,x^{-4} + 24\,x^{-3}$ (d) $f'(x) = -x^{\frac{-3}{2}} - 2\,x^{\frac{-1}{3}} - 4\,x^{\frac{-5}{3}}$ (e) $f'(x) = 1$ (f) $f'(x) = -x^{-2} + 5\,x^{-6} + 2\,x + 2\,x^{-3}$ (g) $f'(x) = 3\,x^2 + \frac{5}{2}\,x^{\frac{2}{3}} - 2\,x - \frac{3}{2}\,x^{\frac{1}{2}}$
(h) $f'(x) = 4\,a^2\,x^3 - 4\,a\,x\,b$ (i) $f'(x) = \frac{-1}{3}\,x^{-2} - \frac{2}{3}\,x^{-3}$ (j) $f'(x) = 2 + 6\,x^{-3}$
(k) $f'(x) = \frac{1}{6}\,x^{\frac{-5}{6}}$ (l) $f'(x) = \frac{-1}{3}\,x^{\frac{-4}{3}} - \frac{1}{12}\,x^{\frac{-13}{12}}$ (m) $f'(x) = \frac{1 - x}{e^x}$
(n) $f'(x) = \frac{1}{2}\,x^{\frac{-1}{2}}\,\sin(x) + x^{\frac{1}{2}}\,\cos(x)$ (o) $f'(x) = \ln(5)\,5^x + \ln(2)\,2^x$
(p) $f'(x) = \cos(x)\,\ln(x) + \frac{\sin(x)}{x}$ (q) $f'(x) = 2\,x\,\cos(x^2)$ (r) $f'(x) = 2\,x\,\sin(x^2)$
(s) $f'(x) = x\,(x^2 - 1)^{\frac{-1}{2}}$ (t) $f'(x) = \frac{1}{2\,(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{(1 + x)^{\frac{1}{2}}}{2\,(1 - x)^{\frac{3}{2}}}$ (u) $f'(x) = 2\,\sin(x)\,\cos(x)$ (v) $f'(x) = e^{\sin(x)}\,\cos(x)$ (w) $f'(x) = \frac{1}{2}\,\cos(\frac{x}{2})$ (x) $f'(x) = \frac{1}{\ln(7)\,x}$

2. (a) $f'(x) = n\,x^{n-1}$, $f''(x) = n\,(n-1)\,x^{n-2}$, $f'''(x) = n\,(n-1)\,(n-2)\,x^{n-3}$
(b) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $f''(x) = \frac{-1}{4\sqrt[2]{x^3}}$, $f'''(x) = \frac{3}{8\sqrt[2]{x^5}}$
(c) $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}$, $f''(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{x^2}{\sqrt[2]{(1 - x^2)^3}}$, $f'''(x) = \frac{-3\,x}{\sqrt[2]{(1 - x^2)^3}} - \frac{3\,x^3}{\sqrt[2]{(1 - x^2)^5}}$
(d) $f'(x) = \frac{1}{1 - x} + \frac{x}{(1 - x)^2}$, $f''(x) = \frac{2}{(1 - x)^2} + \frac{2\,x}{(1 - x)^3}$, $f'''(x) = \frac{6}{(1 - x)^3} + \frac{6\,x}{(1 - x)^4}$
(e) $f'(x) = -2\,\cos(1 - 2\,x)$, $f''(x) = -4\,\sin(1 - 2\,x)$, $f'''(x) = 8\,\cos(1 - 2\,x)$

(f) $f'(x) = \dfrac{1}{x\,\ln(5)}$, $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2\,\ln(5)}$, $f'''(x) = \dfrac{2}{x^3\,\ln(5)}$
(g) $f'(x) = -e^{-x}$, $f''(x) = e^{-x}$, $f'''(x) = -e^{-x}$
(h) $f'(x) = 10\,x^4 - 4\,x^3$, $f''(x) = 40\,x^3 - 12\,x^2$, $f'''(x) = 120\,x^2 - 24\,x$

3. (a) 0.463647609 (b) 1.373400767 (c) 0.8241197552 (d) 0.1432808941

4. (a) Lokales Minimum bei $x = 1$, monoton fallend im Intervall $(-\infty, 1)$, monoton steigend im Intervall $(1, \infty)$, keine Wendepunkte
(b) Keine lokalen Extrema , monoton steigend im Intervall $(-\infty, \infty)$, Wendepunkt bei $x = 1$
(c) Lokales Maximum bei $x = 6$, monoton fallend im Intervall $(6, \infty)$, monoton steigend im Intervall $(-\infty, 6)$, Wendepunkte bei $x = 0, 4$
(d) Lokales Minimum bei $x = 2$, monoton fallend im Intervall $(-\infty, 0)$, monoton steigend im Intervall $(0, \infty)$, keine Wendepunkte
(e) Lokales Minimum bei $x = \dfrac{1}{2}$, lokales Maximum bei $x = \dfrac{-1}{2}$, monoton fallend in den Intervallen $(-\infty, -1)$ und $(1, \infty)$, monoton steigend im Intervall $(-1, 1)$, Wendepunkte bei $x = -\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}$
(f) Lokales Minimum bei $x = \dfrac{1}{3}$, lokales Maximum bei $x = \dfrac{-1}{3}$, monoton steigend in den Intervallen $(-\infty, 4)$ und $(16, \infty)$, monoton fallend in den Intervallen $(4, 10)$ und $(10, 16)$, keine Wendepunkte

6.5.3 Lösungen zum Abschnitt „Integralrechnung“

Aufgaben:

1. (a) $F(x) = \dfrac{-x}{2} + c$ (b) $F(t) = \dfrac{t^2}{4} + \dfrac{2}{t} + c$ (c) $F(x) = \dfrac{-x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} + 2\,x + c$
(d) $F(a) = \dfrac{3}{2}\,a^2 + 2\,a + c$ (e) $F(x) = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\,x^{\frac{3}{2}} + c$ (f) $F(z) = \dfrac{3}{2}\,z^{-2} + c$ (g) $F(x) = \dfrac{a}{3}\,x^3 + \dfrac{b}{2}\,x^2 + c\,x + d$ (h) $F(x) = \dfrac{1}{2}\,x^2 - \dfrac{4}{3}\,x + c$ (i) $F(x) = y^3\,x + c$

2. (a) $F(x) = 3\,a^2\,x - 2\,x + c$ (b) $F(x) = 2\,x + c$ (c) $F(x) = -\cos(x) + \dfrac{x^2}{2} + c$
(d) $F(r) = \dfrac{\pi}{3}\,r^3 + c$ (e) $F(x) = \dfrac{3}{5}\,x^5 - \dfrac{x^6}{6} + \dfrac{7}{3}\,x^3 - x + c$

3. (a) $F(x) = \dfrac{x^3}{2} + 5\,x + c$ (b) $F(x) = \dfrac{3}{2}\,x^2 + c$ (c) $F(t) = \dfrac{t^3}{3} + \dfrac{3}{4}\,t^{-2} + c$
(d) $F(x) = \dfrac{4}{3}\,x^3 - 2\,x^2 + x + c$ (e) $F(x) = \dfrac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}} - 2\,x^{\frac{1}{2}} + c$ (f) $F(a) = 6\,a^2 - 8\,a - 2\,a^3 + \dfrac{a^4}{4} + c$ (g) $F(x) = \dfrac{13\,x^2}{2} - 5\,x - 2\,x^3 + c$ (h) $F(x) = \dfrac{x^2}{10} - a\,x + c$
(i) $F(x) = 2\,x + \dfrac{3}{x} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{a\,x^3}{2} + c$ (j) $F(x) = \dfrac{\frac{x}{b} - \frac{a}{2}}{x^2} + c$ (k) $F(x) = \dfrac{x}{2} - 3\,e^x + c$ (l) $F(x) = 2\,\cos(x) + \dfrac{\sin(x)}{2} + \dfrac{x^2}{2} + c$

4. (a) 6 (b) $\frac{-17}{6}$ (c) $\frac{-3}{4}$ (d) 2.743822867 (e) $\frac{a}{3}$ (f) $\frac{-x^2}{2}$ (g) 2
   (h) $\frac{2}{3}$ (i) $\frac{2}{9}$ (j) -3 (k) 0 (l) existiert nicht (m) 2.896361676
   (n) -0.5877866649

5. (a) $\frac{16}{3}$ (b) 3.771236166 (c) $\frac{71}{6}$ (d) $\frac{248}{3}$ (e) 2.612789059

6. (a) $\frac{8}{3}$ (b) 12 (c) $\frac{27}{4}$ (d) $\frac{16}{3}$ (e) 0.3862943611

7. (a) 27 (b) $\frac{4}{3}$ (c) $\frac{37}{12}$

Literaturverzeichnis

[1] I. N. Bronstein and K. A. Semendjajew. *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt/Main, 1970.

[2] I. N. Bronstein and K. A. Semendjajew. *Teubner-Taschenbuch der Mathematik*. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, Leipzig, 1996.

[3] A. Kemnitz. *Mathematik zum Studienbeginn*. Vieweg und Sohn Verlagsgesellschaft, Braunschweig/Wiesbaden, 2001.

[4] R. Mestwerdt and W. Schulte. *Grundstock des Wissens - Mathematik*. ECO Verlag und Brepols Graphic Industries N.V., Belgien, 2000.

[5] Lothar Papula. *Mathematische Formelsammlung für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 1993.

[6] W. Schäfer and K. Georgi. *Mathematik-Vorkurs*. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, Leipzig, 1994.