REIHEN

§1. Definition und Konvergenz

Definition (unendliche) Reihe

$$s = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \ , \ a_k \in \mathbb{R}$$

Beispiele

1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots$

2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$

3) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^k} = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \ldots$

4) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$

Definition

Eine Reihe ist *konvergent* gegen die Reihensumme s wenn die Folge ihrer Teilsummen $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ den Grenzwert s besitzt.

Beispiel

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^k} = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \ldots = 1{,}111\ldots = 1 + \frac{1}{9} = \frac{10}{9}.$$

Übung

Untersuchen Sie die Konvergenz der Reihen in den Beispielen 1, 2 und 4.

Beispiel 5 die geometrische Reihe

$$|q| < 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + \ldots = \frac{1}{1-q}$$

Konvergenzkriterien

Satz1 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent $\Rightarrow a_k \to 0$.

Anwendung Beispiele 1-5

Satz2 für alternierende Reihen (Leibnitz)

Ist a_k eine monoton fallende Nullfolge , dann ist die alternierende Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot a_k$ konvergent ; der Unterschied zwischen dem Grenzwert s und der Teilsumme s_n ist kleiner als a_{n+1}.

'Formal' gilt somit:

$$a_k \searrow 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot a_k \to s, \quad |s - s_n| < a_{n+1}$$

Beispiel 6

die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k}$$

Absolute Konvergenz

Definition

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent, wenn $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergent ist.

Beispiele

a) Die alternierende harmonische Reihe ist konvergent aber nicht absolut konvergent.

b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \dfrac{1}{k^2}$ ist absolut konvergent.

Konvergenzsätze

(1) Quotienten- und (2) Wurzelkriterium

$$q_Q = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|, \quad q_W = \lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}$$

Für $q = q_Q$ oder $q = q_W$ gilt:

(a) $q < 1 \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent

(b) $q > 1 \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ ist divergent

(c) $q = 1 \Rightarrow$ keine Aussage möglich

Beispiele

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} 2^k/k^2, \quad \sum_{k=1}^{\infty} 2^k/k!$$

§2. Potenzreihen

Definition

Potenzreihe mit Entwicklungspunkt x_0 und Koeffizienten a_k.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x - x_0)^k =$$

$$= a_0 + a_1 \cdot (x - x_0) + a_2 \cdot (x - x_0)^2 + \ldots$$

Beispiele

1) $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$

2)

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x-1)^{2k}}{(2k)!} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{1}{4!}(x-1)^4 + \ldots$$

Satz

Eine Potenzreihe konvergiert im *Konvergenzintervall* $I = (x_0 - r\,,\; x_0 + r)$.
Für den *Konvergenzradius* gilt:

$$r = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| \quad \text{oder} \quad r = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}\;.$$

Beispiele (Konvergenzintervalle)

1) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$

Lösung:

$r = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{a_k}{a_{k+1}} = \lim \dfrac{1}{1} = 1$. Somit liegt Konvergenz im Bereich $(-1,1)$ vor. An den *Randpunkten* $x = \pm 1$ ist die Reihe nicht konvergent.

2) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x-1)^{2k}}{(2k)!}$

Lösung:

$$r = \lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{a_{k+1}} = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot \frac{[2(k+1)]!}{(-1)^{k+1}} \right| =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{(2k)!(2k+1)(2k+2)}{(2k)!} = \infty$$

Somit ist die Reihe im Intervall $(-\infty, \infty)$, d.h. für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergent.

§3. Taylorreihen

Satz von Taylor

Die Funktion $f(x)$ besitzt der Stelle x_0 Ableitungen bis zur Ordnung $n+1$.

Dann gilt die *Taylor Formel*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k + R_n(x)$$

Das *Restglied* $R_n(x)$ hat die Darstellung:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(u)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}, \; u \in (x_0, x).$$

<u>Folgesatz</u>

Ist $f(x)$ beliebig oft differenzierbar, dann besitzt die Funktion eine *Taylor Reihe*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k \; .$$

Der Konvergenzbereich dieser Reihe ist

$$K = \{x \in \mathbb{R} \; / \; \lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0\}.$$

Beispiele

1) e^x, $\cos x, \sin x;\ x_0 = 0$

2) $f(x) = \ln x,\ x_0 = 1$

Ergebnis:

$$\ln x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \cdot (x-1)^k,\ x \in (0,2]$$

3) $f(x) = (1+x)^a,\ x_0 = 0;\ \ (a \in \mathbb{R})$

Ergebnis: Die binomische Reihe

$$(1+x)^a = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} \cdot x^k = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!} x^2 + \ldots$$

wobei

$$\binom{a}{k} = \frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-k+1)}{k!}$$

Binomialkoeffizienten genannt werden.

Übung: Taylorreihe für $a = 1/2$.

§4. Rechnen mit Potenzreihen

Satz1

Gerade (ungerade) Funktionen besitzen Potenzreihen mit geraden (ungeraden) Potenzen.

Beispiele: trigonometrische Funktionen

Satz 2 (Ableiten und Integrieren)

Jede Potenzreihe ist im Inneren ihres Konvergenzintervalls:

- absolut konvergent,
- beliebig oft gliedweise differenzierbar,
- beliebig oft gliedweise integrierbar.

Die Potenzreihen der Ableitung und Stammfunktion haben dasselbe Konvergenzintervall wie die ursprüngliche Potenzreihe.

Satz 3 (Substituieren)

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot u^k \text{ konvergent für } |u| < r$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k [u(x)]^k \text{ konvergent für } \{x / |u(x)| < r\}$$

Beispiele

1) $\sin x, \quad \dfrac{1}{1-x}; \quad \dfrac{1}{1+x^2}$

2) $G(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$, Fehlerintegral (Gauß)

Satz4 (Elementare Operationen)

- Addition

- Multiplikation

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{k} a_n b_{n-k}\right)\cdot x^k$$

<u>Beispiel</u>

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

- Division

wird auf die Multiplikation zurückgeführt:

$$\frac{\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k}{\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \Leftrightarrow$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

<u>Beispiel</u>

Die Potenzreihe von $f(x) = \tan x$:

Lösung:

Ansatz:

$$f(x) = \tan x = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots$$

$f(x)$ ungerade $\Rightarrow c_0 = c_2 = c_4 = \ldots = 0$

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \Leftrightarrow \tan x \cdot \cos x = \sin x \Leftrightarrow$$

$$\left(c_1 x + c_3 x^3 + c_5 x^5 + \ldots\right)\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \ldots\right) =$$

$$x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \ldots$$

Der Koeffizientenvergleich ergibt

$$f(x) = \tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \ldots\,; \quad |x| < \frac{\pi}{2}$$