Übungsaufgaben

Mathematik Vorkurs im Studiengang Informations- und Kommunikationstechnik

Wintersemester 2003/2003

1 Zahlen

keine Aufgaben

2 Rechnen mit reellen Zahlen

Aufgabe 2.1

Schreiben Sie als „Kommazahl"

a) $1 + 10^{-3}$ b) $2{,}4 \cdot 10^{-5}$ c) $0{,}003 \cdot 10^{5}$

Aufgabe 2.2

Berechnen Sie

a) $2 \cdot (-4) + (-3) \cdot (-7)$ b) $(-4) \cdot (-3a - (-2a)) + 2a - 3$

c) $21a \cdot (-4a) + (-9b) \cdot (-2a)$ d) $a \cdot (7a - (-4a)) + 2ab - 8$

Aufgabe 2.3

Multiplizieren Sie aus und fassen Sie zusammen.

a) $2(x - 3y)$ b) $-a\,(4 - 2b + \frac{1}{4})$

c) $(a + b)\,(a + b)\,(a + b)$

d) $(-\frac{3}{2}x^2 + 2yx - \frac{1}{4}y^2) \cdot (-\frac{7}{2}x + \frac{1}{4}y)$

Aufgabe 2.4

Klammern Sie aus und fassen Sie zusammen:

a) $8(-11) + 11 \cdot 17$ b) $8ab + 20b^2$

c) $8(7a - 5b) - 5c(7a - 5b)$

Aufgabe 2.5

Berechnen Sie <u>ohne</u> Taschenrechner

a) $\frac{3}{4} \cdot \frac{36}{45} - \frac{11}{6} : \frac{11}{3}$ b) $\frac{7}{8} \cdot \frac{45}{9} : \frac{9}{45} - \frac{1}{4}$ c) $\frac{5}{7} + \left(\frac{2}{6} - \frac{6}{2}\right) \cdot \frac{14}{24}$

Aufgabe 2.6

Kürzen Sie soweit wie möglich

a) $\frac{144}{168}$ b) $\frac{42ab^2c}{22a^2bc}$ für $a, b, c \neq 0$

c) $\frac{-x + 2y}{-2y + x}$ für $x \neq 2y$

d) $\frac{3xu - 4xv + 6yu - 8yv}{xv - 3xu + 2yv - 6yu}$ für $x \neq -2y$ und $v \neq 3u$

e) $\frac{25a^3 - 40a^2b + 4ab^2}{25a^3 - 4ab^2}$

Aufgabe 2.7

Vereinfachen Sie:

a) $3{,}2z - 4y + 8z - 0{,}5x + 1{,}5y - (-3z)$

b) $\frac{3}{5}\left(\frac{8}{9}a\left(-\frac{6}{2}\right) + \frac{7}{15}a\right) - \frac{11}{60}\left(-\frac{12}{11}a + \frac{30}{15}a\right)$

c) $5\,(x + 2\,(x - y - 3\,(x - y)) + 4\,(x - y) - 2x)$

d) $2y \cdot \frac{1}{6} - \left(\frac{3}{4}y \cdot \frac{10}{27} - \frac{7}{12}y^2 \cdot \frac{5}{14}\right)$

e) $\frac{5}{12}\left(\frac{8}{15}b\left(-\frac{5}{4}\right) + \frac{8}{15}b\right) - \left(\frac{13}{120}\left(-\frac{15}{13}b\right) + \frac{7}{12}b\right)$

f) $\dfrac{x}{1-\dfrac{1}{1-x}}$ für $x \neq 0$ und $x \neq 1$

g) $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}}$ für $x \neq 0$ und $x \neq 1$

h) $\left(\dfrac{25ax}{12by}-\dfrac{16bx}{3ay}\right):\dfrac{8x}{21y}$ für $a, b, x, y \neq 0$

Aufgabe 2.8

Berechnen bzw. vereinfachen Sie ohne Taschenrechner

a) $\sqrt{(-4)^2}$

b) $\sqrt{9 \cdot 16 \cdot 25}$

c) $\sqrt{9 \cdot a^2 \cdot c}$ für $c \geq 0$

d) $\sqrt{\dfrac{625}{64}}$

e) $2\sqrt{3} \cdot \sqrt{\dfrac{7}{3}} \cdot 5 \cdot \sqrt{\dfrac{16}{7}}$

f) $\sqrt{8a+4}$ für $a \geq -\dfrac{1}{2}$

g) $\sqrt{5}\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)$

h) $\dfrac{\sqrt{4a+6b}}{\sqrt{2a+3b}}$ für $a, b \geq 0$

Aufgabe 2.9

Für welche reelle Zahlen a, x, z existiert die Wurzel?

a) $\sqrt{4+a}$

b) $\sqrt{x}$

c) $\sqrt{-3-3z}$

d) $\sqrt{x^2-1}$

e) $\sqrt{-x^2-1}$

f) $\sqrt{1-a^2}$

Aufgabe 2.10

Für welche reellen Zahlen a, b, x, y sind die nachfolgenden Ausdrücke definiert? Vereinfachen Sie die Ausdrücke.

a) $-7\sqrt{a}-3\sqrt{b}+8\sqrt{a}$

b) $\dfrac{\left(\sqrt{x}-2\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+2\sqrt{y}\right)}{5x-20y}$

c) $\sqrt{1-x^2} : \sqrt{1-x}$

d) $\left(\sqrt{a}-\sqrt{5}\right)^2+\left(\sqrt{a}+\sqrt{5}\right)^2$

e) $\left(2\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{y}-2\sqrt{x}\right)$

f) $\sqrt{9a^2-6a+1}$

g) $\dfrac{4\sqrt{1+2x}}{\sqrt{1-4x^2}}$

h) $\sqrt{(a-2)^4}$

i) $\sqrt{a^2-10a+25}$

Aufgabe 2.11

Für welche Werte von a, x, y, z ist der jeweilige Ausdruck nicht definiert:

a) $\dfrac{1}{x^2}$

b) $\dfrac{1}{1-x}$

c) $\dfrac{1}{(x-1)(x+1)}$

d) $\dfrac{3-x}{9-3x}$

e) $\dfrac{14}{z^2+1}$

f) $\dfrac{9}{a^2-1}$

Aufgabe 2.12

Lösen Sie das Betragszeichen auf:

a) $|11-23|$ b) $|a|$ für $a < 0$ b) $|-a|$ für $a < 0$

c) $|a^3|$ für $a < 0$

d) $|a^2 - 13a + 14 - 4 + 3a^2 + 2\cdot(11a - 3) - 9a|$

e) $|34a - 2\cdot(345a - 12)|$ für $a < 0$

f) $|34a - 2\cdot(345a+12)|$ für $a > 0$

Aufgabe 2.13

Beseitigen Sie die Wurzel

a) $\sqrt{a^2}$

b) $\sqrt{(-a)^2}$

c) $\sqrt{x^2+4x+4}$

Aufgabe 2.14

Berechnen Sie ohne Taschenrechner

a) $\frac{6}{5}\cdot 2^{-1}-\frac{7}{5}\cdot 2^{-1}$ b) $1{,}3^2$

c) $(-0{,}1)^5$ d) d) $(4{,}8\cdot 10^4) : (2{,}4\cdot 10^{-4})$

e) $\frac{6{,}8\cdot 10^{-3}}{0{,}17\cdot 10^2}$ f) $0{,}25^5 \cdot 40^5$

g) $(-2^2)^3$ h) $((-2)^2)^3$

i) $\sqrt[4]{\frac{16}{625}}$ j) $\left(\sqrt[3]{2}\right)^6$

k) $\left(\sqrt[3]{2^2}\cdot\sqrt[4]{2^{-3}}\right)^{12}$ l) $\sqrt[4]{9}\cdot\left(\sqrt[4]{3}\right)^2$

m) $\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt[4]{2}-1\right)\left(\sqrt[4]{2}+1\right)$

n) $\left(\frac{\cdot\sqrt[4]{4^{-5}}}{\sqrt[3]{2^2}}\right)^0$

Aufgabe 2.15

Vereinfachen Sie

a) $(-x^2)^3$ b) $(x^2)^{-3}$

c) $(-2)^{11001}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{11002}$ d) $\frac{2}{x^{-1}}+3x-x^2+\frac{3}{x^{-2}}$

e) $\frac{p^2+pq}{(u^2-v^2)^4}\cdot\frac{(u+v)^4}{(p^2-q^2)}$ f) $\frac{2^4x^5y^7z^8}{4x^2y^5z^{10}}:\frac{2^4x^5y^7z^8}{5x^4y^3z^5}$

g) $\sqrt[4]{\sqrt[5]{x}}$ h) $\sqrt{x\cdot\sqrt[8]{x^3}}$

i) $(2y)^{1-q}\cdot(2y)^{q-2}$ j) $\frac{a^{n-1}b^{n+2}}{x^{n-2}y^{n+3}}\cdot\frac{x^2y^3}{ab^{n+3}}$

Aufgabe 2.16

Berechnen Sie ohne Taschenrechner

$\log_5 25$ $\lg 0{,}001$ $\log_{17} 1$

$\log_2\left(\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[5]{2^3}\right)$ $\ln\left(e\cdot\sqrt[3]{e}\right)$ $\log_8\frac{1}{\sqrt{8}}$

Aufgabe 2.17

Entscheiden Sie ohne Taschenrechner, ob die gegebene Zahl positiv, negativ oder 0 ist

a) $\lg 3{,}8$ b) $\lg 3415{,}8$ c) $\lg 0{,}085$

d) $\lg\sqrt[3]{0{,}052}$ e) $\lg\frac{1}{\sqrt[3]{2{,}715}}$ f) $\lg\frac{2{,}6^3}{\sqrt{0{,}75}}$

g) $\lg(\lg 10)$

Aufgabe 2.18

Schreiben Sie als Summe (Differenzen) und Produkte (Quotienten)

a) $\log_3 3x$ b) $\log_5\frac{5a}{x}$ c) $\lg\frac{\sqrt{a}b^2}{\sqrt[4]{c}}$

d) $\lg\left(\frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[4]{b}}{\sqrt[10]{c}}\right)^{10}$ e) $\lg\left(\frac{\sqrt[5]{x^2}\cdot\left(\sqrt[6]{y}\right)^3}{\sqrt{u\cdot\sqrt{v}}}\right)^{10}$

Aufgabe 2.19

Schreiben Sie mit einem Logarithmus

a) $2\lg u + 3\lg v$ b) $\lg(u+v)+\lg(u+v)^2-\frac{1}{2}\lg u-\frac{1}{3}\lg v$

c) $\frac{1}{3}\ln x + \frac{2}{3}$ d) $\lg (a^2-1) - \lg (a-1) - \lg (a+1)^2$

e) $(\log_4 x^2):(\log_4 x) - 2$ f) $[(\lg \sqrt{b}):(0{,}5 \lg b)]\cdot\lg\frac{1}{\sqrt{b}}$

g) $2\ln x - \ln \frac{x}{x^2+1} - \ln x^3$

Aufgabe 2.20

Beweisen Sie dass sich der Logarithmus einer Zahl $x > 0$ zu zwei verschiedenen Basen a und b für alle x nur um eine Konstante K unterscheidet:

$\log_a x = K \cdot \log_b x$ für alle $x > 0$

Berechnen Sie diese Konstante. Wovon hängt sie ab?

Aufgabe 2.21

Berechnen Sie mit Hilfe des Taschenrechners

a) $\log_4 32$ b) $\log_5 55$

c) $\log_3 11 - \log_2 14$ c) $\log_1 2342 + \log_1 1342$

Aufgabe 2.22

In einem einfachen Computerspiel sollen Sie eine vom Computer „ausgedachte" Zahl zwischen 1 und n erraten. Zu jeder Zahl, die Sie per Tastatur eingeben, erhalten Sie eine der drei Antworten „Getroffen", „Zu Klein", „Zu Groß".

a) Entwickeln Sie eine Strategie, die mit möglichst wenigen Schritten die gesuchte Zahl ermittelt.

b) Wie viele Schritte sind im ungünstigsten Fall nötig für n=4, n=8, n=16, n=32.

c) Gegeben Sie eine allgemeine Formel für die max. Zahl von Schritten in Abhängigkeit von n an.

d) Wie viele Schritte sind im ungünstigsten Fall für n=1024 nötig?

Aufgabe 2.23

1000 l sind $1m^3$. Welche Kantenlänge hat ein Würfel von

a) 1000l,

b) 1l,

c) 8l ?

3 Gleichungen/Ungleichungen

Aufgabe 3.1

Ein junges Pärchen will mal in einen richtigen Film (FSK: ab 12Jahre). Der Kassierer fragt beide nach Ihrem Alter. Der Junge sagt „ich bin 15" und darf daher rein. Das Mädchen sagt: „ich bin doppelt so alt als ich war, als mein Freund so alt war wie ich heute bin". Darf das Mädchen rein oder nicht?

Aufgabe 3.2

Karl hebt von seinem Konto 150 DM ab und kauft anschließend eine Flasche Wein für 9 DM und zwei Kästen Bier. Danach hat er noch 97 DM im Geldbeutel. Welchen Preis hat Karl für einen Kasten Bier bezahlt, wenn er vor seinem Bankbesuch noch 5 € im Geldbeutel hatte?

Aufgabe 3.3

Zwei Gläser Wein sind jeweils mit der gleichen Menge Wein gefüllt. In einem Glas befindet sich Weißwein, im anderen Rotwein. Sie nehmen nun einen Löffel voll Rotwein aus dem Rotweinglas und schütten es in das Weißweinglas. Danach rühren Sie kräftig um, damit sich der Rotwein gleichmäßig im Weißweinglas verteilt. Anschließend entnehmen Sie dem Weißweinglas einen Löffel voll Weingemisch und geben dieses in das Rotweinglas. Befindet sich nun mehr Rotwein im Weißweinglas als Weißwein im Rotweinglas oder ist es gerade andersherum?

Wie ändert sich Ihre Antwort, wenn sie nicht kräftig umrühren.

Aufgabe 3.4

Bestimmen Sie die Lösungen für folgende quadratische Gleichungen:

a) $3x^2 + 12x - 15 = 0$ b) $x^2 - \frac{2}{5}x = \frac{1}{5}$

c) $2x(x-1) = 4(x+1) - 6$ d) $11x = 3 + 20x^2$

e) $4x^2 - 8x = -4$ f) $-9x^2 = 1 + 6x$

Aufgabe 3.5

Für welche reelle Zahlen u besitzt die folgende Gleichung zwei, genau eine oder keine reelle Lösung:

$x^2 - 6x + u = 0$

Aufgabe 3.6

Lösen Sie folgende Gleichungen

a) $\frac{x-1}{2x+1} = \frac{4}{4x^2+2x}$ b) $\frac{x}{1-\frac{2}{2-x}} = 0$

c) $\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^4+1} = 0$

d) $\sqrt{x^2-3} = \sqrt{2x} = 0$

Aufgabe 3.7

Petra kauft für eine Party ein: 2 Kisten Bier zu je 11 €, eine Kiste Wein für 21 € und für den Rest möchte sie Sekt kaufen, die Flasche zu 6 €. Sie hat nur 65 € dabei. Wie viele Sektflaschen kann Petra höchstens erwerben?

Aufgabe 3.8

Lösung Sie folgende Gleichungen

a) $\lg x = 2$ b) $\lg x = 0,5$

c) $\log_2 x = \frac{3}{2}$ d) $2 \lg x = 1$

e) $\lg (2x) = 0,5$ f) $\lg x = \lg 5 - \lg 6$

g) $\lg x + \lg (4x) = 2$ h) $\lg x - \lg \sqrt{x} = 2 \lg 2$

Aufgabe 3.9

Lösen Sie folgende Gleichungen

a) $4^x = 12$ b) $5^x = 10$

c) $3^{x-1} = 1,4$ d) $2^{x-2} = 2^{x+1} - 14$

e) $0,1^x - 10^x = 10^{x+2} - 0,1^{x+2}$ f) $0,1^x = 10$

Aufgabe 3.10

Welche x erfüllen jeweils die folgenden Ungleichungen

a) $2x > 7$ b) $4x < 2x - 16$

c) $\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} > 24$ d) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2x-2} > 24$

e) $14x + 32 - 2x < 7$ f) $x(2x + \frac{1}{4} - x) > x^2 + \frac{13}{2}x - 8$

g) $-7(4x - 0,5) > 0,25(-112x) - 3,5$

h) $-\frac{3}{4}(17x + (-2)) < \frac{18}{5} - \frac{3}{2}x + \frac{5}{7}x$

Aufgabe 3.11

Zeigen Sie $\sqrt{a} + \sqrt{a} \geq \sqrt{a+b}$ für $a, b \geq 0$

Aufgabe 3.12

Ein Staat kassiert eine 20%-ige Einkommenssteuer. Um die Geburtenrate anzukurbeln, wird den Bürgern ein großzügiges Kindergeld gezahlt. Dabei können die Bürger zwischen folgenden Modellen wählen:

- 400€ monatlich für jedes Kind (Festbetrag)
- Reduktion der Steuerquote um 2% Punkte für jedes Kind

Für welche Einkommen ist der Festbetrag günstiger?

Aufgabe 3.13

Wählen Sie ein geeignetes C so, dass folgende Ungleichung für alle $n \in N$ gilt:

$$\frac{n^3 - n^2}{n+7} < C \cdot n^2$$

4 Folgen und Reihen

Aufgabe 4.1

Oma Schulze legt zu Geburt Ihrer Enkelin 1000€ in ein Sparschwein. Jedes Jahr legt sie zum Geburtstag der Enkelin 50€ dazu. Wie viel bekommt die Enkelin am 18. Geburtstag ausgezahlt?

Aufgabe 4.2

Oma Schulze legt zu Geburt Ihrer Enkelin 50€ in ein Sparschwein. Zu jedem Geburtstag legt sie einen weiteren Betrag dazu, der jeweils um 10€ höher liegt als im Jahr davor. Wie viel bekommt die Enkelin am 18. Geburtstag ausgezahlt?

Aufgabe 4.3

Ein Frosch springt über eine 4m breite Straße. Beim 1. Sprung springt er 1m. Weil Springen anstrengend ist, schafft er bei den weiteren Sprüngen nur noch 2/3 der Weite des jeweiligen Vorgängersprungs. Kommt der Frosch über die Straße?

Aufgabe 4.4

Bestimmen Sie die ersten 5 Glieder sowie a_{21} der Folgen

a) $a_n = \frac{1}{n}$ b) $a_n = \frac{1}{n^2}$ c) $a_n = (-3)^n$

d) $a_n = (-1)^n$ e) $a_n = \frac{2n+3}{3-4n}$

Aufgabe 4.5

Bestimmen Sie die ersten 6 Glieder der Folge

$a_1 = 1$; $a_2 = 4$ $a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-2}$ für $n > 2$

und geben Sie eine explizite Form für a_n an.

Aufgabe 4.6

Bestimmen Sie jeweils die ersten 6 Glieder der Folge und geben Sie eine explizite Form für a_n an.

a) $a_1 = 1$; $a_n = n \cdot a_{n-1}$ für $n > 1$

b) $a_1 = 1$; $a_2 = 2$; $an = a_{n-1}\left(\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} + 1\right)$

Aufgabe 4.7

Bestimmen Sie die ersten 6 Glieder der Folge

$a_1 = 10$; $a_2 = 1$; $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ für $n > 2$

Aufgabe 4.8

Definieren Sie die Folge $a_n = 2n+1$ rekursiv.

Aufgabe 4.9

Schreiben Sie mit Hilfe des Summenzeichens

a) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + 100 \cdot 101$

b) $3a + 6a + 9a + 12a + \ldots + 99a$

c) $\frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \ldots + \frac{m}{2}$

d) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{4}{4} + \frac{6}{5} + \ldots \frac{36}{19}$

Aufgabe 4.10

Es soll die Zahlenfolge $a_n = \frac{1}{n^2}$ untersucht werden.

- Ab welchem Index n_0 sind die Folgenglieder kleiner als 0,01?
- Ab welchem Index n_1 unterscheiden sich 2 benachbarte Folgenglieder um weniger als 0,01?

Aufgabe 4.11

Oma Maier legt für zur Geburt Ihres Enkels ein Sparbuch mit 100 € bei einem Zinssatz von 3% an.

- Geben Sie eine rekursive Formel für den Betrag auf dem Sparbuch n Jahre nach Anlagezeitpunkt an.
- Geben Sie eine nicht rekursive Form an.
- Welcher Betrag befindet sich zum 18. Geburtstag des Enkels auf dem Sparbuch?
- Welchen Betrag hätte Oma Maier anlegen müssen, wenn der Enkel zum 18. Geburtstag 1000€ hätte bekommen sollen.

5 Kombinatorik

Aufgabe 5.1

10 Jungen einer Schulklasse fahren ins Schullandheim.

a) Bei der Abfahrt steigen alle schön brav nacheinander in den Bus ein. Wie viele Reihenfolgen für das Einsteigen gibt es.

b) Während der Fahrt bekommt jeder ein Überraschungspaket. Wie viele Möglichkeiten gibt es , die mitgenommenen 10 unterschiedlichen Pakete auf die 10 Schüler zu verteilen?

c) Im Schullandheim angekommen, gibt es abends eine Party. Zufällig ist auch eine Klasse mit 10 Mädchen da. Wie viele Paarbildungen sind möglich?

d) Am zweiten Abend ist ein Kinobesuch angesagt. Im Kino sind noch 10 Plätze frei. Wie viele Möglichkeiten gibt es, diese Plätze zu besetzen?

e) Im dritten Tag geht’s ins Theater. Dort sind noch 15 Plätze frei. Wie viele Möglichkeiten gibt es, diese Platze zu besetzen?

f) Am vierten Tag wird Theater gespielt. Dabei sind 4 Rollen zu besetzen. Wie viele Möglichkeiten gibt es, diese Rollen zu besetzen?

g) Am fünften Tag soll Pizza geholt werden. Dabei werden 4 Leute gebraucht. Wie viele Möglichkeiten gibt es, 4 Leute zum Pizza holen zu schicken?

h) Am 6. Tag geht’s zum Baden. Leider gibt es nur 3 Badematten. Wie viele Möglichkeiten gibt es, diese Badematten auf die 10 Jungen aufzuteilen?

Aufgabe 5.2

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, 6 Richtige im Lotto zu haben?

Aufgabe 5.3

Ein Pixel einer VGA-Karte besteht aus 3 Farben: rot, grün, blau. Jede Farbe kann mit der Intensität von 0 ... 255 zum Gesamtpixel beitragen.

Wie viele unterschiedliche Farben kann ein VGA-Pixel und damit die VGA-Karte darstellen?

Aufgabe 5.4

Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus 26 Postkarten 15 auszu-wählen?

Aufgabe 5.5

An einem Pferderennen nehmen 12 Pferde teil. Wie viele Mög-lichkeiten gibt es auf die ersten drei Plätze zu setzen.

Aufgabe 5.6

Ein Vertriebsingenieur muss 5 (10) Kunden besuchen. Um Benzin zu sparen will er die kürzeste Gesamtroute ermitteln. In einem Rechenprogramm benötigt die Bezinkostenberechnung für eine Route 1 s. Wie lange dauert die Rechenzeit, um die günstigste Route (Durch Analyse aller Routen) zu ermitteln.

Aufgabe 5.7

In einer Schulklasse mit 12 Jungen und 8 Mädchen soll die optimale Besetzung für die beiden Hauptrollen Romeo und Julia ermittelt werden. Jede mögliche Kombination soll eine 5 minütige Probevorstellung geben. Wie lange dauert die Auswahl?

Aufgabe 5.8

Auf einer Party mit 10 Gästen will beim Abschied jeder dem anderen genau einmal die Hand geben. Wie viele „Handschütt-lungen“ gibt es?

Aufgabe 5.9

Der Vorkurs Mathematik mit 20 Teilnehmern drängt in den Hörsaal mit 20 (30) Plätzen. Wie viele Möglichkeiten gibt es, den Hörsaal zu bevölkern. Wie ändert sich die Antwort, wenn die Plätze beliebig oft belegt werden könnten (Mehrfaches auf dem Schoß sitzen)?

Aufgabe 5.10

An einem Opernball nehmen n Männer und n Frauen teil.

a) Beim Eröffnungstanz soll nur ein Paar (Frau mit Mann) tanzen. Wie viele möglichen Paare können für den Eröffnungstanz gebildet werden?

b) Nun sollen alle auf die Tanzfläche. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Tanzfläche zu bevölkern unter der Annahme, dass klassisch (Frau mit Mann) getanzt werden soll.

c) Nun wird angenommen, dass die n Frauen und n Männer als Ehepaare zum Opernball gekommen sind. Wie lautet die Antwort zu b) wenn keiner mit dem mitgebrachten Partner tanzen soll.

Aufgabe 5.11

Auf einer Party mit 10 Paaren sollen alle Herren einmal mit allen Damen (außer der mitgebrachten) tanzen. Wie viele Tänze gibt es?

Aufgabe 5.12

Ein einfacher (nicht optimierter) Algorithmus zur Sortierung von n Zahlen der Größe nach läuft folgendermaßen ab:

- Suche die größte Zahl aus den n Zahlen durch einfachen Vergleich.
- Übernehme die gefundene Zahl auf Platz 1 der Ergebnisliste.
- Suche die größte Zahl aus den n-1 verbleibenden Zahlen und übernimm die gefundene Zahl auf Platz 2 in die Ergebnisliste.
- Suche die größte Zahl aus den n-2 verbleibenden Zahlen und übernimm die gefundene Zahl auf Platz 3 in die Ergebnisliste.
- usw.

Wie viele Vergleichsoperationen sind insgesamt durchzuführen?

Wie lange dauert ein Programm für die Sortierung von 100 Zahlen, wenn eine Vergleichsoperation (ggf. mit Herausnahme der Zahl) 1ms benötigt?

6 Beweismethoden

Aufgabe 6.1

Beweisen Sie direkt und durch vollständige Induktion

$$1+2+3+4+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Aufgabe 6.2

Beweisen Sie: Die Summe dreier aufeinander folgender natürlicher Zahlen ist stets durch 3 teilbar.

Aufgabe 6.3

Beweisen Sie durch vollständige Induktion: „Es passen beliebig viele Menschen in einen Bus“.

7 Ausflug in die Geometrie

Aufgabe 7.1

Zeichen Sie die folgenden Funktionen im Bereich
$-360° \le \alpha \le +360°$

$\sin \alpha$

$\cos \alpha$

$\tan \alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ („Tangens“)

Für welche Winkel α ist $\tan \alpha$ nicht definiert?

Aufgabe 7.2

Zeichnen Sie den Spannungszeitverlauf u(t) für die Wechselspannung aus der Steckdose:

$u(t) = 330V \cdot \cos(2\pi f \cdot t)$, f=50Hz

Aufgabe 7.3

Beweisen Sie, dass für beliebige Winkel α folgende Gleichung gilt:

$(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$

Aufgabe 7.4

In einer Pizzeria bekommen Sie eine kleine Pizza (20cm Durchmesser) für 4€ und eine große (30cm Durchmesser) für 8€. Bei welcher Pizza bekommen Sie mehr für Ihr Geld?

Aufgabe 7.5

Der Mond ist ca. 300.000km von der Erde entfernt und erscheint unter einem Betrachtungswinkel von ca. 15’ (1’ = $\frac{1}{60}$°). Welchen Durchmesser hat der Mond?

Aufgabe 7.6

Während einer Wanderung kommen Sie an einen See. Auf der anderen Seite befindet sich ein Berg. Um ohne Verdrehen der Augen die Bergspitze betrachten zu können, müssen Sie den Kopf um 5° anheben. Sie können aber auch das Spiegelbild im Wasser anschauen, wenn Sie den Kopf um 6°senken. Würden Sie bei 18°C Wassertemperatur zum anderen Ufer schwimmen?

8 Vektoren

Vorbemerkung:
Aus Gründen der vereinfachten Darstellung werden Vektoren nicht mit einem Pfeil, $\vec{a}$, sondern durch Unterstreichung, $\underline{a}$, gekennzeichnet.

Aufgabe 8.1

Welche der folgenden Vektorpaare sind orthogonal:

$\underline{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \underline{b} = -\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}$ $\qquad$ $\underline{a} = \begin{pmatrix}4\\3\\5\end{pmatrix} \underline{b} = \begin{pmatrix}4\\3\\-5\end{pmatrix}$

$\underline{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \underline{b} = -\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}$ $\qquad$ $\underline{a} = \begin{pmatrix}101\\0\\3\\4\end{pmatrix} \underline{b} = -\begin{pmatrix}0\\-38\\0\\0\end{pmatrix}$

Aufgabe 8.2

Bestimmen Sie a so, dass folgende Vektoren orthogonal sind:

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} 2a \\ 3 \\ 1 \\ -a \end{pmatrix} \underline{c} = -\begin{pmatrix} -a \\ a \\ 2 \\ -3a \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8.3

Stellen Sie $\underline{c}$ als Linearkombination von $\underline{a}$ und $\underline{b}$ dar:

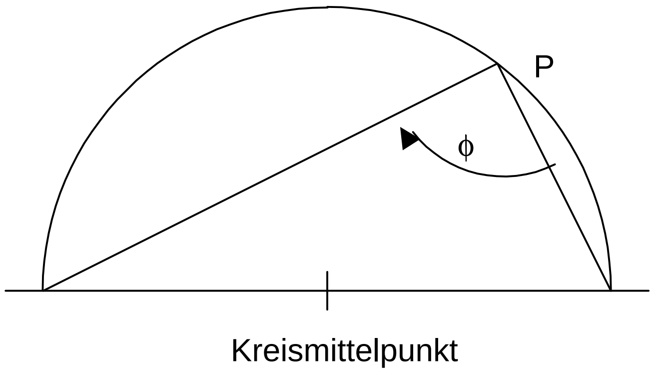
$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad c = -\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8.4

Zeigen Sie, dass der Schnittpunkt zweier Seitenhalbierenden eines Dreiecks diese im Verhältnis 1:2 teilt.

Aufgabe 8.5

Beweisen Sie den Satz von Thales:



„Das gezeigte Dreieck ist für beliebige Punkte P auf dem Kreisbogen rechtwinklig“