

Vorkurs Mathematik Übungsaufgaben

Jürgen Menck

Januar 2001

Technische Universität Hamburg – Harburg
Arbeitsbereich Mathematik, Schwarzenbergstraße 95, D – 21073 Hamburg

Vor Ihnen liegt die Aufgabensammlung zum Vorkurs Mathematik. Die Aufgaben sind entsprechend den Kapiteln des Skripts angeordnet, bei denen ich ihre Bearbeitung empfehle. Es ist nun allerdings nicht so, daß die Aufgaben sich stets auf den Stoff eines Kapitels allein beschränken. Dabei wird es Sie vermutlich nicht wundern, daß auf jeweils frühere Kapitel bezug genommen wird. Um einigermaßen sinnvolle und interessante Aufgaben zu konstruieren, muß man sich aber leider manchmal auch bei späteren Kapiteln bedienen, indem man beispielsweise gewisse spezielle Funktionen wie den Sinus benutzt, deren Eigenschaften erst recht weit hinten im Skript zusammengetragen werden, oder indem man bei der Diskussion von Gleichungslösungen schon mit geometrischen Gebilden hantiert, die streng genommen erst in späteren Kapiteln eingeführt werden. Dergleichen mag unschön wirken, läßt sich aber kaum vermeiden, und da der behandelte Stoff ohnehin größtenteils Schulstoff ist, halte ich es auch für akzeptabel.

Zur Hilfe befindet sich am Anfang jeder Aufgabe ein Hinweis auf die Abschnitte des Skripts, die man zur Lösung unter Umständen zur Hilfe ziehen muß. Sollten Sie die eine oder andere Aufgabe nicht in den Griff bekommen, weil Ihnen der referenzierte Stoff nicht oder nicht mehr ausreichend geläufig ist, so lassen Sie sich keine grauen Haare wachsen; sie können sie sich ja zu einem späteren Zeitpunkt noch einmal ansehen.

Manche Aufgaben sind sogar so konstruiert, daß man sie mit gleicher Berechtigung in früheren und in späteren Kapiteln bearbeiten kann. Auch dies ist am Anfang der Aufgaben jeweils vermerkt. Die Anordnung der Aufgaben in dieser Sammlung kann einem solchen Umstand natürlich nicht gerecht werden. Für den Fall, daß Sie gezielt nach Aufgaben zu einem bestimmten Kapitel forschen, habe ich daher diesem Vorwort noch eine entsprechende Liste hinzugefügt.

Seit dem ersten Durchgang in 1999 hat sich der Umfang der Aufgabensammlung fast verdoppelt; es sollte damit mehr als deutlich sein, daß hier nicht der Anspruch erhoben wird, alles zu bearbeiten. Interessierte können und sollen natürlich nach Lust und Laune in der Sammlung stöbern, aber für den durchschnittlichen Studienanfänger dürfte es sinnvoll sein, wenn der Vortragende des Kurses eine Auswahl trifft.

Die Aufgaben machen unterschiedlich viel Arbeit und verursachen unterschiedlich viel Kopfzerbrechen. Lassen Sie sich nicht gleich entmutigen, wenn Sie nicht alle lösen können! Wir beabsichtigen, Ihnen zur Unterstützung studentische Tutoren zur Seite zu stellen.

Der Fairneß halber sei erwähnt, daß ich mir die vorliegenden Aufgaben nicht alle selbst ausgedacht habe. Einige davon sind aus der alten Sammlung von Wolfgang Mackens und Peywand Kiani übernommen oder nur leicht abgewandelt, und weitere stammen aus Mathematikkursen an Universität oder Schule. Ich danke den Vortragenden und studentischen Hilfskräften der vorhergehenden Durchgänge für ihre Korrekturen und Anmerkungen.

Im übrigen wünsche ich viel Erfolg!

Hamburg im Januar 2001, Jürgen Menck.

Für Kapitel 3 eignen sich die Aufgaben 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23.

Für Kapitel 4 eignen sich die Aufgaben 24, 25, 26, 27, 128, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41.

Für Kapitel 5 eignen sich die Aufgaben 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66.

Für Kapitel 6 eignen sich die Aufgaben 22, 46, 47, 49, 50, 56, 57, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 131, 132, 169.

Für Kapitel 7 eignen sich die Aufgaben 52, 60, 66, 83, 84, 85, 86, 129.

Für Kapitel 8 eignen sich die Aufgaben 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 145.

Für Kapitel 9 eignen sich die Aufgaben 128, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 151, 162.

Für Kapitel 10 eignen sich die Aufgaben 21, 50, 53, 54, 55, 69, 90, 93, 94, 121, 136, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 162.

Für Kapitel 11 eignen sich die Aufgaben 1, 4, 18, 58, 140, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174.

Aufgabe 1 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 3 oder 11. Wichtig ist vermutlich Abschnitt 3.1. Interessant ist vielleicht Abschnitt 11.3.

Welche Intervalle werden beschrieben durch

- a) $|x - 1| \leq 1$,
- b) $|x + 1| < 1$,
- c) $x \leq 0$,
- d) $x = \pi$?

Aufgabe 2 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 3. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 3.1 und 3.2. Interessant ist vielleicht Abschnitt 11.2.

Welche Beziehungen zwischen a , b , c und d folgen aus:

- a) $[a, b] \subseteq [c, d]$,
- b) $[a, b] \subseteq (c, d)$?

Aufgabe 3 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 3. Wichtig ist vermutlich Abschnitt 3.1. Interessant ist vielleicht Abschnitt 11.2.

a) *Leiten Sie aus den Regeln in Abschnitt 3.1.1 her:*

$$a \leq b, c \leq d \implies a + c \leq b + d$$

b) *Leiten Sie daraus die sogenannte Dreiecksungleichung ab:*

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

Aufgabe 4 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 3 oder 11. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 3.1 und 11.2.

Prüfen Sie die folgenden Aussagen auf Ihre Richtigkeit:

- a) $a > b, b > c \implies a > c$,
- b) $a < b, b > c \implies a < c$,
- c) $a < b, b > c \implies a < b$,
- d) $a > b, b > c \implies ab > bc$,
- e) $a > b, b > c \implies ab + bc > b^2 + ac$,
- f) $a > b, b > c \implies a + b > b + c$,
- g) $a > b, b > c \implies a + c > b + b$.

Aufgabe 5 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 3. Wichtig ist vermutlich Abschnitt 3.2.

Beweisen Sie: Sind p_1 und p_2 Primzahlen und größer als 2, so ist weder $p_1 p_2$ noch $p_1 + p_2$ eine Primzahl.

Aufgabe 6 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 3. Wichtig ist vermutlich Abschnitt 3.2.

- a) *Berechnen Sie kgV und ggT von $n_1 = 600$ und $n_2 = 315$.*
- b) *Zeigen Sie, daß für alle natürlichen Zahlen n_1 und n_2 stets $\text{kgV}(n_1, n_2) \cdot \text{ggT}(n_1, n_2) = n_1 \cdot n_2$ gilt.*

Aufgabe 7 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 3. Wichtig ist vermutlich Abschnitt 3.5.

Berechnen Sie den Binomialkoeffizienten

$$\binom{15}{4}.$$

Aufgabe 8 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 3. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 3.7 und 3.5.

Das sogenannte Pascalsche Dreieck beruht auf der Beziehung

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k} \quad \text{für } k, n \in \mathbb{N} \text{ mit } k \leq n.$$

Zeigen Sie diese Beziehung. (Vgl. auch Aufgabe 9.)

Aufgabe 9 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 3. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 3.2 und 3.5.

Benutzen Sie die Beziehung

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k} \quad \text{für } k, n \in \mathbb{N} \text{ mit } k \leq n,$$

um durch Induktion über n zu beweisen, daß eine n -elementige Menge genau $\binom{n}{k}$ k -elementige Teilmengen besitzt. (Vgl. auch Aufgabe 8.)

Aufgabe 10 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 3. Wichtig ist vermutlich Abschnitt 3.2.

Zeigen Sie durch Induktion über n , daß eine n -elementige Menge genau 2^n n -elementige Teilmengen besitzt.

Aufgabe 11 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 3. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 3.2 und 3.7.

a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion, daß für festes $q \neq 1$ stets

$$1 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

gilt für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Zeigen Sie, daß für alle $n \in \mathbb{N}$

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Aufgabe 12 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 3. Wichtig ist vermutlich Abschnitt 3.3.

a) Kürzen Sie $\frac{1320}{6160}$ so weit wie möglich.

b) Stellen Sie $\frac{1320}{6160} + \frac{100}{1176}$ als gekürzten Bruch dar.

Aufgabe 13 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 3. Wichtig ist vermutlich Abschnitt 3.1. Interessant ist vielleicht Abschnitt 2.4.

Nähern Sie π durch eine rationale Zahl so, daß der Fehler kleiner als 10^{-5} ist. (Hinweis: Sie dürfen alle Informationen aus dem Skript benutzen.)

Aufgabe 14 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 3. Wichtig ist vermutlich Abschnitt 3.3.

Stellen Sie den folgenden Ausdruck als gekürzte rationale Zahl dar:

$$-\frac{\frac{3+5}{2-7} - \frac{1-6}{-3+5}}{3 + \frac{5}{3}} \cdot \left(\frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}} \right).$$

Aufgabe 15 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 3. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 3.7 und 3.4.

Formen Sie die folgenden Zahlen so um, daß keine Wurzel mehr im Nenner steht:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{1}{1-\sqrt{2}}, \quad \frac{1}{1-\sqrt{2}-\sqrt{5}}.$$

Aufgabe 16 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 3. Wichtig ist vermutlich Abschnitt 3.4.

Die wievielte Wurzel ist

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}},$$

also wie lautet n in

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}?}$$

Aufgabe 17 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 3. Wichtig ist vermutlich Abschnitt 3.4.

- a) Schreiben Sie $\frac{1}{\sqrt[3]{\pi^2}}$ in der Form π^q mit $q \in \mathbb{Q}$.
 b) Schreiben Sie $\frac{\sqrt{\pi^3}}{\sqrt[3]{\pi^2}}$ in der Form $\sqrt[n]{\pi^k}$ mit $k, n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 18 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 3 oder 11. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 3.1, 3.3, 3.4 und 11.3.

Ordnen Sie die Zahlen

$$\frac{-5}{2}, \quad -\sqrt{2}, \quad \frac{-7}{5}, \quad \frac{22}{7}, \quad 3, \quad \frac{23}{8}, \quad 0, \quad \frac{9}{5}, \quad -\sqrt{3}$$

der Größe nach, ohne einen Taschenrechner zu benutzen.

Aufgabe 19 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 3. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 3.1 und 3.7.

- a) Multiplizieren Sie $((((x+2)x-2)x+2)x-2)x+2$ aus.
 b) Vereinfachen Sie $(ax+b)x^2 + ax(1-x^2) - (bx+a)x$.

Aufgabe 20 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 3. Wichtig ist vermutlich Abschnitt 3.7. Interessant ist vielleicht Abschnitt 4.3.

Lösen Sie $(x-3)(x^2+2)(x^2-2)(x+5) = 0$.

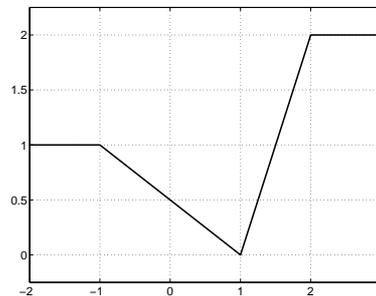
Aufgabe 21 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 3 oder 10. Wichtig ist vermutlich Abschnitt 3.7.

Berechnen Sie die folgenden Summen mit Hilfe eines Hauptnenners und vereinfachen Sie das Ergebnis, falls möglich:

- a) $\frac{3x+1}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)} + \frac{2x-2}{(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)},$
 b) $\frac{3x-5}{x(x+2)(3x-5)} + \frac{x^2-1}{(x-1)x(x+1)(x+2)},$
 c) $\frac{3x^5-4x^3+x}{x^2+3x+2} + \frac{4x^3+x+x^5}{(x+1)(x+2)}.$

Aufgabe 22 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 3 oder 6. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 3.8 und 6.3. Interessant ist vielleicht Abschnitt 10.1.

Definieren Sie stückweise eine Funktion, deren Graph für $-2 \leq x \leq 3$ das folgende Aussehen hat:



Aufgabe 23 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 3. Wichtig ist vermutlich Abschnitt 3.8. Interessant ist vielleicht Abschnitt 9.1.

Welche der folgenden Vorschriften definieren Funktionen auf dem Definitionsbereich \mathbb{R} ?

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q}, \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1, \\ x, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq 2, \\ x - 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

$$k(x) = \frac{1}{x^2 - 2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$\ell(x) = \frac{1}{x^2 + 2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$m(x) = x^2 - 4, \quad x \in [0, 1].$$

$$n(x) = \sqrt{x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 24 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 4. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 4.4 und 4.3.

Autofahrer beschwerten sich gelegentlich über Chausseebäume. Ein Argument, das in diesem Zusammenhang genannt wird, ist, daß das Flackern des reflektierten Scheinwerferlichts bei einer Allee den Fahrer psychologisch irritiere.

Wenn man davon ausgeht, daß die Bäume in einer Allee 10m auseinanderstehen und daß ein Flackern ab 40Hz aufwärts kaum noch wahrgenommen wird, wie schnell muß der sportliche Autofahrer dann fahren, um sich richtig wohl zu fühlen?

Aufgabe 25 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 4. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 4.4 und 4.3.

Prüfen Sie für $x = \pi/12$ und $x = \pi/6$ in Tabelle 10.1 des Skripts, daß $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ und $\tan(x) = \sin(x)/\cos(x)$ gilt.

Aufgabe 26 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 4. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 4.3, 4.4 und 10.5. Interessant ist vielleicht Abschnitt 9.6.

Welche der Gleichungen (2) – (14) hat dieselben Lösungen wie (1)? Begründen Sie.

$$(1) \quad x^3 + x + 1 = 0,$$

$$(2) \quad (x^3 + x + 1)(x^2 + 1) = 0,$$

$$(3) \quad (x^3 + x + 1)(x^2 - 1) = 0,$$

$$(4) (x^3 + x + 1)^2 = 0,$$

$$(5) \sqrt{x^3 + x + 1} = 0,$$

$$(6) x^3 + x = -1,$$

$$(7) \frac{1}{x^3 + x} = -1,$$

$$(8) (x^3 + x)^2 = 1,$$

$$(9) x^3 + x^2 + x + 1 = x^2,$$

$$(10) \sqrt{x^3 + x^2 + x + 1} = x,$$

$$(11) \sqrt{x^3 + x^2 + x + 1} = \pm x,$$

$$(12) \ln(x^3 + x + 1) = 0,$$

$$(13) \ln(-(x^3 + x)) = 0,$$

$$(14) -\ln(x^3 + x) = 0.$$

Aufgabe 27 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 4. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 4.4 und 4.3.

Lösen Sie

$$a) x + 2 = -\frac{1}{x},$$

$$b) \frac{1}{x + 2} = \frac{2x}{x^2 - 3},$$

$$c) \frac{(x^2 - 9)(x + 3)(x^2 + 2x + 1)}{(3x + 5)(x^2 + 4x + 4)} = 0.$$

Aufgabe 28 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 4. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 4.4 und 4.3.

a) Lösen Sie durch Quadrieren

$$x = \sqrt{x^2 + 24} - 2.$$

b) Versuchen Sie sich an

$$x + \sqrt{x^2 + 5} - \sqrt{x^2 - 3} = 0.$$

(Tip: Doppeltes Quadrieren könnte nützlich sein.)

Aufgabe 29 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 4. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 4.4 und 4.3.

Versuchen Sie,

$$x^2 - x^2y + 2x - 2xy - y = 0$$

so umzuformen, daß auf der einen Seite nur noch x und auf der anderen y auftaucht. Ergänzen Sie dann falls möglich quadratisch, so daß Sie nach x auflösen können.

Aufgabe 30 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 4. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 4.4 und 4.3.

Bringen Sie die Gleichung

$$\frac{5xy + 10x - 2x^2 - 3}{3x + y} = 1$$

in die Form $y = f(x)$, wobei Sie über Probleme mit Nennernullstellen großzügig hinwegsehen dürfen.

Aufgabe 31 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 4. Wichtig ist vermutlich Abschnitt 4.4.

Bringen Sie die Gleichung

$$x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x - 3 = 0$$

in die Form $(x^2 - x - 1)^2 = \dots$ und lösen Sie sie dann.

Aufgabe 32 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 4. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 4.4 und 4.3.

Für welche Kombinationen von a , b und c gilt

$$\frac{a+b}{c+b} = \frac{a}{c} ?$$

Aufgabe 33 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 4. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 4.4 und 4.3.

Lösen Sie $3^x = 2^{4x+1}$. (Für den Fall, daß Sie keinen Taschenrechner zur Hand haben: Es muß als Ergebnis keine Fließkommazahl stehen, ein Term mit im Prinzip bekannten Größen reicht.)

Aufgabe 34 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 4. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 4.4 und 4.3.

Für welche x gilt

$$5^3 \cdot 5^x = 5^{3 \cdot x} ?$$

Aufgabe 35 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 4. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 4.4, 4.3 und 3.1.

Lösen Sie mit Hilfe von Fallunterscheidungen die folgenden Gleichungen:

a) $|2x + 4| + x = 0$,

b) $|2x + 4| - x = 0$,

c) $|x - 1/2| = |1 - x^2|$,

d) $|x - 1| = 2 - |x + 1|$.

Aufgabe 36 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 4. Wichtig ist vermutlich Abschnitt 4.3. Interessant ist vielleicht Abschnitt 4.4.

a) Was stimmt hier nicht?

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y = 1 \\ 3x + 6y = 2 \end{array} \right\} \implies \left. \begin{array}{l} 3x + 6y = 3 \\ 3x + 6y = 2 \end{array} \right\} \implies 2 = 3.$$

b) Was stimmt hier nicht?

$$\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 = 1 \implies (x+1)^2 = (x-1)^2 \implies x+1 = x-1 \implies 1 = -1.$$

Aufgabe 37 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 4. Wichtig ist vermutlich Abschnitt 4.3. Interessant ist vielleicht Abschnitt 4.4.

Was stimmt hier nicht?

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 + 3x + 1 &= 5x^2 + 10x + 5 \\ \implies (x+1)^3 &= 5(x^2 + 2x + 1) \\ \implies (x+1)^3 &= 5(x+1)^2 \\ \implies x+1 &= 5 \\ \implies x &= 4. \end{aligned}$$

Aufgabe 38 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 4. Wichtig ist vermutlich Abschnitt 4.5.

a) Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= 8, \\x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 14, \\x_1 + 3x_2 + 6x_3 &= 21.\end{aligned}$$

b) Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}3x_1 + 15x_2 + 5x_3 &= 3, \\4x_1 + x_2 + 7x_3 &= 1.\end{aligned}$$

Aufgabe 39 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 4. Wichtig ist vermutlich Abschnitt 4.5.

Stellen Sie sich vor, Sie haben viele lineare 2×2 -Gleichungssysteme zu lösen. Leiten Sie dafür aus

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1, \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2\end{aligned}$$

Lösungsformeln für x_1 und x_2 her. Welche Bedingung müssen die a_{ij} erfüllen, damit die Lösbarkeit des Problems gesichert ist?

Aufgabe 40 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 4. Wichtig ist vermutlich Abschnitt 4.6.

- a) Im Kino sieht man 24 Bilder pro Sekunde. Die PAL-Videonorm sieht aber 25 Bilder pro Sekunde vor. Wie lang ist ein 100-Minuten-Film auf PAL-Video?
- b) 875 g Back-Fix-Mehl kosten 3.20 DM, 512 g Superduper Weizenmehl werden für 2.79 DM angeboten. Was ist günstiger?
- c) Tanitha, Jasmina, Janina und Doris teilen sich die Benzinkosten für ihren Autoausflug nach Wasserstein. Für die Hinfahrt zahlen Sie pro Person 2,40 DM. In Wasserstein trennt sich aber Doris von den anderen, weil sie angeblich nicht zu ihnen paßt(?). Wieviel kostet die Rückfahrt pro Person?

Aufgabe 41 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 4. Wichtig ist vermutlich Abschnitt 4.6.

Variieren Sie den Dreisatz für den folgenden Aufgabentyp: Ein Objekt unbekannter Masse habe bei einer Geschwindigkeit von $v = 30 \text{ m/s}$ die kinetische Energie

$$E = 380.7 \text{ kJ} = 380700 \text{ J}.$$

Wie groß ist die Energie bei $v = 40 \text{ m/s}$? (Hinweis: $E = \frac{1}{2}mv^2$.)

Aufgabe 42 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 5. Wichtig ist vermutlich Abschnitt 5.1.

Wie lang ist der folgende Vektor?

$$\mathbf{x} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 6 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 43 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 5. Wichtig ist vermutlich Abschnitt 5.1.

Seien $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Wie verhält sich

- a) $\|x\|$ zu $\|\lambda x\|$,

- b) $\langle x, \tilde{x} \rangle$ zu $\langle \lambda x, \tilde{x} \rangle$,
 c) $x \times \tilde{x}$ zu $(\lambda x) \times \tilde{x}$?

Aufgabe 44 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 5. Wichtig ist vermutlich Abschnitt 5.1.

Ein Junge steht an einem Fluß (Breite $d = 1$ km) und möchte zu der Stelle am anderen Ufer hinüberschwimmen, die ihm genau gegenüberliegt. Auf welche Weise erreicht er sie schneller:

- a) wenn er sich beim Durchschwimmen des Flusses in einem solchen Winkel gegen die Strömung stellt, daß die resultierende Geschwindigkeit senkrecht zum Ufer ist und er das Ufer also genau am gewünschten Punkt erreicht,
 b) wenn er gerade auf das andere Ufer zuschwimmt und die Entfernung, die er abgetrieben wird, zu Fuß am anderen Ufer zurücklegt?

Der Junge schwimmt mit einer Geschwindigkeit von 2.5 km/h und läuft 4 km/h. Die Geschwindigkeit der Strömung ist 2 km/h.

Aufgabe 45 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 5. Wichtig ist vermutlich Abschnitt 5.1.

Ein Boot ist mit einem Tau an einem Flußufer festgemacht. Der Fluß hat eine starke Strömung, und es weht ein Wind quer zum Fluß. Auf das Boot wirken entsprechend die Kräfte F_1 und F_2 . Welche Kraft hält das am Tau befestigte Boot bei $\|F_1\| = 120$ N und $\|F_2\| = 90$ N im Gleichgewicht?

Aufgabe 46 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 5 oder 6. Wichtig ist vermutlich Abschnitt 5.1. Interessant ist vielleicht Abschnitt 6.4.

Zeigen Sie mit Vektorrechnung ("analytischer Geometrie"), daß sich die Seitenhalbierenden eines Dreiecks (also die Verbindungsstrecken zwischen Seitenmitte und gegenüberliegender Ecke) alle in einem gemeinsamen Punkt schneiden und dabei im Verhältnis 2:1 teilen.

Aufgabe 47 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 5 oder 6. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 5.1 und 6.4.

Zeigen Sie mit Vektorrechnung den Satz des Thales: Die Eckpunkte eines rechtwinkligen Dreiecks liegen auf einem Kreis, dessen Mittelpunkt der Mittelpunkt der Hypotenuse ist. Hinweis: Es genügt zu zeigen, daß die Hypotenuse doppelt so lang ist wie die Verbindungsstrecke zwischen dem Mittelpunkt der Hypotenuse und der gegenüberliegenden Ecke.

Aufgabe 48 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 5. Wichtig ist vermutlich Abschnitt 5.1.

Wie ist der Kosinus des Winkels zwischen den Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} ?$$

Aufgabe 49 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 5 oder 6. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 5.1 und 6.4.

Bestimmen Sie den Winkel zwischen $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- a) mit Hilfe des Skalarprodukts,
 b) über den Kosinussatz.

Es reicht, den Kosinus des Winkels anzugeben.

Aufgabe 50 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 5, 6 oder 10. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 5.1, 6.1, 6.4 und 10.3. Interessant ist vielleicht die Tabelle 10.1.

a) Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \cos(\phi) - y \sin(\phi) \\ x \sin(\phi) + y \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

für festes ϕ eine Drehung um den Winkel ϕ um den Nullpunkt im \mathbb{R}^2 darstellt.

b) Drehen Sie das Dreieck mit den Eckpunkten

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

um $\pi/6$, das heißt berechnen Sie die neuen Eckpunkte.

Aufgabe 51 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 5. Wichtig ist vermutlich Abschnitt 5.1.

a) Geben Sie einen Vektor an, der auf

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

senkrecht steht.

b) Geben Sie einen Vektor an, der auf

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

senkrecht steht.

c) Geben Sie einen Vektor an, der auf

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

senkrecht steht.

Aufgabe 52 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 5 oder 7. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 5.3 und 5.1. Interessant ist vielleicht Abschnitt 7.1.

Beschreiben Sie die Ebene im \mathbb{R}^3 implizit, die den Nullpunkt enthält und auf

$$n = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

senkrecht steht.

Aufgabe 53 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 5 oder 10. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 5.2 und 10.5.

Bestimmen Sie eine implizite Darstellung von

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} \ln(t) \\ t + 1/t \end{pmatrix}, t \in (0, \infty) \right\}.$$

Aufgabe 54 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 5 oder 10. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 5.2 und 10.3.

Beschreiben Sie

$$\left\{ \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos 2t \end{pmatrix}, t \in [0, \pi] \right\}$$

implizit. Was ändert sich für $t \in [0, 2\pi]$? Tip: Additionstheoreme.

Aufgabe 55 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 5 oder 10. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 5.2 und 10.3. Interessant ist vielleicht Abschnitt 4.3.

a) Stellen Sie den Ellipsenrand

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \cos t \\ 3 \sin t \end{pmatrix}, t \in [0, 2\pi) \right\}$$

implizit dar.

b) Was ändert sich bei $t \in [0, \pi]$? Versuchen Sie, die implizite Darstellung durch eine zusätzliche Ungleichung zu "retten".

Tip: $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ verwenden.

Aufgabe 56 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 5 oder 6. Wichtig ist vermutlich Abschnitt 5.2. Interessant ist vielleicht Abschnitt 6.8.

Parametrisieren Sie einen Ast der Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$ ohne Verwendung der hyperbolischen Funktionen!

Aufgabe 57 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 5 oder 6. Wichtig ist vermutlich Abschnitt 5.2. Interessant ist vielleicht Abschnitt 6.1.

Stellen Sie die Ebene $x + z = 0$ im \mathbb{R}^3 in Parameterform dar.

Aufgabe 58 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 5 oder 11. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 5.2, 11.3, 6.5 und 6.6.

Skizzieren Sie die Mengen, die im \mathbb{R}^2 durch die untenstehenden Ungleichungen beschrieben werden. Welche ist am kleinsten, welche am größten?

$$\begin{aligned} A_1 & : |x^2 + y^2| \leq 1, \\ A_2 & : |x| + |y| \leq 1, \\ A_3 & : \max(|x|, |y|) \leq 1. \end{aligned}$$

Aufgabe 59 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 5. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 5.3 und 5.2. Interessant sind vielleicht die Abschnitte 6.3 und 6.8.

Berechnen Sie den Schnitt der Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$ und der Ellipse $x^2 + 4y^2 = 21$.

Aufgabe 60 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 5 oder 7. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 5.3, 5.2 und 6.6. Interessant sind vielleicht die Abschnitte 7.1 und 7.6.

Deuten Sie den Schnitt von $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ und $z = 1/2$ im \mathbb{R}^3 geometrisch. Parametrisieren Sie ihn explizit.

Aufgabe 61 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 5. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 5.3, 5.2 und 4.4. Interessant sind vielleicht die Abschnitte 6.9 und 6.3.

Gegeben seien im \mathbb{R}^2 die Parabel $y = x^2$ und die Gerade $x + 2y = a$ mit einem festen $a \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie den Schnitt für jedes mögliche a . Erklären Sie, wie sich das Ergebnis mit den Faustregeln für Dimensionen verträgt (insbesondere Tabelle 5.1 des Skripts oder Gleichung (5.2)).

Aufgabe 62 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 5. Wichtig ist vermutlich Abschnitt 5.3. Interessant ist vielleicht Abschnitt 7.1.

Schneidet die Gerade

$$\left\{ \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

die x-Achse?

Aufgabe 63 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 5. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 5.3 und 4.5. Interessant ist vielleicht Abschnitt 7.1.

Berechnen Sie den Schnitt der Ebene

$$E_1 = \left\{ \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

mit der Ebene E_2 , die durch $5x - 4y = 0$ beschrieben wird. Deuten Sie das Ergebnis geometrisch.

Aufgabe 64 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 5. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 5.3 und 4.5. Interessant ist vielleicht Abschnitt 7.1.

Berechnen Sie den Schnitt der Ebene

$$E_1 = \left\{ \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

mit der Ebene

$$E_2 = \left\{ \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Deuten Sie das Ergebnis geometrisch.

Aufgabe 65 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 5. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 5.3 und 4.5. Interessant ist vielleicht Abschnitt 6.3.

Berechnen und erläutern Sie, wo sich je zwei der folgenden Geraden schneiden:

$$\begin{aligned} g_1 &= \left\{ \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}, \\ g_2 &= \left\{ \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}, \\ g_3 &= \left\{ \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}, \\ g_4 &= \left\{ \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Aufgabe 66 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 5 oder 7. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 5.3 und 4.5. Interessant ist vielleicht Abschnitt 7.1.

Schneiden sich die Geraden

$$g_1 = \left\{ \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

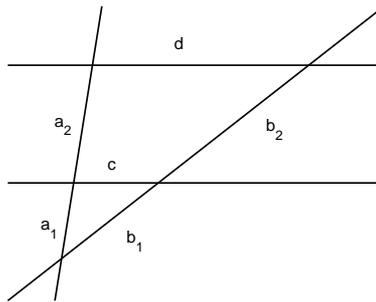
und

$$g_2 = \left\{ \left(\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

und wenn ja, dann wo?

Aufgabe 67 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 6. Wichtig ist vermutlich Abschnitt 6.2. Interessant ist vielleicht Abschnitt 4.4.

Wie berechnen Sie in der folgenden Abbildung (identisch mit Abbildung 6.9 des Skripts) c , wenn d , b_1 und b_2 bekannt sind?



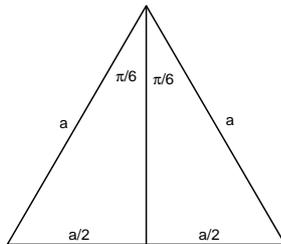
Aufgabe 68 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 6. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 6.3 und 5.1.

Geben Sie Darstellungen für die folgenden Geraden im \mathbb{R}^2 an:

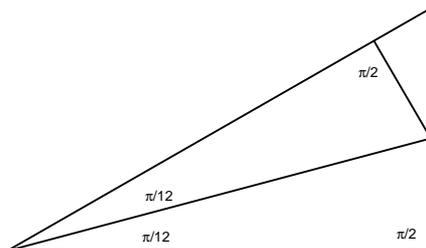
- Die Punkte $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ liegen auf der Gerade.
- Die Gerade hat die Steigung 2 und geht durch den Punkt $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
- Die Gerade hat den x -Achsenabschnitt -1 und den y -Achsenabschnitt -2 .
- Die Gerade geht durch die Punkte $\begin{pmatrix} 29 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -785 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 69 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 6 oder 10. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 6.4 und 10.3. Interessant ist vielleicht Abschnitt 4.4 sowie die Tabelle 10.1.

- Leiten Sie $\sin(\pi/6)$ und $\cos(\pi/6)$ her, indem Sie mit einem gleichseitigen Dreieck und der Höhe darin argumentieren:



- b) (Vielleicht etwas knifflig!) Setzen Sie die Kenntnis von $\sin(\pi/6)$, $\cos(\pi/6)$ und $\tan(\pi/6)$ nun voraus und leiten Sie $\sin(\pi/12)$ aus der folgenden Konstruktion her:



Aufgabe 70 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 6. Wichtig ist vermutlich Abschnitt 6.4. Interessant ist vielleicht Abschnitt 4.4.

In einem Dreieck mit den Bezeichnungen aus Abbildung 6.14 berechnen Sie

- a) a aus $b = 4$, $c = 3$, $\alpha = \pi/4$,
 b) a aus $c = 5$, $\alpha = \pi/6$, $\beta = \frac{7}{12}\pi$,
 c) α aus $a = \sqrt{7}$, $b = 2$, $c = 3$.

Hinweis: Kosinus- und Sinuswerte entnehmen Sie ggf. der Tabelle 10.1.

Aufgabe 71 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 6. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 6.4 und 10.3. Interessant ist vielleicht Abschnitt 4.4.

- a) Zeigen Sie geometrisch die Flächenformel

$$F = \frac{1}{4} \sqrt{2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - (a^4 + b^4 + c^4)}.$$

für beliebige Dreiecke (Bezeichnungen wie im Skript in Bild 6.14).

- b) Prüfen Sie die Formel anhand des rechtwinkligen Dreiecks, also testen Sie, ob im Fall $\gamma = \pi/2$ wirklich

$$F = \frac{1}{2}ab$$

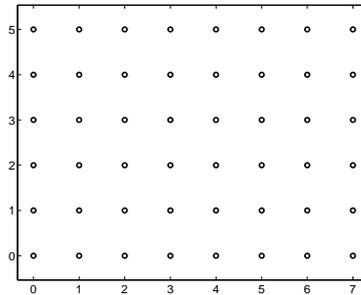
herauskommt. (Vgl. im Skript Abschnitt 6.4.1 und Abbildung 6.12.)

Aufgabe 72 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 6. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 6.6 und 6.7.

Wenn man eine Ellipse mit den Halbachsen 1 und 2 aus einem kreisförmigen Stück Pappe schneidet, wieviel von der Pappe ist dann (mindestens) Abfall?

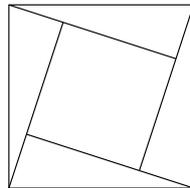
Aufgabe 73 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 6. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 6.4 und 6.1. Interessant ist vielleicht Abschnitt 5.1.

Wieviele Paare von Punkten im folgenden Bild haben den Abstand 5?



Aufgabe 74 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 6. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 6.4 und 6.5.

Warum beweist das folgende Bild den Satz von Pythagoras? (Die Flächenformeln für Rechtecke und rechtwinklige Dreiecke dürfen Sie als bekannt voraussetzen.)

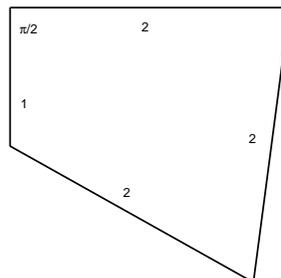


Aufgabe 75 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 6. Wichtig ist vermutlich Abschnitt 6.4.

- Angenommen, Sie befinden sich in Höhe h über dem Meeresspiegel und schauen aufs Meer hinaus. Wie weit ist der Horizont entfernt? (Der Erdradius R darf als bekannt vorausgesetzt werden.)
- Geben Sie auch eine vereinfachte Formel an, die ausnutzt, daß h gegenüber dem Erdradius klein ist. Wieviel höher müßte Ihr Aussichtspunkt ungefähr sein, damit Sie doppelt so weit sehen können?
- Aus welcher Entfernung können Sie von einem 16 m hohen Mastbaum gerade noch einen 64 m hohen Leuchtturm sehen? Verwenden Sie $2R \approx 12.76 \cdot 10^6$ m und, falls Sie keinen Taschenrechner zur Hand haben, $12.76 \approx 3.57^2$.

Aufgabe 76 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 6. Wichtig ist vermutlich Abschnitt 6.4.

Welche Fläche hat das folgende Viereck?



Hinweis: Zerlegen Sie das Viereck geeignet in Dreiecke.

Aufgabe 77 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 6. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 6.5 und 6.4.

Laut Skript ist bei einem regelmäßigen Sechseck die Seitenlänge gleich dem Radius des Kreises, auf dem alle Eckpunkte liegen. Warum ist das so?

Aufgabe 78 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 6. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 6.4 und 6.5.

- a) Berechnen Sie die Fläche des regelmäßigen Sechsecks der Kantenlänge a . (Tip: Zerteilung in Dreiecke.)
 b) Berechnen Sie die Fläche des regelmäßigen Achtecks der Kantenlänge a . (Tip: Das Achteck in ein geeignetes Quadrat einbetten.)

Aufgabe 79 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 6. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 6.5 und 6.6. Interessant ist vielleicht Abschnitt 4.5.

Eine quadratische Arbeitsplatte mit 80 cm Kantenlänge wiegt 5 kg. Wieviel wiegt eine quadratische Platte mit 1.20 m Kantenlänge aus demselben Material?

Aufgabe 80 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 6. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 6.5 und 6.6. Interessant ist vielleicht Abschnitt 4.5.

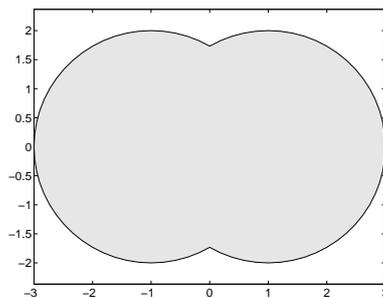
Welchen Durchmesser muß eine kreisrunde Tischdecke mindestens haben, damit sie einen $1\text{ m} \times 70\text{ cm}$ großen Tisch abdecken kann?

Aufgabe 81 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 6. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 6.6 und 5.1.

Welchen Radius hat ein Kreis mit Mittelpunkt $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0.8 \\ -2 \end{pmatrix}$, wenn der Punkt $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -2.2 \\ 2 \end{pmatrix}$ auf dem Kreis liegt? Zeichnen Sie den Kreis. Geben Sie eine explizite und eine implizite Darstellung für den Kreis an.

Aufgabe 82 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 6. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 6.4 und 6.6 sowie die Tabelle 10.1.

Welche Fläche hat die Vereinigung zweier Kreise mit Radius 2 um die Mittelpunkte $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, s. das folgende Bild?



Hinweis: Zerlegen Sie die Fläche geschickt.

Aufgabe 83 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 7. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 7.5 und 6.6. Interessant ist vielleicht Abschnitt 4.4.

Ein Zylinder werde nach unten durch die Fläche

$$\{x^2 - 4x + y^2 \leq 0, z = 2\}$$

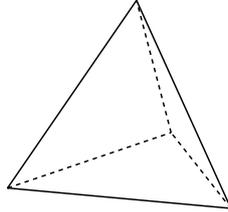
und nach oben durch die Fläche

$$\{x^2 + y^2 + 2(y - x) \leq 2, z = 5\}$$

begrenzt. Welches Volumen hat er? (Tip: quadratische Ergänzung.)

Aufgabe 84 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 7. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 7.3 und 6.4.

Ein Tetraeder ist ein Körper, der von vier gleichseitigen Dreiecken begrenzt wird, s. Bild.



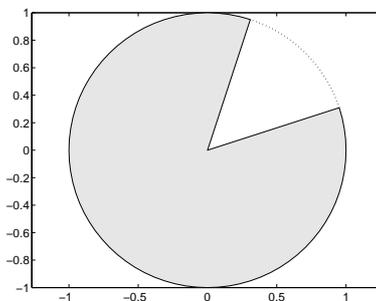
Bestimmen Sie das Volumen eines Tetraeders mit der Kantenlänge a . (Was im Skript steht, dürfen Sie der Einfachheit halber ohne weitere Herleitung verwenden.)

Aufgabe 85 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 7. Wichtig ist vermutlich Abschnitt 7.6. Interessant ist vielleicht Abschnitt 4.4.

Eine Christbaumkugel von 6 cm Durchmesser wiege 15 g. Setzen Sie eine Dichte von 2.5 g/cm^3 für das Material an und schätzen Sie die Wanddicke der Christbaumkugel.

Aufgabe 86 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 7. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 7.4 und 6.6. Interessant ist vielleicht Abschnitt 6.4.

Angenommen, Sie wollen einen kegelförmigen Lampenschirm basteln, so daß die Lampe 40 cm hoch ist und 60 cm Durchmesser hat. Dazu nehmen Sie ein kreisförmiges Stück Stoff, aus dem Sie einen Sektor heraus schneiden, vgl. das folgende Bild:



Welchen Durchmesser muß das Stück Stoff haben, und wieviel von dem Kreis wird letztlich benutzt (in Prozent)?

(Vernachlässigen Sie hier Feinheiten wie die Öffnung an der Spitze oder den zusätzlichen Stoff, den man braucht, um den Schirm zusammenzukleben und ggf. am Gerüst befestigen zu können.)

Aufgabe 87 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 8. Wichtig ist vermutlich Abschnitt 8.1.

Berechnen Sie den Grenzwert von f für $x \rightarrow 0$, wobei

$$f(x) = \left(\frac{\sqrt[3]{\frac{(x+3)^2}{x^2+3}} + \sqrt{\frac{(x+2)^2}{x^2+2}}}{\sqrt[4]{\frac{(x+4)^2}{x^2+4}} + \sqrt{\frac{(x+2)^2}{x^2+2}}} \right)^3 \cdot (3x^3 + 2x^2 + x) + 2 \frac{x-2}{x+3}.$$

Aufgabe 88 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 8. Wichtig ist vermutlich Abschnitt 8.1. Interessant ist vielleicht Abschnitt 9.3.

Für welche x sind f bzw. g stetig, für welche nicht?

$$f(x) = \begin{cases} -x & , x \leq -1, \\ 2+x & , -1 < x \leq 3, \\ 5-x & , 3 < x < 5, \\ 1 & , x = 5, \\ 0 & , x > 5, \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & , \frac{1}{x} \in \mathbb{N}, \\ 0 & , \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 89 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 8. Wichtig ist vermutlich Abschnitt 8.1. Interessant sind vielleicht die Abschnitte 9.3 und 10.3.

Besitzt f einen Grenzwert für $x \rightarrow \infty$? Wenn ja, versuchen Sie ihn zu berechnen.

$$f(x) = \frac{6(x^2 + \sin^2(x)) + 4(1 + \cos^2(x))}{3x^2 + 2}.$$

Aufgabe 90 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 8 oder 10. Wichtig ist vermutlich Abschnitt 8.2. Interessant ist vielleicht Abschnitt 10.1.

Sei das Polynom $p(x)$ mit reellen Zahlen a, b, c, d gegeben durch

$$p(x) = a + b \cdot (x - 1) + \frac{c}{2} \cdot (x - 1)^2 + \frac{d}{6} \cdot (x - 1)^3.$$

Bestimmen Sie alle (also die erste und alle höheren) Ableitungen von p im Punkt $x_0 = 1$.

Aufgabe 91 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 8. Wichtig ist vermutlich Abschnitt 8.2.

Leiten Sie die folgenden Funktionen ab. Linearisieren Sie sie dann bei $x_0 = 0$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{1+x}, \\ g(x) &= \sqrt{1+x^2}, \\ h(x) &= 1/\sqrt{10+x^3}, \\ j(x) &= \tan(x), \\ k(x) &= \cos(\sin(x^2+1)). \end{aligned}$$

Aufgabe 92 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 8. Wichtig ist vermutlich Abschnitt 8.2.

Linearisieren Sie bei $x_0 = 10$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x-9}, \\ g(x) &= \sin(x-10), \\ h(x) &= \cos(\pi x), \\ j(x) &= (x-10)^8, \\ k(x) &= \arctan\left(\frac{1}{(1+\sin(\pi x))^5}\right). \end{aligned}$$

Aufgabe 93 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 8 oder 10. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 8.2 und 10.5.

Leiten Sie $f(x) = x^x$ ab. Tip: Wechseln Sie von der Basis x zu einer von x unabhängigen Basis mit Hilfe einer Logarithmusfunktion.

Aufgabe 94 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 8 oder 10. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 10.5 und 8.2.

Wenn in Produkten oder Quotienten viele Faktoren auftauchen, ist unter Umständen das sogenannte logarithmische Differenzieren hilfreich. Dazu bildet man formal den Logarithmus des Ausdrucks, leitet ihn ab und löst nach der gesuchten Ableitung auf. Die Rechenregeln für den Logarithmus helfen, den Ausdruck in einfachere zu zerlegen.

a) Überzeugen Sie sich von der Regel

$$\left(\frac{f_1 \cdot f_2 \cdots f_m}{g_1 \cdot g_2 \cdots g_n} \right)' = \frac{f_1 \cdot f_2 \cdots f_m}{g_1 \cdot g_2 \cdots g_n} \cdot \left(\frac{f_1'}{f_1} + \cdots + \frac{f_m'}{f_m} - \frac{g_1'}{g_1} - \cdots - \frac{g_n'}{g_n} \right).$$

b) Leiten Sie

$$\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x^2+1)(x^2+2)(x^2+3)(x^2+4)}$$

ab.

Aufgabe 95 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 8. Wichtig ist vermutlich Abschnitt 8.2.

a) Entwickeln Sie Summen-, Produkt- und Kettenregel für die zweite Ableitung, also Formeln für

$$(f(x) + g(x))'' \quad (f(x) \cdot g(x))'', \quad (f(g(x)))''.$$

b) Wenn das gut geklappt hat, versuchen Sie's mit der dritten Ableitung.

c) Entwickeln Sie Summen-, Produkt- und Kettenregel für drei beteiligte Funktionen:

$$(f(x) + g(x) + h(x))' \quad (f(x) \cdot g(x) \cdot h(x))', \quad (f(g(h(x))))'.$$

Aufgabe 96 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 8. Wichtig ist vermutlich Abschnitt 8.2.

Mit welcher Rate ändert sich die kinetische Energie E eines Autos der Masse $m = 1000$ kg, das bei einer Geschwindigkeit von $v = 3$ m/s mit $a = 1$ m/s² beschleunigt wird? (Kinetische Energie $E = \frac{1}{2}mv^2$, Einheit J = kg m²/s².)

Aufgabe 97 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 8. Wichtig ist vermutlich Abschnitt 8.2.

a) Nennen Sie eine Funktion, für die $f'(x) = f(x)$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Dasselbe mit $f'(x) = Cf(x)$, wobei C mit $C \neq 0$ vorgegeben sei.

c) Versuchen Sie schließlich, zusätzlich $f(0) = A$ zu erfüllen:

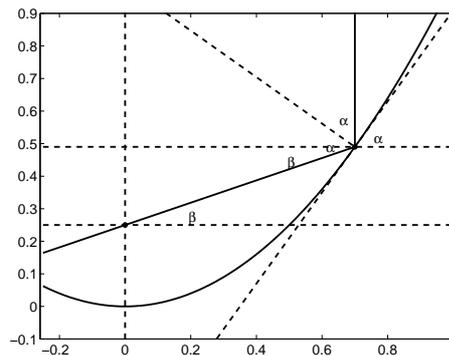
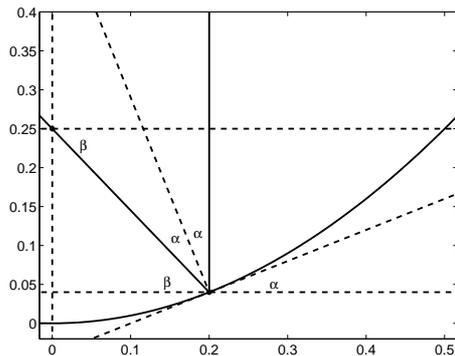
$$\begin{aligned} f'(x) &= Cf(x), \quad x \in \mathbb{R}, \\ f(0) &= A. \end{aligned}$$

Aufgabe 98 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 8. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 8.2, 6.6 und 5.1.

Zeigen Sie, daß der Radius stets senkrecht auf dem Kreisrand steht in folgendem Sinne: Wenn $y = f(x)$ die obere oder untere Hälfte eines Kreises um den Nullpunkt im \mathbb{R}^2 beschreibt, so ist $\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ senkrecht zur Tangenten an den Graphen von f im Punkte $\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$.

Aufgabe 99 (Etwas aufwendiger!) Die Aufgabe paßt zu Kapitel 8. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 8.2, 6.2, 10.3 und 10.4. Interessant sind vielleicht die Abschnitte 4.4 und 6.3.

Zeigen Sie die im Skript erwähnte Eigenschaft: Jeder Lichtstrahl, der parallel zur y -Achse auf die Parabel $y = ax^2$, $a > 0$, trifft, wird in Richtung des Brennpunkts reflektiert. Hinweis: Versuchen Sie, die folgenden Skizzen mit Leben zu füllen.



Es könnte sich als nützlich erweisen, das Additionstheorem

$$\cot(2\phi) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\tan(\phi)} - \tan(\phi) \right)$$

zu verwenden. Wenn Sie's tun, leiten Sie es aber auch her!

Aufgabe 100 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 8. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 8.3 und 4.4. Interessant ist vielleicht Abschnitt 9.6.

Welche der folgenden Funktionen besitzen (auf ihrem jeweiligen Bildbereich) Umkehrfunktionen? Geben Sie sie gegebenenfalls an.

$$\begin{aligned} f : x &\mapsto x && , x \in [-1, 1], \\ g : x &\mapsto x^2 && , x \in [-1, 2], \\ h : x &\mapsto x^2 && , x \in [1, 2], \\ j : x &\mapsto \frac{1}{1+x^2} && , x \in [0, \infty). \end{aligned}$$

Aufgabe 101 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 8. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 8.2, 8.3 und 4.4.

- Berechnen Sie die Umkehrfunktion von $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$ in der Nähe von $f(2)$.
- Leiten Sie die Umkehrfunktion ab und werten Sie die Ableitung bei $f(2)$ aus.
- Berechnen Sie alternativ die Ableitung der Umkehrfunktion bei $f(2)$ mit der Formel aus Abschnitt 8.3. Versichern Sie sich, daß die Ergebnisse übereinstimmen.

Aufgabe 102 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 8. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 8.2, 8.3 und 8.4.

Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion von f_i , $i = 1, 2$, jeweils bei $f_i(1)$:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \ln x + x, && x > 0, \\ f_2(x) &= \int_0^x e^{-t^2} dt, && x \geq 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 103 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 8. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 8.3, 8.2 und 10.3.

Sei $f(x) = \sin(x)$ und $\hat{x} = \pi/2$. Wegen $f'(\hat{x}) = 0$ ist die rechte Seite der Ableitungsregel

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f'}$$

für $x = \hat{x}$ undefiniert. Wo liegt das Problem?

Aufgabe 104 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 8. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 8.2, 8.3, 10.3 und 10.4.

- a) Zeigen Sie $\cos^2(t) = 1/(1 + \tan^2(t))$ für alle $t \in (-\pi/2, \pi/2)$.
- b) Leiten Sie die Ableitung des \arctan (vgl. Abschnitt 8.2.3 des Skripts) her. Orientieren Sie sich dabei an der Herleitung für den \arcsin in Abschnitt 8.3.

Aufgabe 105 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 8. Wichtig ist vermutlich Abschnitt 8.4.

Berechnen Sie

a) $\int_{-2}^5 2 dx,$

b) $\int_{-4}^4 x^3 + \frac{x}{1+x^2} dx.$

Aufgabe 106 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 8. Wichtig ist vermutlich Abschnitt 8.4. Interessant ist vielleicht Abschnitt 4.4.

Berechnen Sie durch (gegebenenfalls mehrfache) partielle Integration

a) $\int_0^\pi x \sin(x) dx,$

b) $\int x^2 \exp(x) dx,$

c) $\int \sin(2x) \cos(3x) dx.$

Aufgabe 107 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 8. Wichtig ist vermutlich Abschnitt 8.4.

Berechnen Sie

a) $\int \sin(2x + 5) dx,$

b) $\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)} dx,$

c) $\int \frac{2 \cos(x) + 3 \sin(x)}{\sin(x)} dx.$

Hinweis: Greifen Sie für c) auf Teil b) zurück.

Aufgabe 108 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 8. Wichtig ist vermutlich Abschnitt 8.4. Berechnen Sie durch geeignete Substitution

a) $\int_0^{\sqrt{\pi/2}} x(1+x^2) \cos(x^2) dx,$

b) $\int_0^{\pi/2} 30((\sin x)^4 + (\sin x)^2 + \sin x) \cos x dx,$

c) $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{\arctan x}} dx.$

(Unter Umständen ist anschließend auch partielle Integration erforderlich.)

Aufgabe 109 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 8. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 8.2 und 8.4.

Rüdiger Rastlos fährt mit 120 km/h gemütlich auf der Landstraße, als ihm doch plötzlich in einer Entfernung von nur 44 m von rechts eine Eiche in den Weg läuft. Rüdiger bremst augenblicklich (also nach einer halben Sekunde) und verzögert trotz nasser Fahrbahn mit respektablem -20 m/s^2 . Kann er die blöde Eiche und seinen schönen Frontspoiler noch retten?

Aufgabe 110 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 8. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 8.4, 8.2, 6.6 und 10.3. Interessant ist vielleicht Abschnitt 4.4.

a) Begründen Sie geometrisch, daß gilt:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4}.$$

(Tip: Einheitskreis.)

b) i) Bestimmen Sie $\int \cos^2(x) dx$ (z.B. durch partielle Integration).

ii) Berechnen Sie das Integral aus a), indem Sie $x = \sin(u)$ substituieren. (Achtung: Regel von rechts nach links anwenden.)

c) i) Zeigen Sie, daß $\frac{1}{2}(\arcsin(x) + x\sqrt{1-x^2})$ eine Stammfunktion von $\sqrt{1-x^2}$ ist.

ii) Wie hätte man sie herleiten können?

iii) Berechnen Sie das Integral aus a) damit erneut.

Aufgabe 111 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 8. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 8.4, 7.4 und 6.6. Interessant sind vielleicht die Abschnitte 6.2 und 6.4.

Das Volumen eines Körpers läßt sich bestimmen, indem eine Achse im Raum vorgegeben wird und man die Flächen aller dazu senkrechten Schnitte integriert. (Das können Sie einfach hinnehmen.) Man hat also z.B.

$$V = \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} F(z) dz,$$

wenn z_{\min} und z_{\max} der kleinste bzw. größte auftretende z -Wert ist und $F(\hat{z})$ die Fläche bezeichnet, die der Schnitt des Körpers mit der Ebene $z = \hat{z}$ besitzt. Leiten Sie auf diese Weise die Volumenformel für den geraden Kreiskegel her, wobei Sie nur die Kreisflächenformel als bekannt voraussetzen.

Aufgabe 112 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 8. Wichtig ist vermutlich Abschnitt 8.4.

Nennen Sie eine Stammfunktion von

$$-\frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3.$$

Aufgabe 113 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 8. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 8.1, 8.4 und 10.5. Interessant ist vielleicht Abschnitt 10.2.

Dies können Sie wahrscheinlich noch nicht sauber begründen, aber Sie können einen sicheren Tip abgeben: Ist die Fläche zwischen der x -Achse und den Graphen von f_i , $i = 1, 2, 3$, über dem Intervall $[0, 1]$ endlich? Dabei sei $f_i(0) = 0$ und für $x > 0$

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \sqrt{\frac{1}{x}}, \\ f_2(x) &= \frac{1}{x}, \\ f_3(x) &= \left(\frac{1}{x}\right)^2. \end{aligned}$$

Aufgabe 114 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 8. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 8.4, 8.2 und 4.5.

Mal ein anderes Verfahren: Finden Sie eine Stammfunktion zu $x^5 \exp(x)$ über den Ansatz

$$\int x^5 \exp(x) dx = (x^5 + a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0) \cdot \exp(x).$$

Aufgabe 115 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 8. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 8.2 und 8.4.

Finden Sie alle Funktionen, deren zweite Ableitung $x + \sin(x)$ lautet.

Aufgabe 116 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 9. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 9.1 und 10.3. Interessant sind vielleicht die Abschnitte 10.1 und 10.2.

Was sind die natürlichen Definitionsbereiche der folgenden Funktionen?

$$\begin{aligned} f(x) &= x, \\ g(x) &= \frac{2x^5 - 2x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x - 1}{2x^2 + 1}, \\ h(x) &= (x^2 - 1)(x - 1), \\ j(x) &= 1 - \sqrt{x}, \\ k(x) &= \frac{1 + x}{1 - \sqrt{x}}, \\ \ell(x) &= \sqrt{\arcsin x}, \\ m(x) &= \frac{1 + x}{\arcsin x}. \end{aligned}$$

Aufgabe 117 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 9. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 9.2 und 10.3. Interessant sind vielleicht die Abschnitte 10.1 und 10.2.

Welche der folgenden Funktionen sind ungerade, welche gerade?

$$\begin{aligned} f(x) &= x^6 + 3x^2 + 1, \\ g(x) &= x^5 + x^3 + 1, \\ h(x) &= x + \frac{1}{x}, \\ j(x) &= \frac{\sin(x) + x}{\cos(x) + x^2}. \end{aligned}$$

Aufgabe 118 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 9. Wichtig ist vermutlich Abschnitt 9.2.

- a) Zeigen Sie: Die Umkehrfunktion einer ungeraden Funktion ist ungerade.
- b) Und wie steht's mit geraden Funktionen?

Aufgabe 119 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 9. Wichtig ist vermutlich Abschnitt 9.2.

Konstruieren Sie eine Funktion, die gerade und gleichzeitig ungerade ist.

Aufgabe 120 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 9. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 9.2 und 10.3. Interessant ist vielleicht Abschnitt 3.2.

Mit "Periode" sei hier stets die kleinste Periode gemeint:

- a) Welche Periode hat $\sin(2x) + \sin(3x)$?
- b) f_1 habe die Periode $k_1 \in \mathbb{N}$ und f_2 die Periode $k_2 \in \mathbb{N}$. Wie lautet die Periode von $f_1 + f_2$?

Aufgabe 121 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 9 oder 10. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 9.3 und 10.2. Interessant ist vielleicht Abschnitt 9.1.

Wieviele Pole haben die folgenden rationalen Funktionen?

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}, \\ g(x) &= \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 1}, \\ h(x) &= \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2x + 1}, \\ j(x) &= \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2x}, \\ k(x) &= \frac{x^2 + x}{x^2 + 2x}, \end{aligned}$$

Aufgabe 122 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 9. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 9.4 und 10.4. Interessant sind vielleicht die Abschnitte 9.9, 10.1, 10.2 und 8.1.

Geben Sie Asymptoten für die folgenden Funktionen an:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x + 3, \\ g(x) &= \frac{1}{x}, \\ h(x) &= \frac{1}{x} + x, \\ j(x) &= \frac{1}{x^2} + x^2, \\ k(x) &= \arctan(x). \end{aligned}$$

Aufgabe 123 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 9. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 9.3, 9.5 und 8.1.

Geben Sie einen Tip ab:

- Kann eine stetige Funktion auf dem Intervall $[0, 1]$ unbeschränkt sein?
- Kann sie unendlich viele Nullstellen haben?

Aufgabe 124 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 9. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 9.6, 8.2 und 10.3. Interessant ist vielleicht Abschnitt 10.1.

Welche der folgenden Funktionen steigen monoton im angegebenen Bereich, welche fallen monoton?

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - 2)^2, \quad x \geq 0, \\ g(x) &= (x - 2)^2, \quad x \leq 0, \\ h(x) &= x^5, \quad x \in \mathbb{R}, \\ j(x) &= \sin x, \quad x \in [0, 3], \\ k(x) &= \cos x, \quad x \in [0, 3], \\ \ell(x) &= \sqrt{1 - x}, \quad x \in [-1, 1]. \end{aligned}$$

Aufgabe 125 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 9. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 9.7, 10.4 und 8.2. Interessant sind vielleicht die Abschnitte 3.1 und 10.1.

Welche der folgenden Funktionen haben in $x_0 = 0$ ein lokales Extremum?

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3, \quad x \in \mathbb{R}, \\ g(x) &= x^3, \quad x \in [0, \infty), \\ h(x) &= |x|, \quad x \in \mathbb{R}, \\ j(x) &= \tan(x^2), \quad x \in [-1, 1], \\ k(x) &= (x - 1)^2, \quad x \in \mathbb{R}, \\ \ell(x) &= x^2 - 1, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Aufgabe 126 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 9. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 9.6, 9.7 und 8.2. Interessant ist vielleicht Abschnitt 10.1.

Bestimmen Sie relative und absolute Maxima und Minima von

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 10$$

auf dem Intervall $[-4, 4]$.

Aufgabe 127 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 9. Wichtig ist vermutlich Abschnitt 9.7.

Die Minima und Maxima von f seien bekannt, und es sei

$$g(x) := af(cx + d) + b \quad \text{mit } a, c \neq 0.$$

Was kann man über die Maxima und Minima von g aussagen?

Aufgabe 128 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 4 oder 9. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 4.4, 9.5, 9.6 und 9.7. Interessant ist vielleicht Abschnitt 10.1.

a) $x = -1$ löst die Gleichung

$$x^3 - 5x - 4 = 0.$$

Finden Sie die anderen Lösungen.

b) Für welche α hat

$$x^3 - 5x - 4 = \alpha$$

keine, eine, zwei, drei bzw. mehr Lösungen?

Aufgabe 129 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 9 oder 7. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 9.7, 4.4, 7.5, 7.6, 7.2 und 8.2.

a) Wie muß das Verhältnis zwischen Höhe und Radius einer zylindrischen Getränkedose aussehen, damit bei vorgegebenem Volumen und fester Blechdicke möglichst wenig Blech verbraucht wird? (Vernachlässigen Sie alles, was die Aufgabe verkomplizieren würde, also etwa zusätzliches Material an Kanten und Nähten, Leerraum über dem Getränk, Verschluß usw..)

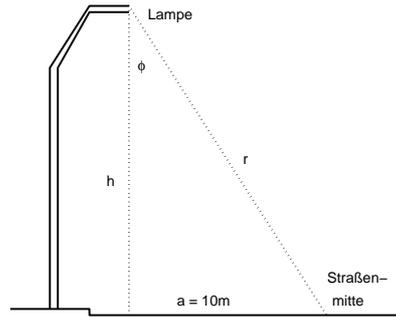
b) Setzen Sie das benötigte Material ins Verhältnis mit dem Material, das Sie bei einer kugelförmigen bzw. einer würfelförmigen Verpackung brauchen würden.

Aufgabe 130 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 9. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 9.7 und 8.2. Interessant sind vielleicht die Abschnitte 5.1, 6.9, 4.4, 9.3, 9.7 und 11.3.

Die Funktion $f(y)$ beschreibe den Abstand der Punkte $\binom{0}{y}$ von der Normalparabel, also vom Graphen der Funktion $y = x^2$. Berechnen Sie $f(y)$ und machen Sie eine Skizze.

Aufgabe 131 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 9 oder 6. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 9.7, 6.4 und 10.3.

Eine Straße soll durch am Straßenrand stehende Lampen beleuchtet werden. Die Entfernung der Leuchtquelle zur Straßenmitte betrage 10 m, auf Straßenhöhe gemessen, vgl. das folgende Bild.



Wie hoch müßte man die Lampen anbringen, damit die Mitte der Straße möglichst hell beleuchtet wird, wenn die Beleuchtungsstärke im Straßenmittelpunkt dem Kosinus des Winkels ϕ proportional und dem Quadrat des Abstandes r von der Lichtquelle umgekehrt proportional ist?

Aufgabe 132 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 9 oder 6. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 9.7, 8.2 und 6.6.

Welchen Winkel ϕ muß ein Kreissektor haben, damit der Umfang bei gegebener Fläche minimal wird? (Der Vollkreis sei hierbei ausgeschlossen.)

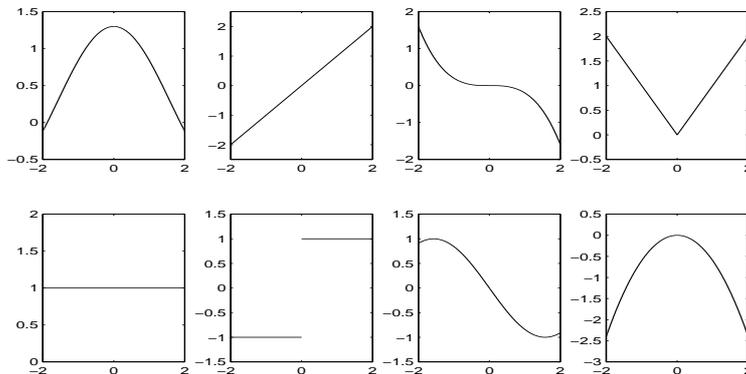
Aufgabe 133 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 9. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 9.8, 10.3 und 8.2.

Welche der folgenden Funktionen sind im angegebenen Bereich konvex, welche konkav?

- $f(x) = x^2, \quad x \in \mathbb{R},$
- $g(x) = x^3, \quad x \in \mathbb{R},$
- $h(x) = x^3, \quad x \geq 0,$
- $j(x) = x^3, \quad x \leq 0,$
- $k(x) = \cos x, \quad x \in [-1, 1].$

Aufgabe 134 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 9. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 9.6, 9.7 und 8.2. Interessant ist vielleicht Abschnitt 9.8.

Die zweite Reihe der folgenden Skizzen von Graphen soll Ableitungen zu den Funktionen darstellen, deren Graphen in der ersten Reihe dargestellt sind. Leider ist die Reihenfolge etwas durcheinandergeraten. Ordnen Sie!



Aufgabe 135 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 9. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 9.2, 9.5, 9.6, 9.7, 9.8, 8.2 und 10.5. Interessant ist vielleicht Abschnitt 9.9.

Diskutieren Sie

$$f(x) = \exp(x) + \exp(-x).$$

Aufgabe 136 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 9 oder 10. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 9.2, 9.5, 9.6, 9.7, 9.8 und 10.3. Interessant ist vielleicht Abschnitt 8.2.

Diskutieren Sie $f(x) = \sqrt{3} \sin(4x) - 3 \cos(4x)$ auf $[0, 2\pi]$.

Aufgabe 137 (Vielleicht etwas kniffliger!) Die Aufgabe paßt zu Kapitel 9. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 9.2, 9.5, 9.6, 9.7, 9.8, 8.2 und 10.3. Interessant sind vielleicht die Abschnitte 9.9, 10.4 und 10.2.

Diskutieren Sie (soweit möglich)

$$f(x) = \sin(x^2)$$

für $x \in [-1/2, 1]$.

Aufgabe 138 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 9. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 9.2, 9.3, 9.4, 9.5, 9.6, 9.7, 9.8 und 8.2. Interessant ist vielleicht Abschnitt 10.2.

Diskutieren und vergleichen Sie die beiden Funktionen

$$f_1(x) = \frac{x(x-1)}{x-2},$$

$$f_2(x) = \frac{x(x-2)}{x-1}.$$

Aufgabe 139 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 9. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 9.2, 9.5, 9.6, 9.7, 9.8, 8.2 und 10.2.

Diskutieren und vergleichen Sie für $x \in (0, 1)$ die beiden Funktionen

$$f_1(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6,$$

$$f_2(x) = \frac{1 - x^7}{1 - x}.$$

Aufgabe 140 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 9 oder 11. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 9.6, 8.2 und 11.3. Interessant ist vielleicht Abschnitt 10.3.

Zeigen Sie die in Abschnitt 11.4 des Skripts erwähnte Abschätzung

$$x - \frac{1}{6}x^3 \leq \sin(x)$$

für $x \in [0, 1]$, indem Sie eine Kurvendiskussion für

$$f(x) = \sin(x) - \left(x - \frac{1}{6}x^3\right)$$

durchführen. ($\sin(x) \leq x$ kann als bewiesen vorausgesetzt werden.)

Aufgabe 141 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 9 oder 10. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 9.8 und 9.2. Interessant ist vielleicht Abschnitt 10.1.

- Zeigen Sie, daß ein Polynom f vom Grad 3 genau einen Wendepunkt x_w besitzt.
- Zeigen Sie, daß der Graph eines solchen Polynoms punktsymmetrisch zum Wendepunkt ist. Tip: Begründen Sie, daß $h(z) := f(z + x_w) - f(x_w)$ ungerade ist.

(Vgl. Aufgabe 162.)

Aufgabe 142 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 9 oder 10. Wichtig sind vermutlich der Abschnitt 10.1 sowie die Abschnitte 9.3, 9.5, 9.7 und 9.8. Interessant sind vielleicht die Abschnitte 9.2 und 9.6.

Tragen Sie allgemeine Aussagen über Polynome vom Typ

$$f(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

zusammen, wobei Sie die Behauptungen der Aufgaben 141 und 162 unbewiesen verwenden können. Was können Sie über die Anzahl der Nullstellen, Monotonieverhalten, Minima und Maxima, Wendepunkte, Krümmungsverhalten und Symmetrien aussagen?

Aufgabe 143 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 10. Wichtig ist vermutlich Abschnitt 10.1.

Führen Sie die folgenden Polynomdivisionen durch:

a) $(4x^5 - 10x^4 + 14x^3 + 7x^2 + 9x - 15) : (x^2 - 3x + 5),$

b) $(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) : (2x^2 + 1).$

Aufgabe 144 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 10. Wichtig ist vermutlich Abschnitt 10.1.

Konstruieren Sie a, b, c und d in

$$p(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$$

so, daß p die Nullstellen $-1, 1, \sqrt{2}$ und $2\sqrt{2}$ hat.

Aufgabe 145 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 10 oder 8. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 10.2 und 8.4.

Berechnen Sie

$$\int_1^2 \frac{2}{x^2 + 2x} dx$$

mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung des Integranden.

Aufgabe 146 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 10. Wichtig ist vermutlich Abschnitt 10.2.

Hat $f(x) = \frac{x}{x-2}$ eine Symmetrie? Geben Sie sie gegebenenfalls an.

Aufgabe 147 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 10. Wichtig ist vermutlich Abschnitt 10.3.

a) *Überzeugen Sie sich, daß zusätzlich zu den im Skript genannten Beziehungen*

$$\begin{aligned} \sin(-x) &= -\sin(x), \\ \sin(x + 2\pi) &= \sin(x) \end{aligned}$$

auch die Beziehungen

$$\begin{aligned} \sin(x + \pi) &= -\sin(x), \\ \sin(\pi - x) &= \sin(x) \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten.

b) *Geben Sie die folgenden Werte an:*

$$\sin\left(-\frac{10}{3}\pi\right), \quad \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right), \quad \sin\left(-\frac{1}{6}\pi\right), \quad \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right), \quad \sin\left(\frac{5}{6}\pi\right), \quad \sin\left(\frac{5}{4}\pi\right),$$

indem Sie diese Beziehungen und Tabelle 10.1 des Skripts verwenden.

Aufgabe 148 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 10. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 10.3 und 10.4. Interessant ist vielleicht Abschnitt 3.7.

Beweisen Sie das folgende Additionstheorem für die Tangensfunktion:

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}.$$

Aufgabe 149 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 10. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 10.3 und 10.4.

Beseitigen Sie die trigonometrischen Funktionen und ihre Umkehrfunktionen aus den folgenden Funktionsvorschriften:

$$\begin{aligned} f(x) &= \arcsin(\cos x) \quad , x \in [0, \pi/2], \\ g(x) &= \cos(\arcsin x) \quad , x \in [0, 1], \\ h(x) &= \sin(\arctan x) \quad , x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Aufgabe 150 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 10. Wichtig ist vermutlich Abschnitt 10.3, insbesondere die Tabelle 10.1.

a) *Rechnen Sie*

$$f(t) = -2 \sin\left(\frac{1}{2}\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

in die Form (10.9) des Skripts um.

b) *Rechnen Sie*

$$g(t) = \frac{3}{2} \sin(2t) + \frac{3}{2} \sqrt{3} \cos(2t)$$

in die Form (10.8) des Skripts um.

Aufgabe 151 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 10 oder 9. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 9.7 und 10.3, insbesondere die Tabelle 10.1.

Allgemein definiert man die Amplitude einer periodischen Schwingung als die maximale Abweichung vom Mittelwert, also

$$\frac{1}{2}(\text{absolutes Maximum} - \text{absolutes Minimum}).$$

Bestimmen Sie Amplituden und Perioden von

a) $f(x) = 3 \sin(3x) - 4 \cos(3x),$

b) *(Vielleicht etwas kniffliger!)* $g(x) = 2 \sin(x) - \cos(2x).$

Aufgabe 152 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 10. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 10.3, 10.4 und 9.3.

Wo haben die folgenden Funktionen Pole?

$$\begin{aligned} f(x) &= \tan(x) + \cot(x), \\ g(x) &= \tan(x) \cdot \cot(x), \\ h(x) &= \frac{\tan(x)}{\cot(x)}. \end{aligned}$$

Aufgabe 153 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 10. Wichtig ist vermutlich Abschnitt 10.5.

Schreiben Sie $f(x) = 5 \cdot 10^x$ in der Form $A \cdot \exp(\lambda x)$.

Aufgabe 154 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 10. Wichtig ist vermutlich Abschnitt 10.5.

Klären Sie mit Hilfe der Rechengesetze für Logarithmus und Exponentialfunktion:

- a) Wie verhält sich $\ln(\sqrt{x})$ zu $\ln(x)$?
- b) Wie verhält sich $\exp(\frac{x}{2})$ zu $\exp(x)$?

Aufgabe 155 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 10. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 10.5 und 4.2.

- a) Angenommen, Sie stellen in einer Probe 10^{18} Atome eines radioaktiven Isotops fest, und exakt fünf Tage später sind es noch $5 \cdot 10^{16}$. Wie können Sie die Halbwertszeit schätzen?
- b) Angenommen, Sie machen eine weitere Messung (etwa $2.4 \cdot 10^{15}$) nach zehn Tagen und wollen auch diesen Wert berücksichtigen. Welches mathematische Problem entsteht dadurch und wie würden Sie intuitiv darauf reagieren?

Aufgabe 156 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 10. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 10.5 und 4.4.

Zeigen Sie für $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $b > 0$:

$$a^{\log_b(c)} = c^{\log_b(a)}.$$

Aufgabe 157 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 10. Wichtig ist vermutlich Abschnitt 10.5.

- a) Berechnen Sie ohne Taschenrechner:

$$\log_2(0.25), \quad \log_7(1), \quad \log_4(2), \quad \log_5(25).$$

- b) Berechnen Sie ohne Taschenrechner

$$3 + \log_{10}(5) + \log_{10}(80) - 2 \log_{10}(200).$$

Aufgabe 158 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 10. Wichtig ist vermutlich Abschnitt 10.5.

Klären Sie ohne Zuhilfenahme eines Taschenrechners:

- a) Wieviele Dezimalstellen "vor dem Komma" hat $\exp(10)$?
- b) Wieviele Dezimalstellen hat 2^{23} ?

Hinweis: In Abschnitt 10.5 des Skripts sind die ungefähren Werte von $\ln(2)$ und $\ln(10)$ angegeben.

Aufgabe 159 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 10. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 10.5, 10.1 und 4.4.

- a) Zeigen Sie, daß Monome auf der doppelt-logarithmischen Skala als Geraden wiedergegeben werden. (Tip: Hilfsvariable $\xi = \log_{10} x$ und $\eta = \log_{10} y$ einführen.)
- b) Zeigen Sie, daß Potenzfunktionen auf der semilogarithmischen Skala als Geraden wiedergegeben werden. (Tip: Hilfsvariable $\eta = \log_{10} y$.)

Aufgabe 160 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 11. Wichtig ist vermutlich Abschnitt 11.2.

Das Skript erwähnt die Implikation

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq a < b \\ 0 \leq c < d \end{array} \right\} \implies 0 \leq ac < bd.$$

Wie stehen 0 , ac und bd in den folgenden Fällen in Beziehung? Versuchen Sie, die Beziehungen so "scharf" wie möglich zu fassen.

- 1) $0 \leq a \leq b, 0 \leq c < d$,
- 2) $0 < a \leq b, 0 \leq c < d$,
- 3) $a < 0 < b, 0 \leq c < d$,
- 4) $a < 0 < b, 0 \leq d < c$.

Aufgabe 161 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 11. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 11.3 und 11.2.

Welche der folgenden Aussagen sind für alle $x \in \mathbb{R}$ äquivalent? Welche implizieren welche?

- (1) $x > 1$,
- (2) $-x > -1$,
- (3) $-x < -1$,
- (4) $x^2 > x$,
- (5) $2x < 2$,
- (6) $x^3 > x^2$,
- (7) $x^3 + x^2 + x > x^3 + x^2 + 1$,
- (8) $5(x - 1) > 1$,
- (9) $5(x - 1) > 0$,
- (10) $x + 1 > 0$,
- (11) $|x| > 1$,
- (12) $|x - 1| > 1$.

Aufgabe 162 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 11, 10 oder 9. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 11.3, 11.2, 9.6 und 9.7. Interessant sind vielleicht die Abschnitte 9.9 und 10.1.

Zeigen Sie, daß ein Polynom vom Grad 3

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad a_3 \neq 0,$$

genau dann monoton auf \mathbb{R} ist, wenn $a_2^2 \leq 3a_1a_3$. (Vgl. Aufgabe 141.)

Aufgabe 163 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 11. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 11.3 und 11.2.

Versuchen Sie, die folgenden Bedingungen geschickt zusammenzufassen, um die Fallunterscheidungen wenigstens teilweise loszuwerden: Vorausgesetzt sei, daß stets $a \neq 0$ und $c \neq 0$ gelte.

- 1) Im Falle $a > 0$ sei $b > 0$. Außerdem sei
 - 1.a) für $c > 0$ die Bedingung $\frac{d}{b} > \frac{a}{c}$,
 - 1.b) für $c < 0$ die Bedingung $\frac{d}{b} < \frac{a}{c}$ erfüllt.
- 2) Im Falle $a < 0$ sei auch $b < 0$. Außerdem sei
 - 2.a) für $c > 0$ die Bedingung $\frac{d}{b} < \frac{a}{c}$,
 - 2.b) für $c < 0$ die Bedingung $\frac{d}{b} > \frac{a}{c}$ erfüllt.

Aufgabe 164 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 11. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 11.3 und 11.2.

Lösen Sie die folgenden Ungleichungen:

$$a) \frac{x-1}{x+1} > 0,$$

$$b) \frac{(x-2)x}{x+1} < \frac{x-1}{x+1},$$

$$c) \frac{(x-1)(x+1)}{x} < \frac{(x-1)x}{x+1}.$$

Aufgabe 165 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 11. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 11.3 und 11.2.

Lösen Sie die folgenden Ungleichungen:

$$a) |x-3| \leq |x+2|,$$

$$b) \left| \frac{x+4}{x-2} \right| < x,$$

$$c) x(2-x) > 1+|x|.$$

Aufgabe 166 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 11. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 11.3 und 11.2.

Zeigen Sie

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$$

für alle $x, y > 0$.

Aufgabe 167 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 11. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 11.5, 11.4, 11.3 und 11.2.

Beweisen Sie die folgenden Ungleichungen:

$$a) |x+y| \leq |x| + |y| \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R} \text{ (die sogenannte "Dreiecksungleichung")},$$

$$b) \frac{x}{1+x} \leq \frac{y}{1+y} \quad \text{für alle } -1 < x \leq y,$$

$$c) \frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|} \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

a) ist vielleicht schon in Aufgabe 3 gezeigt worden. Tip: Benutzen Sie a) und b) für c).

Aufgabe 168 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 11. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 11.5, 11.4, 11.3, 11.2 und 10.3.

Leiten Sie mit Hilfe von $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ aus

$$\cos(x) \geq 1 - \frac{1}{2}x^2$$

die Abschätzung

$$\sin(x) \leq x - \frac{1}{8}x^3$$

für $x \in [0, 1]$ ab (oder, wenn Ihnen das nicht gelingt, eine andere Abschätzung, die aber jedenfalls besser sein soll als $\sin(x) \leq x$).

Aufgabe 169 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 11 oder 6 Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 11.3, 11.2, 9.7, 10.3 und 6.7.

Versuchen Sie, auf zwei Arten zu zeigen, daß die Halbachsen einer Ellipse, die wie im Skript angegeben symmetrisch zur x -Achse und zur y -Achse des \mathbb{R}^2 liegt, den größten bzw. kleinsten Abstand ihrer Randpunkte zur Null markieren:

- Verwenden Sie die implizite Normalform und schätzen Sie elementar ab.
- Verwenden Sie die explizite Parametrisierung des Skripts und führen Sie eine Kurvendiskussion durch.

Aufgabe 170 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 11. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 11.3 und 11.2.

Ihr Freund Erwin erzählt, er wolle einen Raum fliesen. Er habe noch ein paar Fliesen im Keller, das müsse "eigentlich" reichen. Auf Nachfrage kann er aber nur sagen:

- Die Fliesen sind quadratisch und haben 20 bis 30 cm Kantenlänge.
- Er hat 100 bis 150 davon vorrätig.
- Der Raum ist 3 bis 4 m breit und 4 bis 5 m lang.

Ohne sich um Parkettierungsprobleme zu kümmern: Stellen Sie eine Prognose, welchen Prozentsatz des Raumes Erwin mindestens und welchen höchsten verlegt bekommt. Stehen die Chancen gut, daß die Fliesen reichen?

Aufgabe 171 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 11. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 11.5, 11.4 und 10.3. Interessant sind vielleicht die Abschnitte 10.1, 10.2 und 3.7.

Schätzen Sie die folgenden Ausdrücke für $0 < x < 1$ jeweils gegen geeignete Cx^k mit $k \in \mathbb{N}$ und $C > 0$ ab:

- $\sin(x) + x \cos(x) + x \sin(x)$,
- $1 - (x - 1)^2 - x^2$,
- $\sqrt{1 + 2x} - 1$,
- $|\cos(\frac{\pi}{2} + x)|$,
- $\frac{x^3}{x + 1}$,
- $\frac{1 + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^4}}$.

Aufgabe 172 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 11. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 11.5, 11.4, 11.3 und 11.2. Interessant ist vielleicht Abschnitt 10.1.

Begründen Sie, daß es kein $C > 0$ und $k \geq 1$ gibt, so daß

$$\sqrt{x} \leq Cx^k$$

gilt für alle $0 < x < 1$.

Aufgabe 173 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 11. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 11.5 und 11.4.

a) Schätzen Sie

$$f(x) = \frac{x^7 + 2x^5 - x^3/2 + x}{x^2 - 2x + 4}$$

für $0 < x < 1$ nach oben gegen ein Cx^k ab mit $k \in \mathbb{N}_0$ und $C > 0$. Verfeinern Sie die Abschätzung für $0 < x < a$ mit $a = 1/2$ und $a = 1/10$. Wie klein kann C wohl werden, wenn a "fast null" ist?

b) Schätzen Sie in a) stattdessen nach unten ab.

c) Versuchen Sie dasselbe wie in a) für

$$g(x) = \frac{x^7 + 2x^5 - x^3/2 + x}{x^2 - 2x + 1}.$$

(Vorsicht, Falle!)

Aufgabe 174 Die Aufgabe paßt zu Kapitel 11. Wichtig sind vermutlich die Abschnitte 11.5, 11.4 und 10.5. Interessant ist vielleicht Abschnitt 8.2.

Eine Konsequenz des sogenannten Taylorschen Satzes ist die Gleichung

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{1}{2}f''(0) \cdot x^2 + \frac{1}{6}f'''(\xi) \cdot x^3,$$

worin die "Zwischenstelle" ξ von x abhängt und so gewählt werden kann, daß sie zwischen 0 und x liegt. (Sie müssen den Satz noch nicht kennen, aber bei Interesse können Sie sich in Abschnitt 12.6 einen Eindruck verschaffen.)

Verwenden Sie die vorliegende Gleichung, um abzuschätzen, wie gut das Polynom

$$p(x) = 1 - x + \frac{1}{2}x^2$$

die Funktion

$$f(x) = \exp(-x)$$

auf dem Intervall $[0, 1]$ nähert. Schätzen Sie sowohl den absoluten als auch den relativen Fehler. Die Fehlerschranken dürfen (und sollen) von x abhängen, müssen aber ohne die Exponentialfunktion auskommen.