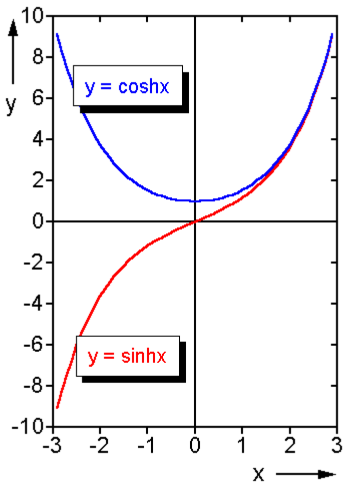
Über hyperbolische Funktionen

Für eine Reihe von Anwendungen insbesondere in der Physik erweist es sich als vorteilhaft, Funktionen zu definieren, die sich aus einfachen Exponentialfunktionen zusammensetzen.



Die Funktionen „sinus hyperbolikus“ bzw. „cosinus hyperbolikus“ sind wie folgt definiert:

$$\boxed{\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}} \qquad \boxed{\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}}$$

Wie in der Grafik zu sehen, ist

cosh x eine gerade Funktion, da $\cosh x = \cosh(-x)$

sinhx dagegen eine ungerade, da

$\sinh x = -\sinh(-x)$.

Interessant ist cosh x. Für diese Funktion gilt $\cosh x \geq 1$.

In der Technik stellt sie die Gleichgewichtslinie einer in zwei Punkten aufgehängten Kette (Kettenlinie) oder auch einen freistehenden Bogen dar (Gateway Arch; St. Louis, Missouri; USA).

Interessant ist das Verhalten der beiden Funktionen für $x \to \infty$. Da die Funktion e^{-x} für große x gegen 0 geht, streben letztendlich sowohl sinh x, als auch cosh x gegen $e^x/2$.

Wie leicht zu sehen ergibt sich außerdem (einfach ausrechnen):

$$e^x = \cosh x + \sinh x\,; \qquad e^{-x} = \cosh x - \sinh x\,; \qquad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Weiterhin ergeben sich folgende Zusammenhänge:

$$2 \cdot \cosh x \cdot \sinh x = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \sinh 2x$$

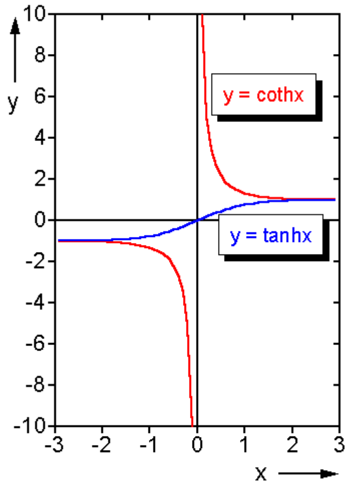
$$\cosh 2x + \sinh 2x = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \cos 2x$$

und allgemeiner die Additionstheoreme:

$$\sinh x \cdot \cosh y \pm \cosh x \cdot \sinh y = \sinh(x \pm y)$$

$$\cosh x \cdot \cosh y \pm \sinh x \cdot \sinh y = \cosh(x \pm y)$$

Die gezeigten Zusammenhänge haben eine auffällige Ähnlichkeit mit den (hoffentlich!) bekannten Beziehungen der trigonometrischen Funktionen. Den Grund dafür gibt’s später!



Die Funktionen „Tangens Hyperbolikus“ und Kotangens Hyperbolikus“ werden folgendermaßen definiert:

$$\boxed{\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}} \qquad \boxed{\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}}$$

Daraus ergibt sich: $|\tanh x| < 1$ und $|\coth x| > 1$.

$\tanh x$ ist über den gesamten Definitionsbereich stetig.

$\coth x$ ist unstetig bei $x = 0$.

Beide Funktionen haben einen Grenzwert von 1 für $x \to \infty$ und von -1 für $x \to -\infty$.

Desweiteren gilt:

$$\tanh 2x = \frac{2\tanh x}{1 + \tanh^2 x}; \qquad \tanh(x \pm y) = \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \cdot \tanh y}$$

Ableitungen von: $\cosh x$, $\sinh x$, $\tanh x$, $\coth x$

Betrachtet man die hyperbolischen Funktionen in ihrer Darstellung mittels eFunktion, ist leicht zu erkennen daß:

- $(\cosh x)' = \sinh x$
- $(\sinh x)' = \cosh x$
- $(\tanh x)' = \left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)' = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$
- $(\coth x)' = \left(\frac{\cosh x}{\sinh x}\right)' = \frac{\sinh^2 x - \cosh^2 x}{\sinh^2 x} = -\frac{1}{\sinh^2 x} = 1 - \coth^2 x$

Areafunktion als Umkehrfunktion der hyperbolischen Funktion

Die Bezeichnung Areafunktion entspringt dem Zusammenhang dieser Funktion mit dem Flächeninhalt (area) eines Hyperbelsektors.

Wie bekannt, entsteht eine Umkehrfunktion durch das Vertauschen der unabhängigen und der abhängigen Variablen, hier also y und x.

Man könnte als z.B. schreiben: $x = \cosh y$ – oder, um die gewohnte Schreibweise (unabhängige Variable getrennt auf der linken Seite) beizubehalten: $y = \operatorname{arcosh} x$. Die Funktion heisst Area-Kosinus-Hyperbolikus und ist die Umkehrfunktion zum Kosinus-Hyperbolikus. Es gilt also:

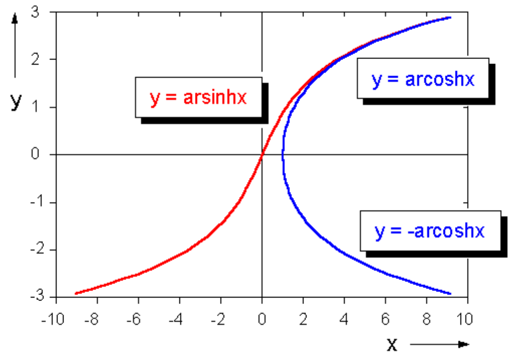
$$x = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \qquad \text{oder} \qquad e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0 \qquad \text{und damit}$$

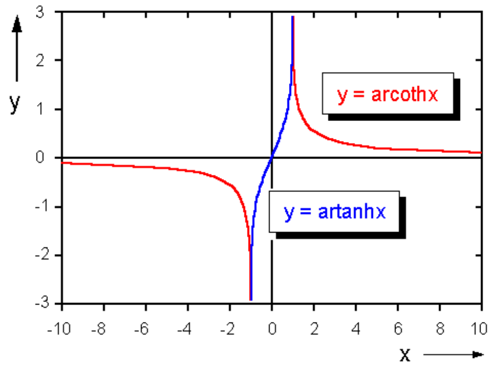
$$e^y = x \pm \sqrt{x^2 - 1} \qquad \Rightarrow \qquad y = \operatorname{ar}\cosh x = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1})$$

Nach dem gleichen Muster erhält man auch Ausdrücke für die übrigen Areafunktionen, so dass sich letztendlich ergibt:

$$\operatorname{ar}\cosh x = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1})$$
$$\operatorname{ar}\sinh x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$
$$\operatorname{ar}\tanh x = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$
$$\operatorname{ar}\coth x = \ln\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

Es ist zu beachten, dass der Logarithmus definitionsgemäß kein negatives Argument haben darf!





Die Ableitungen der Areafunktionen ergeben sich zu:

$$(\operatorname{ar}\cosh x)' = \frac{1}{\pm\sqrt{x^2 - 1}} \qquad (\operatorname{ar}\sinh x)' = \frac{1}{+\sqrt{x^2 + 1}}$$
$$(\operatorname{ar}\tanh x)' = \frac{1}{1 - x^2} \qquad (\operatorname{ar}\coth x)' = \frac{1}{1 - x^2}$$

Warum hyperbolische Funktionen ? - Zusammenhang mit der Hyperbel

So wie sich viele Funktionen in der sogenannten „Parameterform“ darstellen lassen, geht das auch mit der Hyperbel – mit Hilfe der hyperbolischen Funktionen. Mit

$$x = \pm a \cosh t \qquad \text{und} \qquad y = b \sinh t$$

ergibt sich durch Umstellen und eliminieren des Parameters t:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$$

Beachtet man das doppelte Vorzeichen, ergibt sich der bekannte analytische Ausdruck für eine Hyperbel.