Lösungen zu den Arbeitsblättern

I. Einführung in die Uni-Mathematik

Nr. 1) a) $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ b) $B = \{-3, 2\}$ c) $C = \emptyset$

Nr. 2) $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ teilt } 12\}$
$B = \{\ldots, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2k+1 \text{ mit } k \in \mathbb{Z}\} = \{2k+1 \in \mathbb{Z} \mid k \in \mathbb{Z}\}$
$C = \{6, 7, 8, 9, 10, 11\} = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 < x < 12\}$

Nr. 3) Die Teilmengen sind $\{\}, \{o\}, \{m\}, \{a\}, \{o, m\}, \{o, a\}, \{m, a\}, \{o, m, a\}$.

Nr. 4) Es ist $A = \{2, 3, 5, 7\}$ und $B = \{1, 2, 5, 10\}$. Also gilt $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 10\}$, $A \setminus B = \{3, 7\}$, $\overline{A} = \{1, 4, 6, 8, 9, 10\}$, $A \cap B = \{2, 5\}$.

Nr. 5) $[\{4, 5, 7, 9, 10, 13\} \cap \{1, 3, 5, 7\}] \setminus \{7, 13, 19\} = \{5, 7\} \setminus \{7, 13, 19\} = \{5\}$

Nr. 6) a) $M_1 \cup (M_1 \cap M_2) = M_1$ b) $M_1 \cap (M_1 \cup M_2) = M_1$ c) $\emptyset \setminus M = \emptyset$

Nr. 7) a) $A = [3, 4)$ b) $B = [5, 19) \cap [13, 27) = [13, 19)$ c) $C = [2, 44]$
d) $D = \mathbb{R} \setminus (-33, \infty) = (-\infty, -33]$

Nr. 8) a) Die drei aufeinanderfolgenden Zahlen seien: $n, n + 1, n + 2$ mit $n \in \mathbb{N}$. Dann lässt sich die Summe folgendermaßen umformen:

$$n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3 = 3 \cdot (n + 1)$$

und dies ist immer durch 3 teilbar. Damit ist die Behauptung bewiesen.

b) Annahme: Es sei $\frac{a + b}{2} < \sqrt{a \cdot b}$. Folglich, $a + b < 2\sqrt{a \cdot b} \Longrightarrow (a + b)^2 < 4ab$ (da $a, b \geq 0$) $\Longrightarrow a^2 + 2ab + b^2 < 4ab \Longrightarrow a^2 - 2ab + b^2 < 0 \Longrightarrow (a - b)^2 < 0$. Dies ist ein Widerspruch, da eine Quadratzahl nie kleiner als 0 sein kann. Also ist die Annahme falsch und das Gegenteil richtig, d.h. die Behauptung $\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}$ ist richtig.

II. Der Aufbau des Zahlensystems

Nr. 9) a) 13 b) $9 - 6a$ c) $-66ab$ d) $11a^2 + 2ab - 8$

Nr. 10) a) $2x - 6y$ b) $2ab - \frac{17}{4}a$ c) $\frac{21}{4}x^2 - 7yx + \frac{91}{8}y - \frac{3}{8}x^2y + \frac{1}{2}y^2x - \frac{13}{16}y^2$

Nr. 11) a) 99 b) $\frac{7}{30}$ c) $4b(2a + 5b)$ d) $(8 - 5c)(7a - 5b)$

Nr. 12) a) $2{,}7x - 2{,}5y + 11z$ b) $-\frac{701}{450}a$ c) $-5x$ d) $\frac{13}{24}y^2 - \frac{5}{18}y$ e) $-\frac{37}{72}b$ f) $x - 1$
g) $\dfrac{175a}{32b} + \dfrac{14b}{a}$

Nr. 13) a) $\dfrac{6}{7}$ b) $\dfrac{21b}{11a}$ c) -1 d) $\dfrac{3u - 4v}{v - 3u}$

Nr. 14) Nur in Teilaufgabe c) herrscht Gleichheit.

Nr. 15) In beiden Gläsern befindet sich am Ende gleichviel des anderen Weines. Bezeichnet a die Weinmenge in einem Glas vor dem Umschütten und b die mit dem Löffel zu entnehmende Weinmenge, so gilt nach Durchführung der Umschüttungen:

Rotwein im Rotweinglas:	$a - b + \frac{b}{a+b} \cdot b = \frac{a^2}{a+b}$
Weißwein im Rotweinglas:	$0 + \frac{a}{a+b} \cdot b = \frac{ab}{a+b}$
Rotwein im Weißweinglas:	$0 + b - \frac{b}{a+b} \cdot b = \frac{ab}{a+b}$
Weißwein im Weißweinglas:	$a - \frac{a}{a+b} \cdot b = \frac{a^2}{a+b}$

Nr. 16) a) $\frac{1}{10}$ b) $\frac{173}{8}$ c) $-\frac{53}{63}$

Nr. 17) a) 60 b) $3|a|\sqrt{c}$ c) $\frac{25}{8}$ d) 40 e) $2\sqrt{2a+1}$ f) $\sqrt{35} - \sqrt{15}$ g) $\sqrt{2}$

Nr. 18) a) $D = [-4, \infty)$ b) $D = [0, \infty)$ c) $D = (-\infty, -1]$ d) $D = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
e) $D = \emptyset$ f) $D = [-1, 1]$

Nr. 19) a) $\sqrt{a} - 3\sqrt{b}$ b) $\frac{1}{5}$ c) $\sqrt{1+x}$ d) $2a + 10$ e) $-\left(2\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2$
f) $|3a - 1|$ g) $\frac{4}{\sqrt{1-2x}}$ h) $(a-2)^2$ i) $|a - 5|$

Nr. 20) $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a+b} \iff \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 \geq \left(\sqrt{a+b}\right)^2 \iff a + 2\sqrt{ab} + b \geq a + b$

Nr. 21) a) $x \neq 0$ b) $x \neq 1$ c) $x \neq \pm 1$ d) $x \neq 3$ e) $D = \mathbb{R}$ f) $a \neq \pm 1$

Nr. 22) a) $\frac{5}{2}\sqrt{2}$ b) $\frac{7}{3}\sqrt{6t}$ c) $\frac{\sqrt{a^2+ab} - \sqrt{ab+b^2}}{a-b}$ d) 0

Nr. 23) a) 12 b) $4(a^2+1)$ c) $24 - 656a$ d) $24 + 656a$

Nr. 24) a) $|a|$ b) $|x+2|$ c) $M = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 10| \leq 6\}$ d) $M = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 8| < 15\}$

III. Potenzen, Logarithmen und Binomialkoeffizienten

Nr. 25) a) $-\frac{1}{10}$ b) 1,69 c) $-0{,}00001$ d) $2 \cdot 10^8$ e) $4 \cdot 10^{-4}$ f) 10^5 g) -64 h) 64
i) $\frac{2}{5}$ j) 4 k) $\frac{1}{2}$ l) 3 m) 1

Nr. 26) a) $-x^6$ b) x^{-6} c) $-\frac{1}{2}$ d) $2x^2 + 5x$ e) $\frac{p}{(p-q)(u-v)^4}$ f) $\frac{10x^5}{z^5}$ g) $\sqrt[20]{x}$
h) $x^{\frac{11}{16}}$ i) $\frac{1}{2y}$ j) $\frac{a^{n-2}}{by^n x^{n-4}}$

Nr. 27) a) 2 b) -3 c) 0 d) $\frac{14}{15}$ e) $\frac{4}{3}$ f) $-\frac{1}{2}$

Nr. 28) a) > 0 b) > 0 c) < 0 d) < 0 e) < 0 f) > 0 g) 0

Nr. 29) a) $1 + \log_3 x$ b) $1 + \log_5 a - \log_5 x$ c) $\frac{1}{2} \lg a + 2 \lg b - \frac{1}{4} \lg c$
d) $10 \lg \left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[4]{b} \right) - \lg c$ e) $\frac{2}{5} \lg x + \frac{1}{2} \lg y - \frac{1}{2} \lg u - \frac{1}{4} \lg v$

Nr. 30) a) $\lg(u^2 v^3)$ b) $\lg \frac{(u+v)^3}{\sqrt{u}\sqrt[3]{v}}$ c) $\ln \sqrt[3]{xe^2}$ d) $-\lg(a+1)$ e) 0 f) $-0{,}5 \lg b$ g) $\ln \frac{x^2+1}{x^2}$

Nr. 31) a) 2,5 b) 2,4898961 c) $-1{,}6246966$ d) $\log_1$ ist nicht definiert

Nr. 32) $\binom{26}{15} = 7726160$

Nr. 33) $12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320$

Nr. 34) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!}$

$$= \frac{n!(k+1)}{(n-k)!(k+1)!} + \frac{n!(n-k)}{(n-k)!(k+1)!} = \frac{n!(k+1) + n!(n-k)}{(n-k)!(k+1)!}$$

$$= \frac{n!(k+1+n-k)}{(n-k)!(k+1)!} = \frac{n!(n+1)}{(n-k)!(k+1)!} = \frac{(n+1)!}{(n-k)!(k+1)!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{((n+1)-(k+1))!(k+1)!} = \binom{n+1}{k+1}$$

IV. Gleichungen und Ungleichungen

Nr. 35) a) $L = \left\{ \frac{1}{3} \right\}$ b) $L = \left\{ \frac{32}{25} \right\}$ c) $L = \mathbb{R}$ d) $L = \left\{ -\frac{294}{1675} \right\}$

Nr. 36) a) $L = \left\{ \frac{1-\sqrt{6}}{5}, \frac{1+\sqrt{6}}{5} \right\}$ b) $L = \left\{ \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2} \right\}$ c) $L = \emptyset$ d) $L = \left\{ 0, \frac{8}{7} \right\}$
e) $L = \{1\}$ f) $L = \left\{ -\frac{1}{3} \right\}$

Nr. 37) Für $u = 9$ eine Lösung, da Radikand gleich 0 ist.
Für $u < 9$ zwei Lösungen, da Radikand positiv ist.
Für $u > 9$ keine Lösung, da Radikand negativ ist.

Nr. 38) Ansatz: $\left(x - \left(1 + \sqrt{3}\right)\right)\left(x - \left(1 - \sqrt{3}\right)\right) = 0 \iff x^2 - 2x - 2 = 0$

Nr. 39) a) $D = \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$, $L = \{2\}$ b) $D = \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$, $L = \left\{ -\sqrt{3}, \sqrt{3} \right\}$
c) $D = \mathbb{R}$, $L = \{0\}$ d) $D = \left[-\frac{10}{3}, \infty \right)$, $L = \{5\}$

Nr. 40) a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $L = \left\{ 0, \frac{5}{2} \right\}$ b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $L = \emptyset$
c) $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $L = \{5\}$ (Beachte: $2 \notin D$)

Nr. 41) a) $x = -0{,}5$ b) $x = 0{,}4$ c) $x = \pm\sqrt{32}$ d) $x = \frac{1}{\sqrt[23]{10^{10}}}$ e) $\sqrt[7]{5^5}$

Nr. 42) a) $x = 100$ b) $x = \sqrt{10}$ c) $x = \sqrt{8}$ d) $x = \sqrt{10}$ e) $x = \frac{\sqrt{10}}{2}$ f) $x = \frac{5}{6}$
g) $x = 5$ h) $x = 16$

Nr. 43) a) $x = \frac{\ln 12}{\ln 4} \approx 1{,}79$ b) $x = \frac{1}{\lg 5} \approx 1{,}43$ c) $x = \frac{\ln 4{,}2}{\ln 3} \approx 1{,}31$

d) $x = 3$ e) $x = -1$ f) $x \leq -1$

Nr. 44) a) $L = \left(-\infty, -\frac{1}{8}\right]$ b) $L = (-7, \infty)$ c) $L = [1, 4]$

d) $D = \mathbb{R} \backslash \{1\}$ 1. Fall: $x - 1 > 0 \iff x > 1$

$$\begin{aligned} 3x + 2 &> -3(x-1) & \\ 3x + 2 &> -3x + 3 & \quad \mid +3x - 2 \\ 6x &> 1 & \quad \mid : 6 \\ x &> \tfrac{1}{6} & \quad L_1 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\right\} \end{aligned}$$

2. Fall: $x - 1 < 0 \iff x < 1$

$$\begin{aligned} 3x + 2 &< -3(x-1) & \\ 3x + 2 &< -3x + 3 & \quad \mid +3x - 2 \\ 6x &< 1 & \quad \mid : 6 \\ x &< \tfrac{1}{6} & \quad L_2 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \tfrac{1}{6}\right\} \end{aligned}$$

$L = L_1 \cup L_2 = \left(-\infty, \frac{1}{6}\right) \cup (1, \infty)$

e) $D = \mathbb{R} \backslash \{5\}$ 1. Fall: $x - 5 > 0 \iff x > 5$

$$\begin{aligned} -x + 3 &\leq -2(x-5) & \\ -x + 3 &\leq -2x + 10 & \quad \mid +2x - 3 \\ x &\leq 7 & \quad L_1 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 5 < x \leq 7\right\} \end{aligned}$$

2. Fall: $x - 5 < 0 \iff x < 5$

$$\begin{aligned} -x + 3 &\geq -2(x-5) & \\ -x + 3 &\geq -2x + 10 & \quad \mid +2x - 3 \\ x &\geq 7 & \quad L_2 = \emptyset, \end{aligned}$$

da eine Zahl nicht gleichzeitig größer als 7 und kleiner als 5 sein kann.

$L = L_1 \cup L_2 = L_1 = (5, 7]$

f) $D = \mathbb{R} \backslash \{\frac{1}{2}\}$ 1. Fall: $2x - 1 > 0 \iff x > \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} 4x + 3 &> 2(2x-1) & \\ 4x + 3 &> 4x - 2 & \quad \mid -4x \\ 3 &> -2 & \quad \text{dies ist immer richtig, also gilt:} \\ & & L_1 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \tfrac{1}{2}\right\} \end{aligned}$$

2. Fall: $2x - 1 < 0 \iff x < \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} 4x + 3 &< 2(2x-1) & \\ 4x + 3 &< 4x - 2 & \quad \mid -4x \\ 3 &< -2 & \quad \text{Widerspruch!} \qquad L_2 = \emptyset \end{aligned}$$

$L = L_1 \cup L_2 = L_1 = \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$

g) 1. Fall: $x - 7 \geq 0 \iff x \geq 7$ d.h. $|x - 7| = x - 7$

$$x - 7 \leq 2 \qquad \mid +7$$

$$
\begin{array}{llll}
 & x & \le 9 & L_1 = [7,9] \\
\text{2. Fall: } x-7 < 0 \iff x < 7 & & & \text{d.h. } |x-7| = -(x-7) \\
 & -x+7 & \le 2 & |-7 \\
 & -x & \le -5 & |:(-1) \\
 & x & \ge 5 & L_2 = [5,7)
\end{array}
$$

$L = L_1 \cup L_2 = [5,9]$

h) $L = \emptyset$ i) $L = (-\infty, -4{,}75) \cup (5{,}25, \infty)$ j) $L = \left(-\infty, \frac{1}{5}\right) \cup (9, \infty)$ k) $L = [2,4]$

l) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $L = \left(-2, -\frac{2}{5}\right] \cup [6, \infty)$ m) $D = \mathbb{R} \setminus \{5\}$, $L = (-\infty, 5) \cup (6, \infty)$

n) $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $L = [-1, 5] \setminus \{2\}$

III. Funktionen

Nr. 45) Es ist erlaubt, dass bei einer Funktion mehrere x-Werte denselben y-Wert besitzen. Beispielsweise ordnet die Funktionsgleichung $f(x) = 4$ jedem x-Wert den Wert $y = 4$ zu. Das Schaubild ist eine zur x-Achse parallele Gerade.

Nr. 46) Die Zuordnung $x \to y$ stellt eine Funktion dar, da zu jedem Gewicht x genau ein Preis y gehört.

Eine geschlossene Darstellung für diese Zuordnung gibt es nicht. Man kann die Funktion aber *abschnittsweise* angeben:

$$y = \begin{cases} 1{,}5x, & 0 \le x < 3 \\ x, & x \ge 3 \end{cases}$$

Nr. 47) a) Die unabhängige Variable ist die Körpergröße G, die abhängige Variable das Idealgewicht I. Der Funktionsterm lautet $I(G) = (G - 100) \cdot 0{,}9 = 0{,}9 \cdot G - 90$ (G in *cm*, I in *kg*). Diese Regel ist nur sinnvoll für Personen, die um einiges größer sind als 100 cm, da z.B. zu 100 cm das Idealgewicht $I = 0$ *kg* gehören würde.

b) Die unabhängige Variable ist die Zeit t, die abhängige Variable der Alkoholspiegel s (t in Stunden, s in Promille). Der Funktionsterm lautet: $s(t) = 1{,}2 - 0{,}15 \cdot t$.

Nr. 48) Geraden, die parallel zur x-Achse sind, besitzen die Gleichung $y = b$, d.h. die Steigung $m = 0$.
Geraden, die parallel zur y-Achse sind, besitzen die Steigung $m = \infty$ und können nicht in der Form $y = mx + b$ dargestellt werden; ihre Gleichungen besitzen die Form $x = a$.

Nr. 49) a) Die Gerade g schneidet die x-Achse bei $x = 7$, die y-Achse bei $y = 4$.

b) Allgemeine Regel: Eine Gerade in der Form $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ schneidet die x-Achse bei $x = a$ und die y-Achse bei $y = b$. Die umgeformte Geradengleichung heißt *Achsenabschnittsform*. (Beweis: Einsetzen von $x = 0$ bzw. $y = 0$.)

Nr. 50) a) $y = \frac{1}{3}x + \frac{85}{99}$ b) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ c) $y = \frac{5}{6}x$

Nr. 51) a) $y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$ b) $y = -\frac{105}{16}x + \frac{27}{4}$

Nr. 52) Schnittpunkt von f und g ist der Punkt $S\left(\frac{160}{23}, \frac{18}{23}\right)$.

Nr. 53) a) $S(3,2)$
b) Es gibt keinen Schnittpunkt, da $g_1 \mid\mid g_2$.
c) Da $g_1 = g_2$, gibt es unendlich viele Schnittpunkte.
Allgemein: Zwei Geraden $g_1 : y = m_1x + b_1$ und $g_2 : y = m_2x + b_2$ besitzen keinen Schnittpunkt, wenn sie parallel sind, d.h. wenn sie gleiche Steigungen haben ($m_1 = m_2$), aber verschiedene y-Achsenabschnitte ($b_1 \neq b_2$) besitzen.

Nr. 54) a) Die Geraden schneiden sich unter dem Winkel 90°.
Allgemein: Zwei Geraden schneiden sich unter dem Winkel 90°, wenn für ihre beiden Steigungen m_1 und m_2 gilt: $m_1 \cdot m_2 = -1$.
b) $g_3 : y = 2x + 1$
c) $g_2 : y = -\frac{8}{5}x - \frac{39}{5}$, der Schnittpunkt von g_1 und g_2 ist der Punkt $S\left(-\frac{432}{89}, -\frac{3}{89}\right)$.

Quadratische Funktionen

Nr. 55) Zeichnet man das Schaubild der Funktion $x \to -\frac{1}{3}x^2 + x + 2$, so erhält man eine nach unten geöffnete Parabel mit dem Scheitel $S\left(\frac{3}{2}, \frac{11}{4}\right)$, d.h. der Term nimmt für $x = \frac{3}{2}$ den größten Wert an. Einen kleinsten Wert gibt es nicht, da die Parabel nach unten geöffnet ist.

Nr. 56) $y = 2(x+2)^2 - 3 = 2x^2 + 8x + 5, \quad y = \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}x^2 - x + 2,$
$y = -\frac{1}{4}(x-3)^2 + 1 = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{5}{4}$

Nr. 57) a) $S\left(\frac{1}{2}, -2\right)$, $N_{1,2}\left(\frac{1}{2} \pm \sqrt{2}, 0\right)$, Verschiebung von $y = x^2$ um $\frac{1}{2}$ in x- und um -2 in y-Richtung.

b) $S(1,-2)$, keine Nullstellen, Spiegelung von $y = x^2$ an der x-Achse und Verschiebung um 1 in x-Richtung und -2 in y-Richtung.

c) $S\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{6}\right)$, keine Nullstellen, Streckung von $y = x^2$ mit dem Faktor $\frac{3}{2}$ und Verschiebung um $\frac{1}{3}$ in x- und um $\frac{5}{6}$ in y-Richtung.

d) $S\left(3, \frac{15}{2}\right)$, $N_{1,2}\left(3 \pm \sqrt{15}, 0\right)$, Stauchung von $y = x^2$ mit dem Faktor $\frac{1}{2}$, Spiegelung an der x-Achse und Verschiebung um 3 in x- und um $\frac{15}{2}$ in y-Richtung.

An der Lage des Scheitels (y-Wert) und dem Faktor a vor dem x^2-Glied kann man erkennen, ob Nullstellen existieren: In Teilaufgabe b) liegt beispielsweise S unterhalb der x-Achse, während $a = -1 < 0$ ist (die Parabel ist also nach unten geöffnet). Folgerung: Es gibt keine Nullstellen.

Nr. 58) a) $f(x) = 2x^2 - 12x + 21$, keine Nullstellenform

b) $f(x) = -3x^2 + 30x - 68 = (-3)\left(x - 5 + \frac{1}{3}\sqrt{21}\right)\left(x - 5 - \frac{1}{3}\sqrt{21}\right)$

c) $f(x) = 9x^2 + 72x + 142 = 9\left(x + 4 - \frac{1}{3}\sqrt{2}\right)\left(x + 4 + \frac{1}{3}\sqrt{2}\right)$

d) $f(x) = -11x^2 - 55x - 35{,}75 = (-11)\left(x + \frac{5}{2} - \sqrt{3}\right)\left(x + \frac{5}{2} + \sqrt{3}\right)$

Nr. 59) a) $S_1(3,1)$, $S_2\left(6, \frac{5}{2}\right)$

b) Keinen Schnittpunkt mit g hat z.B. die Gerade $y = 4$. Genau einen Schnittpunkt mit g hat die Gerade $y = 3$, sie berührt die Parabel im Scheitel.

Nr. 60) a) $S_1(1,1)$, $S_2\left(\frac{19}{3}, -\frac{23}{9}\right)$

b) Zwei Parabeln können 0, 1 oder 2 Schnittpunkte besitzen – vorausgesetzt die Parabeln sind nicht identisch.

Nr. 61) Da eine Parabel die allgemeine Form $y = ax^2 + bx + c$ mit den 3 Parametern a, b, c besitzt, ist eine Parabel durch die Angabe von 3 Punkten eindeutig bestimmt.

Durch die zwei Punkte $(0,0)$ und $(1,1)$ geht z.B. außer der Normalparabel $y = x^2$ auch noch die Parabel $y = -(x-1)^2 + 1$, die ihren Scheitel im Punkt $(1,1)$ hat.

Nr. 62) Die Schnittpunkte der zwei Schaubilder von K und U sind gerade die Stellen, an denen Umsatz und Produktionskosten gleich groß sind. Setzt man $U(x) = K(x)$ und löst man nach x auf, so erhält man: $x_1 = 2, x_2 = 8$. Die Firma macht dann Gewinn, wenn der Umsatz U größer ist als die Kosten K, d.h. dort, wo das Schaubild von U oberhalb von dem von K verläuft, also für $2 < x < 8$.

Nr. 63) a) Der erste Summand $\left(\frac{v}{10}\right)^2$ stellt den Bremsweg dar, der zweite $\frac{v}{3{,}6}$ den Reaktionsweg, den das Auto während der Reaktionszeit des Fahrers von 1 s zurücklegt.

b) Beachten Sie beim Zeichnen, dass der Scheitel der Parabel nicht im Ursprung $(0,0)$ des Koordinatensystems liegt, sondern bei $S(-13{,}9, -1{,}9)$.

c)

v in km/h	30	50	100	180
S in m	17,3	38,9	127,8	374

Ganz- und gebrochenrationale Funktionen

Nr. 64) Aus $f(x) : (x - x_1) = g(x)$ folgt $f(x) = (x - x_1) \cdot g(x)$. Ist nun x_2 eine Nullstelle von g, so gilt $f(x_2) = (x_2 - x_1) \cdot g(x_2) = (x_2 - x_1) \cdot 0 = 0$. Damit ist x_2 auch Nullstelle von f.

Nr. 65) a) $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = -3$ b) $t_1 = 0$, $t_2 = 0{,}2$, $t_3 = 0{,}8$

c) $x_1 = 2$ (Die durch Polynomdivision entstehende quadratische Gleichung hat keine weiteren Lösungen.)

d) $z_1 = 1$, $z_2 = -1$

Nr. 66) a) $(6x^3 + 5x^2 - 3x + 1) : (3x - 2) = 2x^2 + 3x + 1 + \dfrac{3}{3x - 2}$

b) $(a^3 - 2ab + b^3) : (a + b) = a^2 - ab + b^2 - 2b + \dfrac{2b^2}{a + b} = a^2 - ab + b^2 - \dfrac{2ab}{a + b}$

Nr. 67) a) $S_1(1, -5)$, $S_2(2, -16)$, $S_3(3, -27)$ b) $S_1(0, 10)$, $S_2(-1, 5)$, $S_3(2, 20)$

Nr. 68) a) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ b) $x = 1$

Nr. 69) a) Nullstellen des Zählers: $x_{1,2} = 0$, $x_3 = 4$, $x_4 = -1$. Nullstellen des Nenners: $x_5 = -2$, $x_6 = -3$. Nullstellen der Funktion $f(x)$ bei $x_{1,2} = 0$, $x_3 = 4$, $x_4 = -1$; Polstellen bei $x_5 = -2$ und $x_6 = -3$; keine hebbaren Definitionslücken. Für $|x| \to \infty$ verhält sich $f(x)$ wie $x^2 - 8x + 30$. (Polynomdivision!)

b) Nullstelle der Funktion $f(x)$ bei $x_2 = 0$; Polstellen bei $x_4 = -2$ und $x_5 = 3$; hebbare Definitionslücke bei $x_{1,3} = 1$. Für $|x| \to \infty$ gilt $f(x) \to 0$.

c) Nullstellen der Funktion $f(x)$ bei $x_1 = 0$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$; keine Polstellen; keine Definitionslücken. Für $|x| \to \infty$ hat $f(x)$ die schiefe Asymptote x. (Polynomdivision!)

Nr. 70) a) $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}$, $y_{1,2} = \frac{1}{1\pm\sqrt{3}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $x_1 = -1$, $y_1 = -1$; $x_{2,3} = \frac{7}{2} \pm \frac{\sqrt{33}}{2}$, $y_{2,3} = \frac{7}{8} \mp \frac{\sqrt{33}}{8}$

Nr. 71) Erklärung s. Nr. 62). Setzt man $U(x) = K(x)$ und rät man die Schnittstelle $x_1 = 20$, so erhält man durch Polynomdivision $x_{2,3} = 20 \pm \sqrt{520}$. Es gilt $x_2 = 20 + \sqrt{520} \approx 42{,}80$, $x_3 < 0$. Die Firma produziert also mit Gewinn für $20 < x < 42{,}80$.

Nr. 72) Eigenschaften s. Schaubilder! b) $A = 1$, $B = -1$

Exponentialfunktionen

Nr. 73) a)

x	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2	$2{,}5$	3
$f(x)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3\sqrt{3}}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	3	$3\sqrt{3}$	9	$9\sqrt{3}$	27
$g(x)$	$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{27\sqrt{3}}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9\sqrt{3}}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3\sqrt{3}}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	3

b) Wegen $g(x) = \frac{1}{9} \cdot 3^x = 3^{-2} \cdot 3^x = 3^{x-2}$ kann man sich das Schaubild von g aus dem von $f(x) = 3^x$ auch durch Verschiebung in x-Richtung um 2 entstanden denken.

Nr. 74) Eigenschaften des Schaubilds von f:
- Für $x \to \infty$ gilt $f \to 0$ (da $2^x \to \infty$), für $x \to -\infty$ gilt $f \to 4$ (da $2^x \to 0$).
- Wertebereich $W = (0, 4)$.
- Da das Schaubild punktsymmetrisch zum Punkt $(0, 2)$ ist, erhält man den Wert $f(-x)$ aus dem Funktionswert $f(x)$ mittels der Gleichung $f(-x) = 4 - f(x)$. Beispiel: $f(-3) = 2 + (2 - f(3)) = 4 - f(3)$.

Nr. 75) $f(x) = \frac{3}{2} \cdot \left(\sqrt{2}\right)^x = \frac{3}{2} \cdot 2^{\frac{1}{2}x}$. Die Funktion f nimmt den Wert 3 an der Stelle $x = 2$.

Nr. 76) $x = \frac{\ln 24}{\ln 6} \approx 1{,}77$, $y \approx 1{,}75$

Nr. 77) a) $f(t) = 80 \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)^t = 80 \cdot 2^{-t/3}$ b) $f(6) = 20$, $f(9) = 10$, $f(20) \approx 0{,}8$

c) $f(t) = 25$ bei $t \approx 5{,}0$ (min). d) Außentemperatur $0°C$, da $f(t) \to 0$ für $t \to \infty$.

e) Verwendung der Potenzgesetze liefert: $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)^t = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{1/3}\right)^t = \left(\frac{1}{2}\right)^{t/3}$.

Nr. 78) a) $f(t) = 40{,}9 \cdot 1{,}072^t$ b) $f(0) = 40{,}9 \approx 41$ c) $f(5 \cdot 60) \approx 46{,}8 \cdot 10^9$

d) Aus $2 \cdot 40{,}9 = 40{,}9 \cdot 1{,}072^t$ bestimmt man $t = 9{,}97 \approx 10$ (min). D.h. etwa alle 10 Minuten verdoppelt sich die Zahl der Bakterien.

Nr. 79) a) $f(0) = 22 - 16 = 6$ b)

t in min	0	15	30	45	60	75
f in $°C$	6	14	18	20	21	21,5

c) $f(t) = 15$ bei $t \approx 17{,}9$ d) $f(t) = 22 - 16 \cdot \left(0{,}5^{1/15}\right)^t = 22 - 16 \cdot 0{,}955^t$

Umkehrfunktionen

Nr. 80) a)

x	-2	-1	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}\sqrt{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}\sqrt{3}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{9}{4}\sqrt{3}$	$\frac{27}{4}$

b) $f^{-1}:\ y = \frac{\ln 4x}{\ln 3} = \log_3 4x = \log_3 x + \log_3 4$

Nr. 81) a)

x	0	± 1	± 2	± 4	± 6
y	-1	$-0{,}4$	0,6	2,2	3,2

b) $f(x) = 0$ bei $x = \pm\sqrt{2}$ c) $f(x) = 1$ bei $x = \pm\sqrt{6}$

Nr. 82) $D = [-4, 4]$, $W = [0, 4]$. Das Schaubild ist der obere Halbkreis um Urprung mit Radius 4. Durch Einschränken des Definitionsbereichs auf z.B. $[0, 4]$ kann f umgekehrt werden: $f^{-1}:\ y = \sqrt{16 - x^2}$. Das Schaubild von f^{-1} ist gleich dem von f, eingeschränkt auf den Bereich $[0, 4]$. Es bildet einen Viertelkreis.

Nr. 83) i) umkehrbar für alle $x \in \mathbb{R}$, $f^{-1}:\ y = 2x - 6$, $x \in \mathbb{R}$

ii*) umkehrbar z.B. für $x \geq 0$, $f^{-1}:\ y = \sqrt{\frac{x}{2}}$, $x \geq 0$

iii*) umkehrbar z.B. für $x \geq 0$, $f^{-1}:\ y = \sqrt{x - 1}$, $x \geq 1$

iv) umkehrbar für alle $x \in \mathbb{R}$, $f^{-1}:\ y = \log_2 9x$, $x > 0$

v) umkehrbar für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Funktion f^{-1} stellen wir abschnittweise dar:
$y = \sqrt[3]{\frac{x}{8}} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{x}$ für $x \geq 0$ und $y = -\sqrt[3]{\frac{|x|}{8}} = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{|x|}$ für $x < 0$.

vi) umkehrbar für alle $x \geq 0$, $f^{-1}:\ y = \left(\frac{x}{2}\right)^4$, $x \geq 0$

vii) umkehrbar für alle $x \neq 0$, $f^{-1}:\ y = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$ $(f = f^{-1})$

viii) umkehrbar für alle $x > 0$, $f^{-1}:\ y = 10^{x/3}$, $x \in \mathbb{R}$

Funktionen, bei denen der Definitionsbereich eingeschränkt werden muss, sind mit * gekennzeichnet.

Nr. 84) Das Vertauschen der x- und y-Koordinate entspricht dem Spiegeln des Schaubilds an der 1. Winkelhalbierenden $y = x$. Dabei entsteht aber ein Schaubild, das nicht mehr zu einer Funktion gehört. Will man f umkehren, so muss man den Definitionsbereich einschränken, z.B. auf $x \leq -3$ oder $-3 \leq x \leq 0$ oder $0 \leq x \leq 3$ oder $x \geq 3$.

Trigonometrische Funktionen

Nr. 85)

α	$45°$	$30°$	$1°$	$60°$	$15°$	$540°$	$135°$	$240°$	$450°$
x	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{180}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{12}$	3π	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{5}{2}\pi$

Nr. 86) a) $\sin 38° > 0$, $\cos 105° < 0$, $\sin 105° > 0$, $\cos 214° < 0$, $\cos 299° > 0$, $\sin 311° < 0$

b) $\sin 40° = 0{,}643$, $\sin 249° = -0{,}934$, $\cos 99° = -0{,}156$, $\sin \frac{\pi}{8} = 0{,}383$, $\sin(1{,}3\pi) = -0{,}809$, $\cos \frac{8}{7}\pi = -0{,}901$

c) i) $\sin x = 0{,}3 \rightarrow x_1 = 0{,}3$ $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\text{SIN}}$ $= 0{,}305$. Der zweite x-Wert ist bezüglich der Stelle $x = \frac{\pi}{2}$ zum ersten Wert symmetrisch. Es gilt daher $x_2 = \frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} - x_1\right) = \pi - x_1 = 2{,}837$.

ii) $\cos x = 0{,}3 \rightarrow x_1 = 1{,}266$. Den zweiten x-Wert erhält man aus der Beziehung $x_2 = 2\pi - x_1 = 5{,}017$.

iii) $\sin x = -0{,}75 \rightarrow x^* = -0,848$. Da $x^* < 0$ ist, liefert hier der Taschenrechner einen Wert, der nicht im Intervall $[0, 2\pi]$ liegt. Da der Sinus jedoch periodisch mit Periode 2π ist, erhält man einen der gewünschten x-Werte, indem man zu x^* 2π hinzuaddiert: $x_1 = x^* + 2\pi = 5{,}435$. Den zweiten x-Wert erhält man, wenn man bedenkt, dass x_1 und x_2 symmetrisch bezüglich der Stelle $x = \frac{3\pi}{2}$ sind: $x_2 = \frac{3\pi}{2} - \left(x_1 - \frac{3\pi}{2}\right) = 3\pi - x_1 = 3{,}990$.

iv) $\cos x = -0{,}75 \rightarrow x_1 = 2,419$. Aus Symmetriegründen ergibt sich wie oben: $x_2 = \pi + (\pi - x_1) = 2\pi - x_1 = 3{,}864$.

Nr. 87) b) $\sin 65° = 0,906$, $\cos 65° = 0,423$

c) Der Winkel $180° - 65° = 115°$ hat denselben sin-Wert wie der Winkel $65°$. Der Winkel $360° - 65° = 295°$ hat denselben cos-Wert wie der Winkel $65°$.

Nr. 88) Die Beziehung gilt nach dem Satz des Pythagoras für das rechtwinkligen Dreieck im Einheitskreis, bei dem die zwei Katheten die Länge $\sin x$ und $\cos x$ haben und die Hypotenuse die Länge 1 besitzt.

Nr. 89) a) $y = \sin(x - 0{,}4\pi)$, $\quad y = 2\sin(x + 0{,}2\pi)$

b) Die Schaubilder sind identisch, da die sin-Funktion die Periode 2π hat: $\sin(x+4\pi) = \sin(x + 2 \cdot (2\pi)) = \sin x$.

Nr. 90) a)

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$	$210°$	$225°$
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	n.d.	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1

α	$240°$	$270°$	$300°$	$315°$	$330°$	$360°$
x	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
$\tan x$	$\sqrt{3}$	n.d.	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Definitionsmenge $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \ldots\right\}$. Wertebereich $W = \mathbb{R}$. Periode π, d.h. $\tan(x+\pi) = \tan x$.

b) $\tan x = 2 \to x_1 = 2\ \boxed{\text{INV}}\ \boxed{\text{TAN}} = 1{,}107$. Da der Tangens periodisch mit Periode π ist, gilt: $x_2 = x_1 + \pi = 4{,}249$.

VI. Folgen und Reihen

Nr. 91) a) $(a_n) = (-3, 9, -27, 81, -243, \ldots)$, $a_{21} \approx -1{,}04 \cdot 10^{10}$, $a_{99} \approx -1{,}72 \cdot 10^{47}$

b) $(a_n) = \left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \ldots\right)$, $a_{21} = \frac{1}{441}$, $a_{99} = \frac{1}{9801}$

c) $(a_n) = (-1, 1, -1, 1, -1, \ldots)$, $a_{21} = -1$, $a_{99} = -1$

d) $(a_n) = \left(-5, -\frac{7}{5}, -1, -\frac{11}{13}, -\frac{13}{17}, \ldots\right)$, $a_{21} = -\frac{5}{9}$, $a_{99} = -\frac{67}{131}$

Nr.92) Die Rekursion für die Folge der ungeraden Zahlen lautet $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 2$.

Nr.93) a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} k(k+1)$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{33} 3ak$ c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{k}{2}$

Nr.94) a) arithmetische Folge, $a_1 = 7$, $d = 7$ b) geometrische Folge, $a_1 = 1$, $q = 2$

c) geometrische Folge, $a_1 = \frac{4}{3}$, $q = \frac{2}{3}$ d) arithmetische Folge, $a_1 = -1$, $d = -3$

Nr. 95) a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{25} 3n = 25 \cdot \frac{3+75}{2} = 975$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{37} (2n-3) = 1295$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{17} 3 \cdot 2^{n-1} = 3 \cdot \frac{2^{17}-1}{2-1} = 393213$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{99} 7 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \approx 10{,}5$

Nr. 96) a) $K(18) = 100 \cdot 1{,}035^{18} = 185{,}75$

b) $K(t) = 200 = 100 \cdot 1{,}035^{t} \implies t \approx 20{,}1$

c) $250 = 100 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{18} \implies p = 100 \cdot \left(\sqrt[18]{2{,}5} - 1\right) \approx 5{,}22$

Nr. 97) a) $|a_{n+1} - a_n| = \left|\dfrac{3(n+1)+1}{(n+1)-2} - \dfrac{3n+1}{n-2}\right| = \left|\dfrac{(3n+4)(n-2) - (3n+1)(n-1)}{(n-1)(n-2)}\right|$

$= \left|\dfrac{3n^2 - 2n - 8 - 3n^2 + 2n + 1}{(n-1)(n-2)}\right| = \left|\dfrac{-7}{(n-1)(n-2)}\right| < \dfrac{1}{1000}$

$\iff n^2 - 3n + 2 > 7000 \iff n \geq 86$

b) $|b_{n+1} - b_n| = \dfrac{1}{2^{n+1}} \leq \dfrac{1}{1000} \iff n \geq 9$

Nr. 98) a) Die Folge $(a_n) = \left(\dfrac{n}{2n+1}\right)$ ist streng monoton wachsend, beschränkt und konvergiert gegen den Grenzwert $g = \frac{1}{2}$. Das können wir folgendermaßen beweisen.

1. Monotonie: $a_{n+1} - a_n = \dfrac{n+1}{2(n+1)+1} - \dfrac{n}{2n+1} = \dfrac{1}{(2n+3)(2n+1)} > 0$, damit gilt $a_{n+1} > a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folge ist also streng monoton wachsend.

2. Beschränktheit: Es gilt $a_n = \dfrac{n}{2n+1} \geq a_1 = \dfrac{1}{3}$. Außerdem gilt $a_n = \dfrac{n}{2n+1} < \dfrac{n}{2n} = \dfrac{1}{2}$. Die Folge besitzt also die Schranken $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{2}$ und ist mithin beschränkt.

3. Grenzwert $g = \frac{1}{2}$: Die Differenzfolge $\left(a_n - \dfrac{1}{2}\right) = \left(\dfrac{n}{2n+1} - \dfrac{1}{2}\right) = \left(-\dfrac{1}{4n+2}\right)$ ist eine Nullfolge, also besitzt die Folge den Grenzwert $g = \frac{1}{2}$.

b) Die Folge $\left(\dfrac{n+\sqrt{n}}{4\sqrt{n}}\right)$ ist streng monoton wachsend, besitzt die untere Schranke $\frac{1}{2}$, keine obere Schranke und ist divergent.

c) Die Folge $\left(\dfrac{n^2+n+1}{5n^2+n}\right)$ ist streng monoton fallend, besitzt die untere Schranke 0 und die obere Schranke $\frac{1}{2}$ und konvergiert gegen den Wert $\frac{1}{5}$.

d) Die Folge $\left(\dfrac{(-3)^n+2}{2\cdot(-3)^n}\right) = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{(-3)^n}\right)$ zeigt keine Monotonie, besitzt die untere Schranke $\frac{1}{6}$, die obere Schranke $\frac{11}{18}$ und den Grenzwert $g = \frac{1}{2}$.

e) Die Folge $\left(\dfrac{\sin n}{n}\right)$ zeigt keine Monotonie, besitzt die untere Schranke -1, die obere Schranke 1 und den Grenzwert $g = 0$.

f) Die Folge $\left(\dfrac{n^3}{n^2+1}\right)$ ist streng monoton steigend, besitzt die untere Schranke $\frac{1}{2}$, keine obere Schranke und ist divergent.

VII. Kurven und Gleichungen von Kegelschnitten

Nr. 99) a) $\dfrac{x}{(-5)} + \dfrac{y}{3} = 1$ b) $\dfrac{x}{\left(\frac{2}{3}\right)} + \dfrac{y}{(-2)} = 1$

Nr. 100) $(AB): y = -\frac{1}{6}x - \frac{5}{3}$, $c = \sqrt{37}$ $(BC): y = -5x + 8$, $a = \sqrt{26}$
$(CA): y = \frac{4}{5}x + \frac{11}{5}$, $b = \sqrt{41}$

Nr. 101) $2\sqrt{17}$

Nr. 102) a) $x^2 + y^2 = 2, \quad x^2 + y^2 - 2 = 0$
b) $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 36, \quad x^2 - 2x + y^2 - 2y - 34 = 0$
c) $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 1, \quad x^2 + 4x + y^2 + 6y + 12 = 0$
d) $(x+1)^2 + (y-5)^2 = 3, \quad x^2 + 2x + y^2 - 10y + 23 = 0$

Nr. 103) Die gegebenen Gleichungen müssen durch quadratisches Ergänzen in die Form der allgemeinen Kreisgleichung gebracht werden.
a) $x^2 + 8x + y^2 + 2y + 15 = x^2 + 8x + (16 - 16) + y^2 + 2y + (1 - 1) + 15$
$= (x^2 + 8x + 16) + (y^2 + 2y + 1) - 16 - 1 + 15 = (x+4)^2 + (y+1)^2 - 2 = 0$
$\Leftrightarrow \quad (x+4)^2 + (y+1)^2 = 2$
Also hat der Kreis den Mittelpunkt $M_1 = (-4, -1)$ und den Radius $r_1 = \sqrt{2}$.
b) $M_2 = (1, 1)$ und $r_2 = 3$.

Nr. 104) A liegt nicht, B liegt auf dem Kreis um M mit Radius 10.

Nr. 105) a) $\left(\frac{x}{11}\right)^2 + \left(\frac{y}{5}\right)^2 = 1, \quad 25x^2 + 121y^2 - 3025 = 0$

b) $\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{7}\right)^2 = 1, \quad 49x^2 + 9y^2 - 441 = 0$

c) $\left(\frac{x}{1}\right)^2 + \left(\frac{y}{1}\right)^2 = 1, \quad x^2 + y^2 - 1 = 0$

Nr. 106) a) $2x^2 - 2y^2 + 16x + 10y - \frac{105}{2} = 0 \iff x^2 - y^2 + 8x + 5y - \frac{105}{4} = 0 \iff$
$(x^2+8x+16) - 16 - (y^2 - 2\cdot\frac{5}{2}y + \frac{25}{4}) + \frac{25}{4} - \frac{105}{4} = 0 \iff (x+4)^2 - \left(y-\frac{5}{2}\right)^2 = 36$
$\implies$ Hyperbel, da vor x^2 und y^2 verschiedene Vorzeichen stehen.

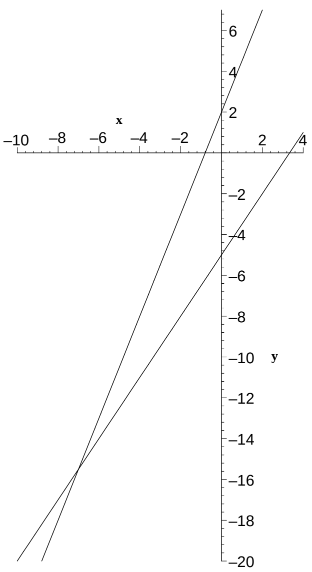
b) $(x+4)^2 + 5y + 30 = 0 \implies$ Parabel $(y = -\frac{1}{5}(x+4)^2 - 6)$.

c) $\frac{(x-3)^2}{3^2} + \frac{y^2}{12^2} = 1 \implies$ Ellipse um den Punkt $M(3,0)$ mit Halbachsenlängen 3 und 12.

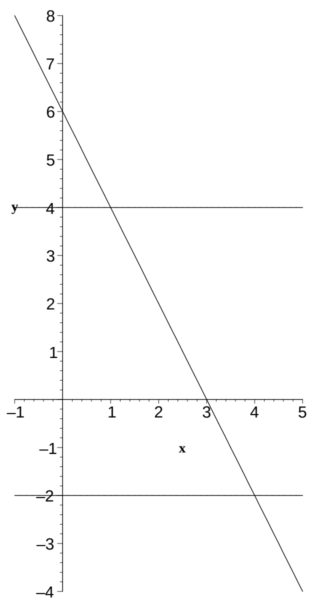
d) $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 25 \implies$ Kreis mit Mittelpunkt $M(-2,4)$ und Radius $r = 5$.

Schaubilder

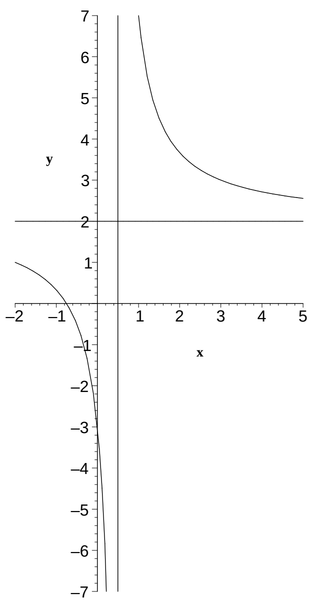
zu Nr. 44 b)



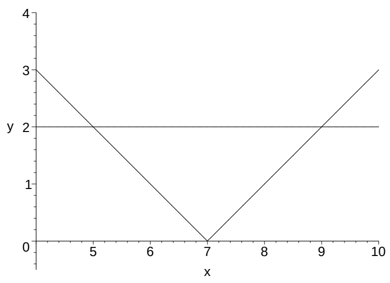
zu Nr. 44 c)



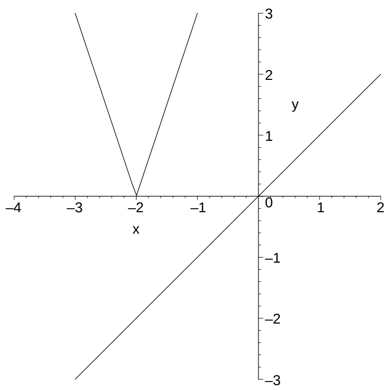
zu Nr. 44 f)



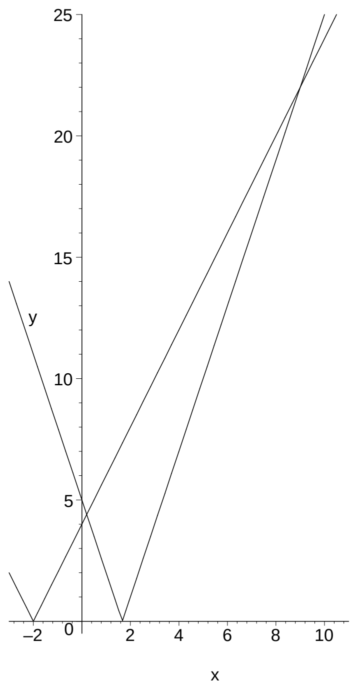
zu Nr. 44 g)



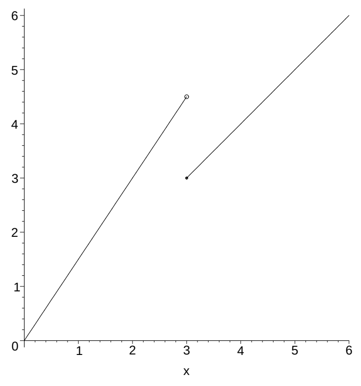
zu Nr. 44 h)



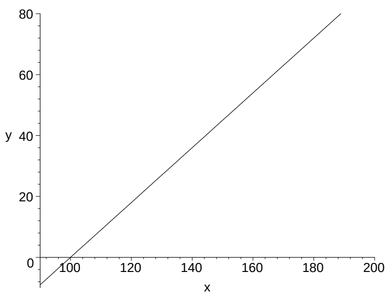
zu Nr. 44 j)



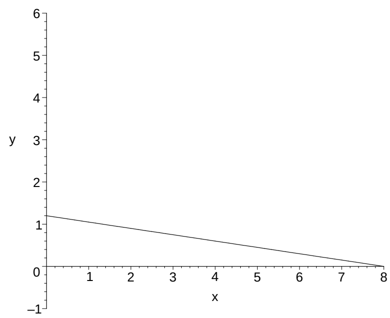
zu Nr. 46)



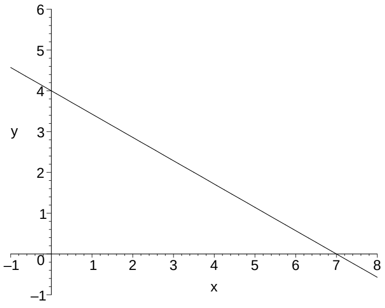
zu Nr. 47 a)



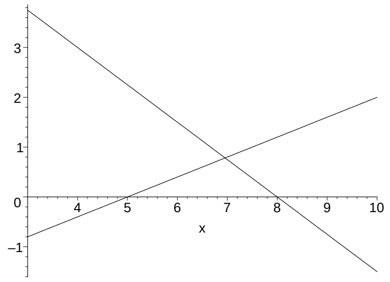
zu Nr. 47 b)



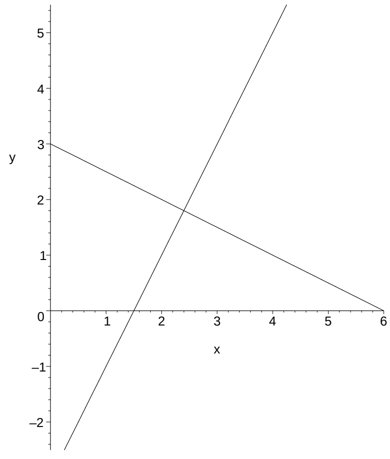
zu Nr. 49)



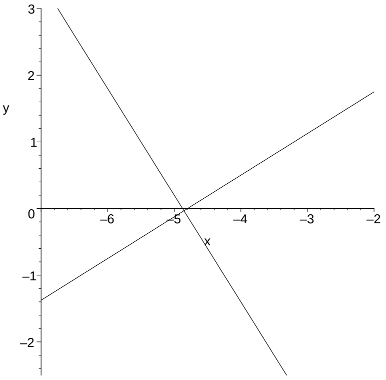
zu Nr. 52)



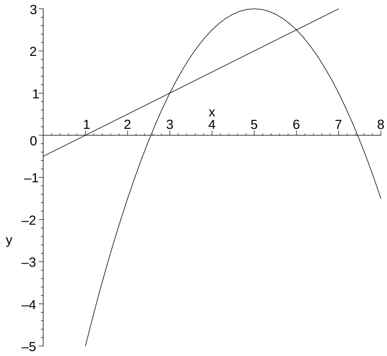
zu Nr. 54 a)



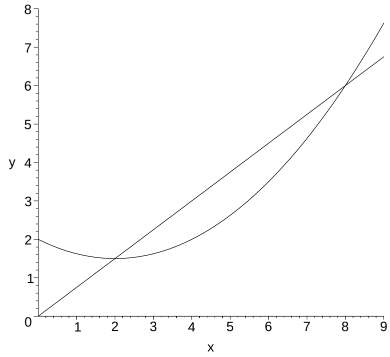
zu Nr. 54 c)



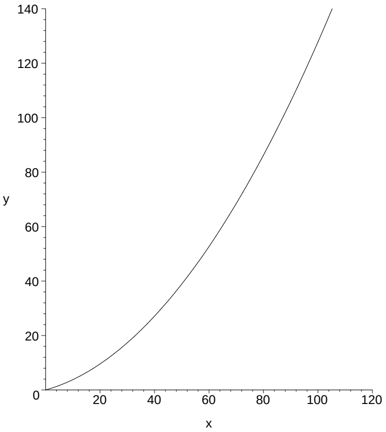
zu Nr. 59)



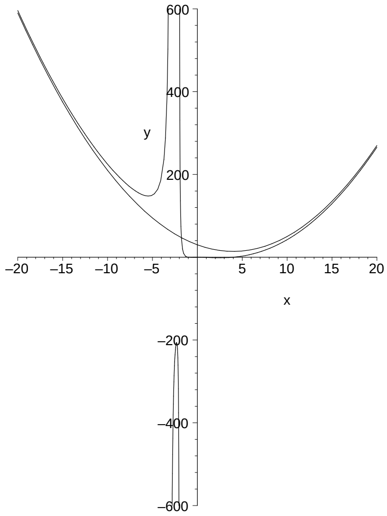
zu Nr. 62)



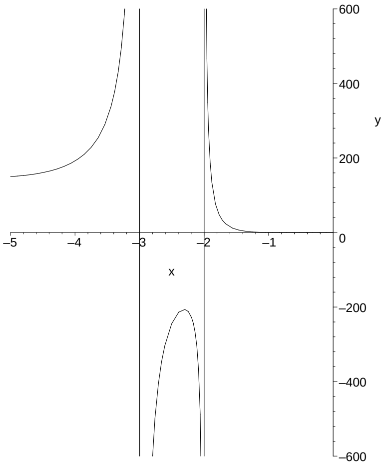
zu Nr. 63)



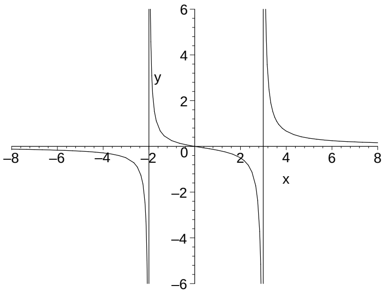
zu Nr. 69 a)



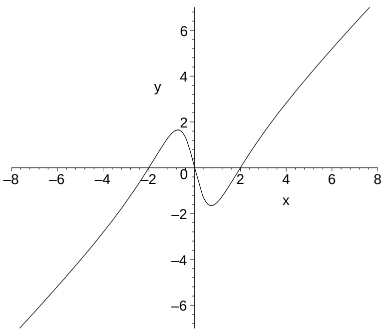
zu Nr. 69 a)



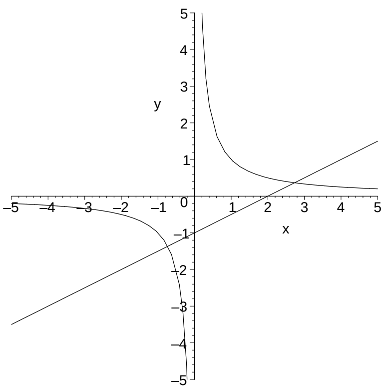
zu Nr. 69 b)



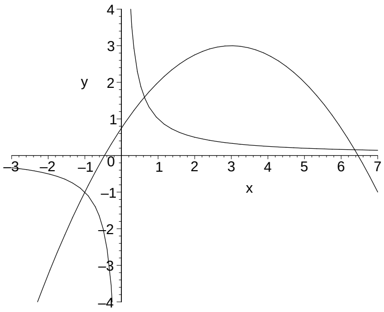
zu Nr. 69 c)



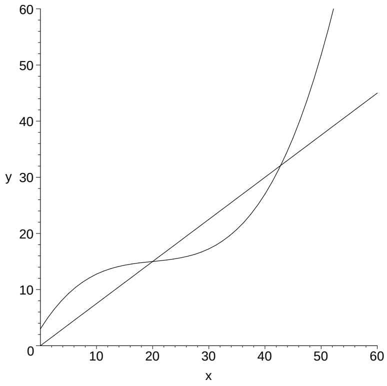
zu Nr. 70 a)



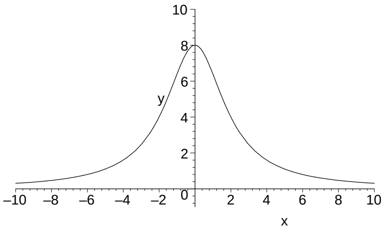
zu Nr. 70 b)



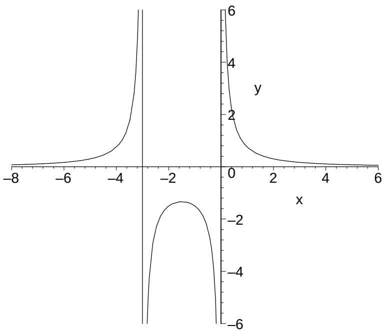
zu Nr. 71)



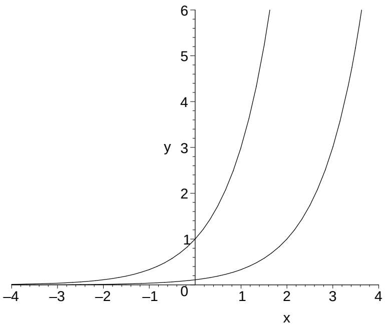
zu Nr. 72 a)



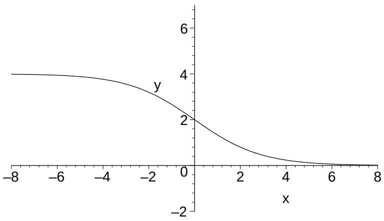
zu Nr. 72 b)



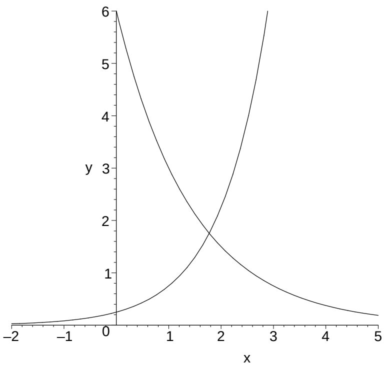
zu Nr. 73)



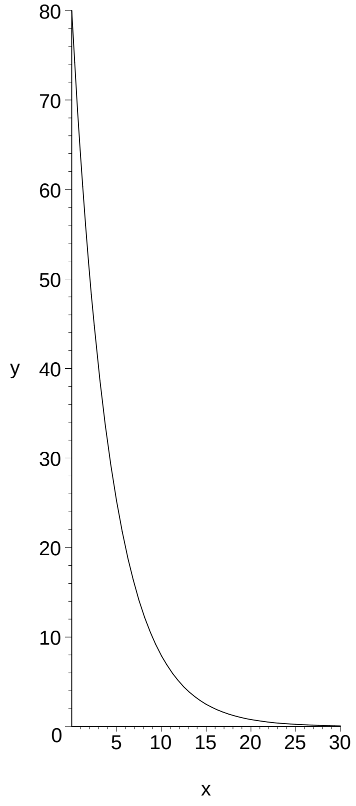
zu Nr. 74)



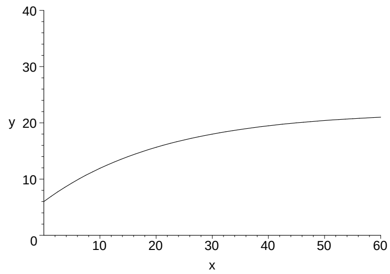
zu Nr. 76)



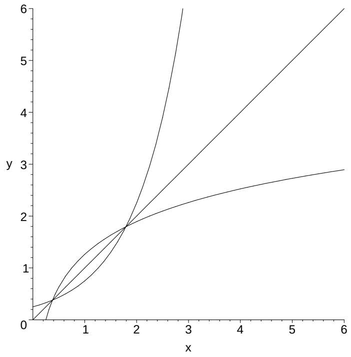
zu Nr. 77)



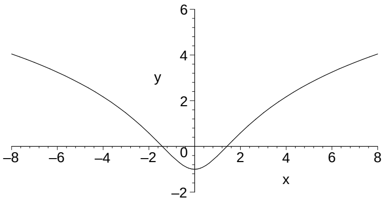
zu Nr. 79)



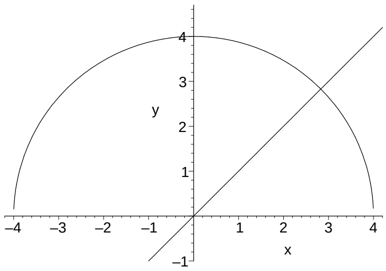
zu Nr. 80)



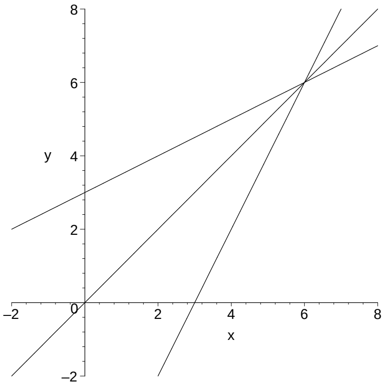
zu Nr. 81)



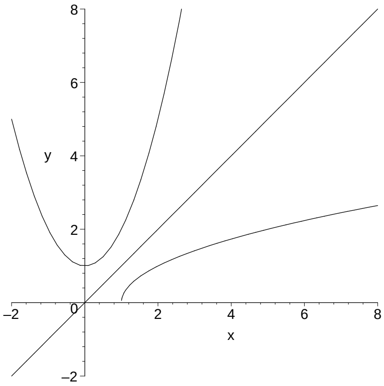
zu Nr. 82)



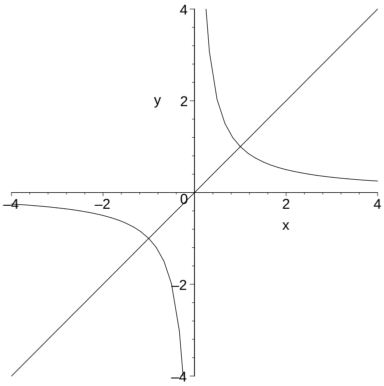
zu Nr. 83 i)



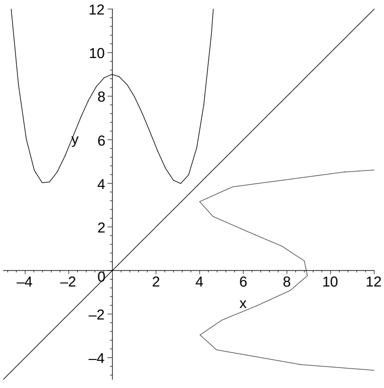
zu Nr. 83 iii)



zu Nr. 83 vii)



zu Nr. 84)



zu Nr. 90)