

Vorkurs in Mathematik

Zusammengestellt von
Prof. Dr. Metz, Prof. Dr. Schäfer
Fachhochschule Gießen-Friedberg

Version: 2002

Inhaltsübersicht

- Lehrinhalte
- Selbsttest
- Übungsaufgaben
- Zusatzaufgaben
- Lösungen zum Selbsttest
- Lösungen der Zusatzaufgaben
- Griechisches Alphabet

Lehrinhalte

1. Mengen, Zahlen, Größen
2. Klammern, Brüche
3. Proportionalität, Dreisatz, Prozentrechnung
4. Potenzen, Wurzeln
5. Gleichungen
6. Logarithmen
7. Trigonometrie, Vektorbegriff
8. Einführung in Differential- und Integralrechnung (kurzer Einblick, wird später systematisch behandelt)

Selbsttest

1. Es sei $a < b$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- $[a, b] \cup (b, \infty) = [a, \infty)$
- $[a, b] \cap (b, \infty) = \{b\}$
- $(-\infty, b) \cap (a, \infty) = (a, b)$
- $(a, b) \cup (b, \infty) = (a, \infty)$
- $(-\infty, \infty) \cap (-\infty, b) \cap (b, \infty) = \emptyset$
- $[a, b] \cup (a, b) = (a, b)$

2. (a) Berechnen Sie: $a - (a - b(a + 1))$.
(b) Vereinfachen Sie den Ausdruck

$$A = \frac{\frac{x(1-y)}{yz} + \frac{x}{z}}{\frac{a/y - (ay - y^2)/y^2}{2z}}$$

so weit wie möglich.

3. (a) Von 3 Lastwagen wird eine Ladung Erde in 2 Tagen abgefahren. Wie lange brauchen 5 Lastwagen?
(b) Es werden 2 Liter 60%iger Alkohol und 3 Liter 80%iger Alkohol gemischt. Wieviel Prozent Alkohol enthält die Mischung?
4. (a) Berechnen Sie ohne Hilfsmittel: $10^{-2} - 10^{-3}$.
(b) Vereinfachen Sie

$$\frac{a^5 \cdot a^{1,5} \cdot (a \cdot b)^2 \cdot (a/b)^{-3}}{a^{-4} \cdot \sqrt{ab^2} \cdot b/a}.$$

5. Das Übersetzungsverhältnis zweier Zahnräder eines Getriebes ist 7 : 11. Hätte jedes Rad 4 Zähne mehr, dann wäre das Verhältnis 2 : 3. Wieviele Zähne hat jedes Rad?
6. (a) Für welche a ist $2 \ln a = \ln(2a)$?
(b) Berechnen Sie x aus: $10 - 2 \cdot e^{x/2} = 1$.
7. Es sei eine Wechselspannung $u = U_0 \sin(\omega t + 30^\circ)$ mit $f = 50$ Hz und $U_0 = 100$ V gegeben. (Hinweis: $\omega = 2\pi f$.)
- (a) Wie groß ist u am Anfang?
(b) Wie groß ist u nach $1/1000$ s?
(c) Bei welcher Zeit liegt das erste Maximum?

Vorkurs in Mathematik

Übungsblatt 1

Mengen, Zahlen, Größen

1. Bilden Sie Vereinigung, Durchschnitt und die Differenzen der Mengen $\{1, 2, 3, a, b, c\}$ und $\{-1, 0, 1, c, d\}$.
2. Bilden Sie Vereinigung, Durchschnitt und die Differenzen der Mengen $\{2, 4, 6, \dots\}$ und $\{5, 10, 15, \dots\}$.
3. Was ergibt $A \cup \emptyset$, $A \cap \emptyset$, $A \setminus \emptyset$ und $\emptyset \setminus A$?
4. Mit den Intervallen $A = (-1, 1)$ und $B = [0, 2]$ ist zu bilden: $A \cup B$, $A \cap B$ und $A \setminus B$.
5. Der Erdradius beträgt $6,4 \cdot 10^6$ m, die Dichte $5,5 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$. Die Sonnenmasse beträgt $2 \cdot 10^{30}$ kg. Wie oft ist die Erd- in der Sonnenmasse enthalten?
6. Die folgenden Formeln seien in (nicht näher bestimmtem) physikalisch-technischem Zusammenhang gegeben. Von welchen kann man unmittelbar, und ohne die konkrete Bedeutung zu kennen, sagen, daß sie falsch sind? (Es sei t die Zeit und x eine Länge.)
 - (a) $f(\omega, t) = t + \sin(\omega t)$
 - (b) $u = u_0 e^{-2t}$
 - (c) $\dot{u} = u(1 + \cos(\omega t))$
 - (d) $y = x(1 + \sqrt{x})$

Vorkurs in Mathematik

Übungsblatt 2

Klammern, Brüche

1. Vereinfachen Sie: $23u - (14v - (8v + 6u - 3v - (43v - 16u)) - 16u)$.

2. Berechnen Sie: $(3p - 2q)^2 - (3p + 2q)^2$.

3. Zerlegen Sie die folgenden Ausdrücke in Faktoren (Ausklammern):

(a) $2ax - 2ay + bx - by - cx + cy$,

(b) $axnd - axnc + abnd - abnc$.

4. Die Linsengleichung lautet $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$. Hierbei ist a die Gegenstandsweite, b die Bildweite und f die Brennweite. Lösen Sie die Gleichung jeweils nach a , nach b und nach f auf.

5. Lösen Sie die Gleichung $\frac{1}{y} = \frac{1}{x^2 + 1} + C$ nach y auf.

6. Kürzen Sie so weit wie möglich:

(a) $\frac{u - v}{v - u}$,

(b) $\frac{mt + ms - nt - ns}{mt - ms - nt + ns}$.

7. Vereinfachen Sie:

(a) $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) : \frac{1}{abc}$,

(b) $\frac{1}{x + \frac{1}{2x - \frac{2x^2}{1+x}}}$.

Vorkurs in Mathematik

Übungsblatt 3

Proportionalität, Dreisatz, Prozentrechnung

1. Auf verschiedenen Mineralwasserflaschen ist der Anteil an Natrium mit 25 mg/l, mit 0,019 g pro 0,7 l-Flasche und mit 23 mg pro 0,7 l-Flasche angegeben. Welche Sorte enthält bezogen auf die Wassermenge am wenigsten und welche am meisten Natrium?
2. Die Luft besteht im wesentlichen aus Sauerstoff und Stickstoff, und zwar im Gewichtsverhältnis von 24 : 76. Wieviel Gramm beider Gase sind in 4 kg Luft enthalten?
3. Ein Behälter, der 450 l Wasser aufnehmen kann, wird bei geöffnetem Hahn in 12 Minuten gefüllt. Wieviel Liter Wasser waren nach 7 Minuten in dem Behälter?
4. Anderthalb Hühner legen anderthalb Eier in anderthalb Tagen. Wieviel Eier legen vier Hühner in neun Tagen?
5. Wieviel cm^3 72%igen Alkohol muß man mit 435 cm^3 32%igem Alkohol mischen, um 42%igen Alkohol zu erhalten?
6. Mischt man 12 dm^3 Wasser mit 15 dm^3 Alkohol, so ist die Mischung 32%ig. Wieviel %ig war der benutzte Alkohol?
7. Ein Kaufmann verkauft einen Posten Ware für 1012,50 Euro. Wie hoch war der Einkaufspreis, wenn er die Ware mit 35% Aufschlag (bezogen auf den Einkaufspreis) verkauft?

Vorkurs in Mathematik

Übungsblatt 4

Potenzen, Wurzeln

1. Berechnen Sie: $((-2)^{-2})^3$, $((-2)^3)^{-2}$, $(-2^3)^2$, $(-2^3)^{-2}$, $(-2^3)^3$, $((-2)^3)^{-3}$.
2. Vereinfachen Sie: $(-x^3)(-x^2)(-x)^4$, $\frac{(-2x)^{-2m}}{-2x^{-2m+1}}$, $(-2x^n)^4 - ((-2x)^4)^n$,
 $\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}$.
3. Berechnen Sie:
 - (a) $a^{x+y} \cdot a^{x-y}$,
 - (b) $(2n/m)^6 \cdot (2m/n)^4$,
 - (c) $x^{3n-2} 2x^{m-4n+7} 5x^{2n+m}$,
 - (d) $\frac{15x^3yz^2}{9xy^2z}$,
 - (e) $\left(\frac{u^3v^5}{x^4y^6}\right)^9 \cdot \left(\frac{u^2v^3}{x^3y^5}\right)^9 : \left(\frac{x^4y^7}{u^6y^{10}}\right)^9$.
4. Vereinfachen Sie: $5(a-b)^{2k-2} \frac{9}{5}(b-a)^{7-2k} \frac{2}{3}(b-a)^{2k-5}$.
5. Schreiben Sie als x -Potenz:
$$\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^{-3}}} : \frac{(-x)^4}{\sqrt{x}}\right) \cdot \left(\frac{(-x)^{-2}}{(\sqrt[3]{x})^{-3}}\right)^3$$
6. Vereinfachen Sie:
 - (a) $(4-a) : (2 + \sqrt{a})$,
 - (b) ${}^{m+2}\sqrt{u^{5m+10}}$.
7. Stellen Sie den folgenden Ausdruck mit nur einem Wurzelzeichen dar:
$$\sqrt{\frac{a}{b}} \sqrt{\frac{b}{a}} \sqrt{\frac{a}{b}}$$
8. Berechnen Sie: $\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.
9. Das DIN-A-Format ist so festgelegt, daß bei Halbierung des Rechtecks wieder ein DIN-A-Format entsteht. Berechnen Sie daraus das Seitenverhältnis.

Vorkurs in Mathematik

Übungsblatt 5

Gleichungen

1. Zeichnen Sie die Geraden mit den folgenden Gleichungen. Wie groß sind die Steigungen dieser Geraden? Wo schneiden sie die Koordinatenachsen?

(a) $x + y + 1 = 0$,

(b) $x - 3y - 1 = 0$,

(c) $y = 2$.

2. Lösen Sie: $x^2 + x = 0$.

3. Lösen Sie:

(a) $(x - 3)^2 = 16$,

(b) $x - 3 = 4$,

(c) $-(x - 3) = 4$.

4. Berechnen Sie alle Lösungen x von: $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - 2 = 0$ und $\frac{1-x}{1+x} = x$.

5. Bestimmen Sie alle Lösungen x der folgenden Gleichungen:

(a) $14 + 2x = 11 - 7x$,

(b) $2[18 - 3(7x - 5)] = 3[5x + 2(9 - 4x)]$,

(c) $a - (a + b)x = (b - a)x - (c + bx)$,

(d) $(x - a)^2 + (x - b)^2 - (x - a)(x - b) = x^2 + a^2 + b^2$,

(e) $\frac{5x - 6}{10} - \frac{9 - 10x}{14} = \frac{3x - 4}{5} - \frac{3 - 4x}{7}$,

(f) $\frac{1+x}{1-x} = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0)$,

(g) $\frac{a - bx}{ax + b} = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0)$,

(h) $\frac{5x + 3}{7x - 9} - \frac{4x + 9}{9 - 7x} = 2$,

(i) $3 - 4x^2 = 5 - 6x^2$,

(j) $(7x - 2)(7x + 2) = 60$,

- (k) $\frac{7x + 5}{7 + 5x} = \frac{9x - 8}{9 - 8x}$,
- (l) $x^2 - 4x - 21 = 0$,
- (m) $16x^2 - 97x + 85 = 0$,
- (n) $(x + 4)^2 - (x - 5)^2 - (x - 1)^2 = 14x - 1$,
- (o) $\frac{2x + 1}{x - 1} - \frac{3x - 4}{x + 1} = \frac{3x + 3}{x^2 - 1}$,
- (p) $\frac{x}{a} - \frac{1}{bx - ax} + \frac{b}{a^2x - abx} = \frac{2}{a - b} \quad (a \neq 0, a \neq b)$.

6. Geben Sie die Lösungen der folgenden Gleichungen an:

- (a) $-\sqrt{x^2 + 4} = x - 2$,
- (b) $\sqrt{2x^2 - 1} + x = 0$.

7. Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme:

- (a) $2x - 2y = 2$
 $2x + 4y = 28$
- (b) $6x + 4y = 24$
 $5x + 4y = 12$

8. Der sogenannte „goldene Schnitt“ teilt eine Strecke so in zwei Teile, daß die Länge der Gesamtstrecke sich zur Länge der größeren Teilstrecke so verhält, wie die Länge des größeren Teils zum kleineren. Wie groß ist dieses Verhältnis?

Vorkurs in Mathematik

Übungsblatt 6

Logarithmen

1. Berechnen Sie: $\log_a \frac{1}{a}$, $\log_a a$, $\log_a a^n$.

2. Spalten Sie so weit wie möglich auf:

(a) $\ln \sqrt[4]{a^3}$ ($a > 0$),

(b) $\ln \sqrt[3]{\frac{a^2 c}{b^5 d^4}}$ ($a, b, c, d > 0$),

(c) $\ln \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ ($x > |y|$),

(d) $\ln(x\sqrt[8]{x+y})$ ($x > 0, x + y > 0$).

3. Berechnen Sie: $\ln e^e$, $\ln(\sqrt{e})^e$, $\ln e^{\sqrt{e}}$, $\ln((\sqrt{e})^{\sqrt{e}})$, $\ln\left(\frac{u-v}{ev-ue}\right)^2$ ($u \neq v$).

4. Fassen Sie zu einem einzigen Logarithmus zusammen:

$$\frac{a}{b} \lg c + \frac{b}{c} \lg a - \frac{c}{a} \lg b - 3 \quad (a, b, c > 0).$$

5. Lösen Sie die Gleichungen:

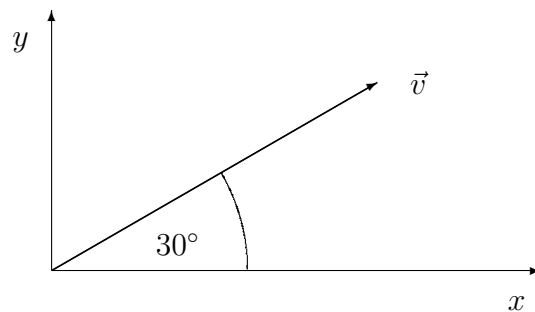
(a) $\log_2 x = 3$, (b) $\log_x 2197 = 3$, (c) $2e^{-0,1x} - 1 = 5$.

Vorkurs in Mathematik

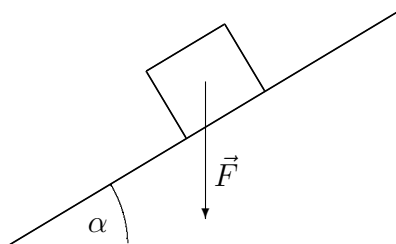
Übungsblatt 7

Trigonometrie, Vektorbegriff

1. Der Winkel 360° entspricht im Bogenmaß der Zahl 2π . Welchem Winkel entspricht die Bogenmaßzahl $0,1$?
2. Ein rechtwinkliges Dreieck hat die Katheten $a = 5$ und $b = 12$. Wie groß sind $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$? Überprüfen Sie für diesen speziellen Fall die Beziehungen
 $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ und $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$. Wie groß ist β ?
3. Wie groß sind die x - und y -Komponenten der skizzierten Geschwindigkeit \vec{v} mit dem Betrag $|\vec{v}| = 1 \text{ m/s}$?



4. Die Gewichtskraft \vec{F} eines Körpers auf einer schiefen Ebene ist zu zerlegen in einen Anteil in Bewegungsrichtung und einen Anteil senkrecht zur Bewegungsrichtung.



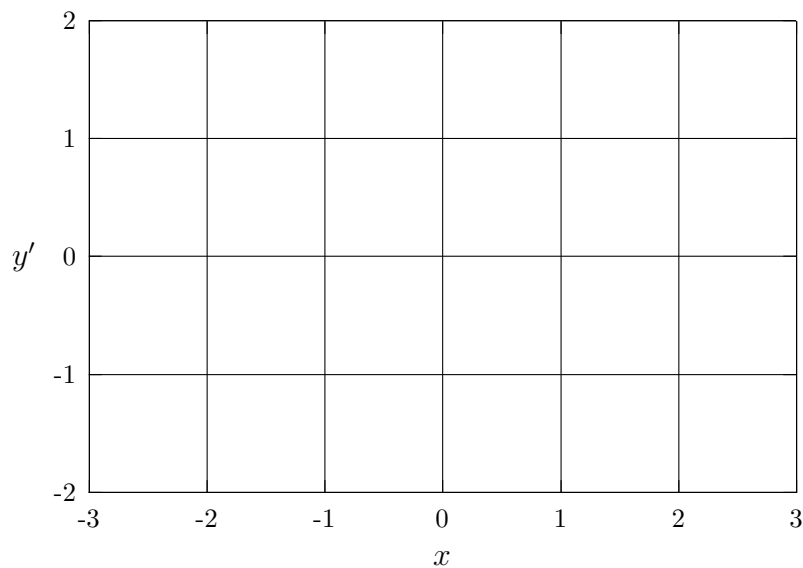
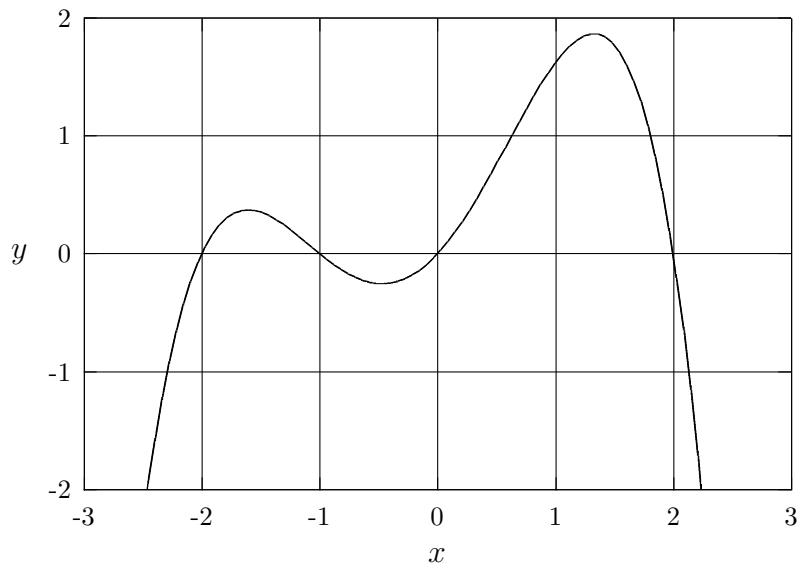
5. Gegeben sind zwei Kräfte $\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ N}$ und $\vec{F}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ N}$. Gesucht ist die Resultierende $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ und ihr Betrag. Wie groß ist $2\vec{F}_1 - 3\vec{F}_2$?

Vorkurs in Mathematik

Übungsblatt 8

Einführung in Differential- und Integralrechnung

1. Differenzieren Sie: $y = x^4 - 5x^3 + 2x - 5 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}$.
2. Wo hat die Kurve mit $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 6$ waagrechte Tangenten?
3. Skizzieren Sie die Ableitung, die zu der angegebenen Kurve gehört.



4. $s = \frac{1}{2} g t^2$ $v = \dot{s} = \frac{ds}{dt} = ?$

5. $\int_2^4 x dx = ?$

6. $\int (x^3 + 3x^2 + x + 5) dx = ?$

7. Wie groß ist die Fläche unter der Kurve mit $y = 6x - x^2$ zwischen den beiden Nullstellen?

8. Beim Bremsen mit konstanter Bremskraft gilt für die Geschwindigkeit: $v = v_0 - at$. Dabei sind v_0 und a Konstanten. Wie lang ist der Bremsweg?

Vorkurs in Mathematik

Zusatzblatt 1

Mengen, Zahlen, Größen

1. Geben Sie alle 8 Teilmengen zu $\{a, b, c\}$ an.
2. Wie viele Teilmengen hat $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$?
3. Die in der aufzählenden Darstellung gegebenen Mengen $\{3, 6, 9, 12, \dots\}$ und $\{-1, -2, -3, \dots\}$ sollen durch eine beschreibende Darstellung ($\{x \mid \dots\}$) charakterisiert werden.
4. $\{x \mid x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{N}\} = ?$
5. $\mathbb{N} \cup \mathbb{R} = ?$, $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{Q} = ?$, $\mathbb{Z} \cap \mathbb{R} = ?$, $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} = ?$.
6. $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} \cap \mathbb{Q} \cap \mathbb{R} = ?$, $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} \cup \mathbb{Q} \cup \mathbb{R} = ?$,
 $(\mathbb{N} \setminus \mathbb{Z}) \cup (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{R}) = ?$, $(\mathbb{N} \cup \mathbb{Z}) \cap (\mathbb{Q} \cup \mathbb{R}) = ?$,
 $(\mathbb{N} \cap \mathbb{Z}) \cup (\mathbb{Q} \cap \mathbb{R}) = ?$
7. $((\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}) \cap \mathbb{Q}) \cup (\{-2, -3/2, -1, 0, 1/2, 2\} \setminus \mathbb{Z}) = ?$
8. Mit den Intervallen $A = (-1, 1)$, $B = (0, 2)$ und $C = (-2, 0)$ ist zu bilden:
 $(A \setminus C) \setminus B$, $A \setminus (B \cup C)$, $(A \cap C) \cup B$ und $(B \setminus A) \cap C$.
9. Mit den Intervallen $A = (-\infty, 0]$, $B = (-10, \infty)$ und $C = [-7, 3]$ ist zu bilden:
 $A \cup B$, $A \cap B$, $(A \cap B) \cup C$, $A \cap B \cap C$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \cup C$, $A \cap C$
und $B \cup C$.
10. Bestimmen Sie $A \cup (A \cap B)$ und $A \cap (A \cup B)$. Zeichnen Sie Skizzen.
11. Wie heißt die kleinste Menge, die die Mengen A , B und C enthält?
12. Wie heißt die größte Menge, die in den Mengen A , B und C enthalten ist?
13. Was kann aus $A \setminus B = B \setminus A$ geschlossen werden?
14. Was läßt sich über die Mengen A und B aussagen, wenn $A \cup B \subseteq A \cap B$ gilt?
15. Was läßt sich über die Mengen A und B aussagen, wenn $A \setminus B \subseteq A \cap B$ gilt?
16. Schreiben Sie mit Zehnerpotenzen: 0,0000057; 70000000000; 840 Hektoliter; 29000 Nanometer; 50 pF.

17. Übertragen Sie die folgenden Zahlen aus dem Dezimal- in das Dualsystem:
7, 10, 15, 16, 17, 50, 100.
18. Übertragen Sie die folgenden Zahlen aus dem Dual- in das Dezimalsystem:
100, 1000, 1111, 1010111001, 110111010.
19. Woran erkennt man im Dualsystem gerade und ungerade Zahlen?
20. Bei welchen der Formeln $u = u_0 e^{7t/(2\text{ s})} + u_0$, $y = \sqrt{4x^2 + 2} - 5x$, $u = \sin(\omega t) + u_0$ und $y = x \sin(5, 3\pi) - z \sqrt{\cos(1)}$ kann man unmittelbar erkennen, daß sie falsch sind? Hierbei seien u , u_0 Spannungen, t die Zeit, ω eine Kreisfrequenz und x , y , z Längen.
21. Im folgenden sei t die Zeit und x , y , z seien Längen. Von welcher Art ist die Größe a in $\sqrt{x(1 + a^2)}/z$, in $y = x \sin(3a/t)$ und in $y = x \cdot e^{-z \cdot a \cdot t^2}$?
22. Licht braucht ungefähr 8,3 Minuten von der Sonne bis zur Erde. Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich die Erde um die Sonne?

Vorkurs in Mathematik

Zusatzblatt 2

Klammern, Brüche

1. Multiplizieren Sie aus: $(3a - 2b)(2c - 4d)(5x - 2y)$.

2. Multiplizieren Sie aus und fassen Sie zusammen:

$$(3a - 5b)(6x - 7y + 9z) - (5x - 8y + 8z)(4a - 5b).$$

3. Berechnen Sie:

(a) $(2a - 3b - 4c)^2$,

(b) $(12uvw - 2uvz + 6uvwz)/(9uv)$,

(c) $(a^2 - b^2)/(a + b)$.

4. Ordnen Sie die folgenden Zahlen der aufsteigenden Größe nach an (ohne Taschenrechner): $1/3$; $3/8$; $0,3$; $1/(\pi - 1)$; $1/\pi$; $(2/21) : (1/3)$.

5. Schreiben Sie als gekürzte Brüche: $1,78$; $5,5$; $-18,3$; $0,07$; $1/0,49$; $4,39/(-1,13)$.

6. Kürzen Sie die Brüche $\frac{x+x}{x}$ und $\frac{a\lambda + b\lambda}{2\lambda^2}$.

7. Berechnen Sie: $\frac{3}{a+b} - \frac{4}{2x-y} : 2$.

8. Vereinfachen Sie:

$$\frac{m^2 - m}{m^2 + 2m} \cdot \frac{m^2 - 4}{m^2 - 1} : \frac{m^2 - 4m + 4}{m^2 + 2m + 1}$$

9. Zerlegen Sie den Ausdruck $9p^2 + 36q^2 - 4r^2 + 36pq$ in Faktoren.

(Hinweis: Die Aufgabe kann durch die geschickte Kombination von zwei binomischen Formeln gelöst werden.)

10. Berechnen Sie:

(a) $-\frac{4}{x-2a} + \frac{5}{x-a} - \frac{3}{x-3a}$,

(b) $\frac{(3b-2c)a}{6bc} - \frac{b(4a-5c)}{10ac} + \frac{8a^2+3b^2}{6ab} - \frac{5a-4b}{10c}$.

11. Vereinfachen Sie:

$$(a) \frac{x+y}{x(x-y)} + \frac{x-y}{y(x+y)} - \frac{xy}{x^2-y^2},$$

$$(b) \frac{5m^2n+7n}{3m-2n} \cdot \frac{4n^2-9m^2}{15n^2m+10n^3},$$

$$(c) \frac{\frac{1}{x+1} + \frac{1}{1-x}}{\frac{1}{1+x} + \frac{1}{x-1}}.$$

12. Berechnen Sie durch Polynomdivision:

$$(a) (x^3 - a^3)/(x - a),$$

$$(b) (49a^2 - 25x^2 - 9b^2 - 30bx)/(5x + 7a + 3b),$$

$$(c) (x^3 + x^2a + 2xa^2 + a^3)/(x + a).$$

13. Ergänzen Sie den folgenden Term zu einem vollständigen Quadrat: $9w^2 - 480w$. (D.h. es soll ein zusätzlicher Summand zu dem Term geschrieben werden, so daß der neue Ausdruck als Quadrat eines Klammerausdrucks dargestellt werden kann.)

Vorkurs in Mathematik

Zusatzblatt 3

Proportionalität, Dreisatz, Prozentrechnung

1. Die Wertepaare (x_i, y_i) werden gemessen. Ist x proportional oder umgekehrt proportional zu y ? Falls ja, wie lautet der Proportionalitätsfaktor?

(a)

x_i	24,8 km/h	12,4 km/h	9,3 km/h
y_i	3 s	6 s	8 s

(b)

x_i	3,9 m	8,7 m	17,16m
y_i	14,5 s	37,7 s	76,85 s

(c)

x_i	4,20 m	7,14 m	9,66 m
y_i	5 kg	8,5 kg	11,5 kg

2. Auf einer Brotpackung steht als Angabe für den Brennwert: 1616 kJ (382 kcal) pro 100 g und 92 kJ (24 kcal) pro Scheibe. Können diese Werte korrekt sein?
3. Eine Straße hat eine Steigung von 1 : 80. Um wieviel Meter ist ein Auto gestiegen, wenn es 2,4 km (Luftlinie) zurückgelegt hat?
4. Als Dosierung für ein Waschpulver wird 240 ml bei 4,5 kg Wäsche angegeben. Wieviel Waschpulver sollte man bei 2,8 kg Wäsche verwenden?
5. Eine Packung mit 15 Päckchen zu je 10 Papiertaschentücher kostet 3,49 Euro. Eine andere Packung mit 6 Päckchen kostet 1,68 Euro und ist zusätzlich um 12% herabgesetzt. Welche Sorte ist preiswerter?
6. Zu welcher Summe wächst ein Kapital von 16800 Euro in 7 Jahren mit 5% Zinseszinsen an?
7. Es sei a umgekehrt proportional zu b , c proportional zu d , und b und c seien umgekehrt proportional zueinander. Wie verhalten sich a und d zueinander?
8. Die Drehzahlen zweier Riemenscheiben A und B verhalten sich wie 204 zu 286. Welches Verhältnis besteht zwischen den Durchmessern? Wie groß ist der Durchmesser von A , wenn er 240 mm bei B ist?
9. Der ohmsche Widerstand eines Drahtes ist $R = \varrho \cdot l/q$ (ϱ : spezifischer Widerstand; l : Drahtlänge; q : Drahtquerschnitt). Ein Draht der Länge 4 m hat den Widerstand R_0 . Wie lang muß ein Draht desselben Materials sein, dessen Querschnitt nur halb so groß ist, und dessen Widerstand $5R_0$ betragen soll?

10. Ein halbes Dutzend Tomatenpflanzen liefern in einer Woche ein Dutzend Tomaten bei einem Befall von 0,4 Schnecken pro Pflanze. Wieviel Tomaten kann man bei 14 Pflanzen in 3 Tagen ernten, wenn der Schneckenbefall halbiert werden kann? (Es soll angenommen werden, daß der Ernteertrag umgekehrt proportional zum Schneckenbefall ist.)
11. Aus 5 l 90%igem Alkohol und 10 l 45%igem Alkohol soll durch Hinzufügen von Wasser 42%iger Alkohol hergestellt werden. Wieviel Liter Wasser muß zugesetzt werden?
12. Ein Wald enthält jetzt 17012 m^3 Holz. Wie groß war der Holzbestand vor 12 Jahren, wenn der jährliche Zuwachs 3% beträgt?
13. Wenn ein zwölfjähriges Kind $1,8 \text{ g}$ Eiweiß pro Kilogramm Körpergewicht pro Tag braucht, wieviel Kilogramm Eiweiß braucht dann ein zwölfjähriges Kind, das 50 kg wiegt, pro Jahr?

Vorkurs in Mathematik

Zusatzblatt 4

Potenzen, Wurzeln

1. Fassen Sie zusammen:

$$14u^3v^2 - (27 + 4/5)u^2v^3 - (9 + 2/3)u^3v^2 + \frac{5}{9}u^3v^2 + 17,5u^2v^3.$$

2. Berechnen Sie:

(a) $\left(\frac{20a}{12x}\right)^3 \cdot \left(\frac{12x}{4x}\right)^4,$

(b) $\left(\frac{m^5n^2}{x^7y^6}\right)^8.$

3. Schreiben Sie den folgenden Term ohne Bruchstriche, indem Sie Potenzen mit negativen Exponenten verwenden:

$$\frac{m/n}{(x^2 - 1)/(y^3 + 2)}.$$

4. Schreiben Sie als einen Bruch: $x^{-3m} + x^{-2m} + x^{-m+1}.$

5. Berechnen Sie: $(8m^{-7}n^2 - 15m^{-6}n + 7m^{-5} - 2m^{-4}n^{-1}) : 12m^{-4}n^{-3}.$

6. Berechnen Sie

$$\frac{3-a}{a^{m-4}} + \frac{a^6 - a^5 + 2a^3 - 1}{a^{m+1}} - \frac{2a^2 + 1}{a^{m-2}}.$$

7. Vereinfachen Sie:

(a) $\frac{(6u + 3v)^2(12u - 6v)^3}{(24u^2 - 6v^2)^2},$

(b) $\left(\frac{k^2 - 1}{p^2 - q^2}\right)^5 \cdot \left(\frac{p - q}{1 + k}\right)^5 : \left(\frac{1 - k}{p + q}\right)^5.$

8. Stellen Sie die folgenden Ausdrücke als Potenzen dar: $1/\sqrt{x}, x\sqrt{x}, x/\sqrt{x}, x\sqrt[3]{x}.$

9. Berechnen Sie

$$\frac{\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}{\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}}.$$

10. Bringen Sie den vor der Wurzel stehenden Faktor unter die Wurzel und vereinfachen Sie:

$$\frac{u+v}{u} \sqrt[3]{\frac{u^4 - u^3v}{u^2 + 2uv + v^2}}.$$

11. Formen Sie die folgenden Brüche so um, daß keine Wurzeln mehr im Nenner stehen: $x/\sqrt{x-y}$, $x/(\sqrt{x} - \sqrt{y})$, $x/[(1 + \sqrt{x})(2 - \sqrt{x})]$.

Vorkurs in Mathematik

Zusatzblatt 5

Gleichungen

1. Zerlegen Sie die folgenden quadratischen Ausdrücke in Linearfaktoren:

(a) $x^2 + x - 12$,

(b) $25x^2 - 378x + 45$.

2. Lösen Sie die folgenden Gleichungen rechnerisch und zeichnen Sie Skizzen.

(a) $|2x - 1| = -x + 1$,

(b) $|5 - 3x| = 3x - 1$.

3. Lösen Sie die Gleichungen: $\sqrt[4]{x} = 6$, $\sqrt[3]{x^2} = 4$ und $\sqrt{x^3} = 1/8$.

4. Die nachfolgenden Exponentialgleichungen sind zu lösen:

(a) $a^{x+5} = a^{12}$,

(b) $p^{3x+5} = p^{2x+1}$,

(c) $\sqrt{p^{12-x}} = p^{2(x+3)}$,

(d) $\sqrt[x]{\frac{22}{25}} = \frac{15}{7}$.

5. Lösen Sie die folgenden Ungleichungen:

(a) $\frac{2}{3} - \frac{1}{2}x < \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}$,

(b) $1 - \frac{3}{4}x \geq -\frac{1}{2}$,

(c) $9x^2 - 25 < 0$,

(d) $x^2 - 8x + 8 > 1$.

6. Welche Lösungsmengen haben die nachfolgenden Betragsungleichungen?

(a) $|3 - x| < 5$,

(b) $|x + 2| < 3$,

(c) $|x + 1| - 1 \leq x^3$,

(d) $|x + 2| - |1 - 2x| < 1$.

7. Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme:

(a) $x + y + z = 2$
 $3x + 3y + 4z = 31$
 $3x + y + z = 34$

(b) $x + y + z = 24$
 $x - y + z = 13$
 $-x + y + z = 7$

8. Welche Aussagen kann man über die Lösungen der folgenden Gleichungen treffen?

(a) $17(2 - 3x) - 8(1 - 7x) = 5(x + 12)$,

(b) $-8(1 - 7x) - 5(x + 12) = 17(3x - 2) - 34$.

9. Welche reellen Lösungen haben die folgenden Gleichungen?

(a) $t^4 - 13t^2 + 36 = 0$,

(b) $2x^4 - 8x^2 - 24 = 0$.

10. Welche reellen Lösungen besitzen die folgenden Gleichungen?

(a) $-2x^3 + 8x^2 = 8x$,

(b) $x^5 - 3x^3 + x = 0$.

11. Bestimmen Sie den Parameter c so, daß die Gleichung genau eine Lösung hat: $2x^2 + 4x = c$.

12. Für welche reellen Zahlen sind die folgenden Wurzeln reell?

(a) $\sqrt{2 - x}$,

(b) $\sqrt{1 + x^2}$,

(c) $\sqrt{4 - x^2}$,

(d) $\sqrt{\frac{6-x}{x+3}}$.

13. Was kann man über die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen sagen?

(a) $\sqrt{x^2 + 4} = x - 2$,

(b) $\sqrt{x + 1} = \sqrt{x - 1}$.

14. Finden Sie alle Lösungen der Gleichungen:

(a) $30 - \sqrt{x} = x$,

(b) $x + 3 = \sqrt{6x + 25}$,

(c) $x + 4 = \sqrt{8x + 25}$,

(d) $\sqrt{7x + 4} + x = 8$,

(e) $\sqrt{x + 3} + \sqrt{2x - 3} = 6$.

15. Das Gleichungssystem

$$x + 2y = 5$$

$$2x + 4y = 10$$

hat unendlich viele Lösungen, das System

$$x + 2y = 5$$

$$2x + 4y = 5$$

jedoch gar keine. Woran kann man dies erkennen? Interpretieren Sie die beiden Systeme geometrisch.

16. Das Alter eines Sohnes verhält sich zu dem des Vaters wie 6 : 13. Der Vater ist 28 Jahre älter als der Sohn. Wie alt ist jeder?

17. Um einen Behälter zu füllen, braucht die eine von zwei Pumpen 24 min mehr als die zweite. Beide gleichzeitig pumpen den Behälter in 35 min voll. In welcher Zeit füllt die erste Pumpe den Behälter allein?

Vorkurs in Mathematik

Zusatzblatt 6

Logarithmen

1. Berechnen Sie: $\log_3 \sqrt{3}$, $\log_{\sqrt{3}} 3$, $\log_3(1/\sqrt{3})$, $\log_{\sqrt{3}}(1/3)$, $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[3]{3}$, $\log_{\sqrt{3}}(3/\sqrt[3]{3})^{-1}$, $\log_{\sqrt{3}} 27$.

2. Berechnen Sie: $\log_7 10$; $\log_{\pi} 0,5$; $\log_{1994} 10$.
(Hinweis: Rechnen Sie in ein Logarithmensystem um, das auf Ihrem Taschenrechner vorhanden ist.)

3. Vereinfachen Sie:

$$\lg \left(\frac{\sqrt{a} \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[5]{c^4}} \right) - 4 \cdot \lg \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{b} \sqrt[5]{c}} \right) \quad (a, b, c > 0).$$

4. Es sind die Lösungsmengen folgender logarithmischer Gleichungen zu bestimmen:

(a) $4 + 3 \lg x = 5,2$;

(b) $\lg x^3 + 2 \lg x^2 = 20,4$;

(c) $\lg \sqrt[3]{2x} = 0,876$;

(d) $\lg 5^x = \lg 2^x + 2$;

(e) $\lg x^5 = \lg x^2 + 6$.

Vorkurs in Mathematik

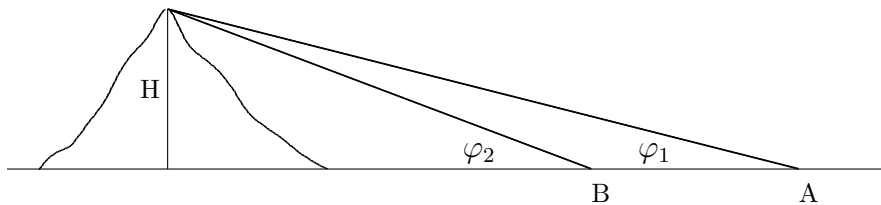
Zusatzblatt 7

Trigonometrie, Vektorbegriff

1. In einem rechtwinkligen Dreieck kennt man die Katheten $a = 437,6$ m und $b = 519,3$ m. Gesucht sind die Winkel α und β und die Hypotenuse c .
2. Um wieviel länger ist der Kreisbogen als die zugehörige Sehne, wenn $r = 80$ m und $\alpha = 22,3^\circ$ bekannt sind?
3. Vereinfachen Sie mit Hilfe des Additionstheorems für den Sinus:

$$\sin \varphi + \sin(\varphi + 120^\circ) + \sin(\varphi + 240^\circ).$$

4. Zeigen Sie, daß
 - (a) $\sin(\omega t + \pi) = -\sin \omega t$,
 - (b) $\sin(\omega t - \pi/2) = -\cos \omega t$,
 - (c) $\cos(\omega t - \pi/2) = \sin \omega t$.
5. Die Spitze eines Berges sieht man von einem Punkt A der vorgelagerten Ebene unter dem Winkel $\varphi_1 = 14,27^\circ$. Geht man in Blickrichtung um 1800 m weiter zu einem Punkt B der Ebene, sieht man die Bergspitze unter $\varphi_2 = 20,74^\circ$. Wie groß ist H ?



6. Ein Dreieck hat die Seiten 2 m, 3 m, 4 m. Wie groß sind die Winkel?

Lösungen zum Selbsttest

- 1) 1, 3, 5 2) (a) $ba + b$ (b) $A = 2x/y$ 3) (a) $6/5$ Tage = 1,2 Tage
(b) 72% 4) (a) 0,009 (b) $a^{10}b^3$ 5) 28 und 44 Zähne 6) (a) 2 (b) 3,01
7) 50 V; 74,31 V; $1/300$ s

Lösungen der Zusatzaufgaben

Mengen, Zahlen, Größen

- 1) \emptyset , $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$ 2) $2^{10} = 1024$
3) $\{x | x = 3n, n \in \mathbb{N}\}$, $\{x | x = -n, n \in \mathbb{N}\}$ 4) \mathbb{R} 5) \mathbb{R} , \emptyset , \mathbb{Z} ,
 $\{0, -1, -2, -3, \dots\}$ 6) \mathbb{N} , \mathbb{R} , \emptyset , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} 7) $\{0, -1, -2, \dots\} \cup \{-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\} =$
 $\{\frac{1}{2}, 0, -1, -\frac{3}{2}, -2, -3, \dots\}$ 8) $\{0\}$, $\{0\}$, $(-1, 0) \cup (0, 2) = (-1, 2) \setminus \{0\}$, \emptyset
9) $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$; $(-10, 0]$; $(-10, 3]$; $[-7, 0]$; $(-\infty, -10]$; $(0, \infty)$; $(-\infty, 3]$; $[-7, 0]$;
 $(-10, \infty) = B$ 10) A , A 11) $A \cup B \cup C$ 12) $A \cap B \cap C$ 13) $A = B$
14) $A = B$ 15) $A \subseteq B$ 16) $5,7 \cdot 10^{-6}$; $7 \cdot 10^{10}$; $8,4 \cdot 10^4$ l; $2,9 \cdot 10^{-5}$ m; $5 \cdot 10^{-11}$ F
17) $7_{10} = 111_2$, $10_{10} = 1010_2$, $15_{10} = 1111_2$, $16_{10} = 10000_2$, $17_{10} = 10001_2$,
 $50_{10} = 110010_2$, $100_{10} = 1100100_2$ 18) $100_2 = 4_{10}$, $1000_2 = 8_{10}$, $1111_2 = 15_{10}$,
 $1010111001_2 = 697_{10}$, $110111010_2 = 442_{10}$ 19) gerade Zahlen: letzte Ziffer 0,
ungerade Zahlen: letzte Ziffer 1 20) zweite und dritte 21) dimensionslos; Zeit;
 $1/(\text{Länge} \cdot (\text{Zeit})^2)$ 22) 29,7 Kilometer pro Sekunde

Klammern, Brüche

- 1) $30acx - 60adx - 20bcx + 40bdx - 12acy + 24ady + 8bcy - 16bdy$
2) $-a(2x - 11y + 5z) - 5b(x + y + z)$ 3) (a) $4a^2 - 12ab + 9b^2 - 16ac + 24bc + 16c^2$
(b) $\frac{4}{3}w - \frac{2}{9}z + \frac{2}{3}wz$ (c) $a - b$ 4) $(2/21) : (1/3)$; 0,3; $1/\pi$; $1/3$; $3/8$;
 $1/(\pi - 1)$ 5) $89/50$; $11/2$; $-183/10$; $7/100$; $100/49$; $-439/113$
6) 2, $(a+b)/(2\lambda)$ 7) $(3(2x-y) - 2(a+b))/((a+b)(2x-y))$ 8) $(m+1)/(m-2)$
9) $(3p+6q+2r)(3p+6q-2r)$ 10) (a) $2(6a^2 - x^2)/((x-a)(x-2a)(x-3a))$
(b) $(a^2 + b^2)/(ab)$ 11) (a) $(x^2(x-y-y^2) + y^2(3x+y))/(xy(x-y)(x+y))$
(b) $-(5m^2 + 7)/(5n)$ (c) $-1/x$ 12) (a) $x^2 + xa + a^2$ (b) $-5x + 7a - 3b$
(c) $x^2 + 2a^2 - a^3/(x+a)$ 13) $9w^2 - 480w + 6400 = (3w - 80)^2$

Proportionalität, Dreisatz, Prozentrechnung

- 1) (a) $x = k/y$ mit $k = 74,4 \text{ km s/h} = 74,4/3600 \text{ km}$ (b) weder pro-
portional, noch umgekehrt proportional (c) $x = ky$ mit $k = 0,84 \text{ m/kg}$
2) nein, Verhältnis Joule/cal unterschiedlich 3) 30 m 4) 149 ml 5) erste
Sorte: 23 Cent/Päckchen; zweite Sorte: 25 Cent/Päckchen 6) 23639,29 Euro
7) a proportional d 8) Durchmesser: $d_A/d_B = 286/204$, $d_A \approx 336 \text{ mm}$ 9) 10 m
10) $24 = 2$ Dutzend 11) 6,41 Wasser 12) 11932 m^3 13) 32,85 kg

Potenzen, Wurzeln

- 1) $u^2v^2(\frac{44}{9}u - \frac{103}{10}v)$ 2) (a) $375a^3/x^3$ (b) $m^{40}n^{16}/(x^{56}y^{48})$
3) $mn^{-1}(y^3+2)(x^2-1)^{-1}$ 4) $(1+x^m+x^{2m+1})/x^{3m}$ 5) $\frac{2}{3}m^{-3}n^5 - \frac{5}{4}m^{-2}n^4 + \frac{7}{12}m^{-1}n^3 - \frac{1}{6}n^2$ 6) $(a^3-1)/a^{m+1}$ 7) (a) $54(2u-v)$ (b) -1 8) $x^{-1/2}, x^{3/2}, x^{1/2}, x^{4/3}$ 9) $\sqrt[8]{a}$ 10) $\sqrt[3]{u^2-v^2}$ 11) $x\sqrt{x-y}/(x-y), x(\sqrt{x}+\sqrt{y})/(x-y), x(1-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})/((1-x)(4-x))$

Gleichungen

- 1) (a) $(x-3)(x+4)$ (b) $(x-15)(25x-3)$ 2) (a) $x_1 = 0; x_2 = 2/3$
(b) $x = 1$ 3) $1296; \pm 8; 1/4$ 4) (a) 7 (b) -4 (c) 0 (d) $-0,16773$
5) (a) $x > 7/5$ (b) $x \leq 2$ (c) $-5/3 < x < 5/3$ (d) $x < 1$ oder $x > 7$ (d.h. $(-\infty, 1) \cup (7, \infty)$) 6) (a) $L = (-2, 8)$ (b) $L = (-5, 1)$ (c) $L = [-1, 0] \cup [1, \infty)$
(d) $L = (-\infty, 0) \cup (2, \infty) = \mathbb{R} \setminus [0, 2]$ 7) (a) $x = 16; y = -27; z = 13$
(b) $x = 17/2; y = 11/2; z = 10$ 8) (a) keine Lösung (b) x beliebig
9) (a) $t_{1,2} = \pm 2; t_{3,4} = \pm 3$ (b) $x_{1,2} = \pm\sqrt{6}$, sonst keine reellen Lösungen
10) $x_1 = 0; x_2 = x_3 = 2$ 11) $x_1 = 0; x_{2,3} = \pm 1,618; x_{4,5} = \pm 0,618$
12) (a) $x \leq 2$ (b) $x \in \mathbb{R}$ (c) $|x| \leq 2$ (d) $-3 < x \leq 6$ 13) (a) $L = \emptyset$
(b) $L = \emptyset$ 14) (a) 25 (b) 4 (c) $x_{1,2} = \pm 3$ (d) 3 (e) 6 15) identische bzw. parallele Geraden
16) Sohn: 24 Jahre, Vater: 52 Jahre 17) 84 Minuten

Logarithmen

- 1) $1/2; 2; -1/2; -2; 2/3; -4/3; 6$ 2) $\log_7 10 = 1,18329\dots; \log_\pi 0,5 = -0,60551\dots; \log_{1994} 10 = 0,3030555\dots$ 3) $\lg(b^2a^{-3/2}) = 2\lg b - \frac{3}{2}\lg a$
4) (a) $2,5119$ (b) $820,9$ (c) $212,31$ (d) $5,026$ (e) 100

Trigonometrie, Vektorbegriff

- 1) $\alpha = 40,1^\circ; \beta = 49,9^\circ; c = 679,1 \text{ m}$ 2) ungefähr 20 cm 3) 0 5) 1394 m
6) $\alpha = 29,0^\circ; \beta = 46,5^\circ; \gamma = 104,5^\circ$

Griechisches Alphabet

Große Buchstaben	Kleine Buchstaben	Bezeichnungen
A	α	Alpha
B	β	Beta
Γ	γ	Gamma
Δ	δ	Delta
E	ε	Epsilon
Z	ζ	Zeta
H	η	Eta
Θ	θ, ϑ	Theta
I	ι	Iota
K	κ	Kappa
Λ	λ	Lambda
M	μ	Mü
N	ν	Nü
Ξ	ξ	Xi
O	\omicron	Omikron
Π	π	Pi
P	ρ, ϱ	Rho
Σ	σ, ς	Sigma
T	τ	Tau
Y	υ	Ypsilon
Φ	ϕ, φ	Phi
X	χ	Chi
Ψ	ψ	Psi
Ω	ω	Omega