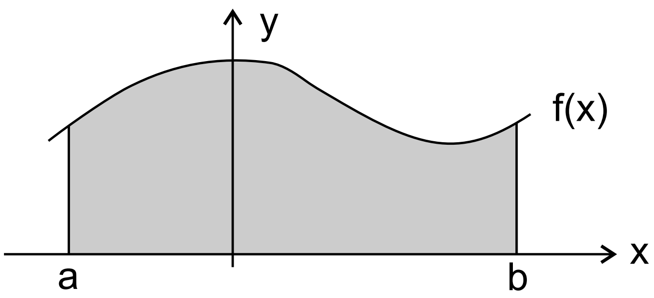
Kapitel 8

Integration

- Einführung
- Grundbegriffe
- Integrationstechniken
- Uneigentliche Integrale
- Mehrfachintegrale
- Anwendungen

Fragestellung bei Integration

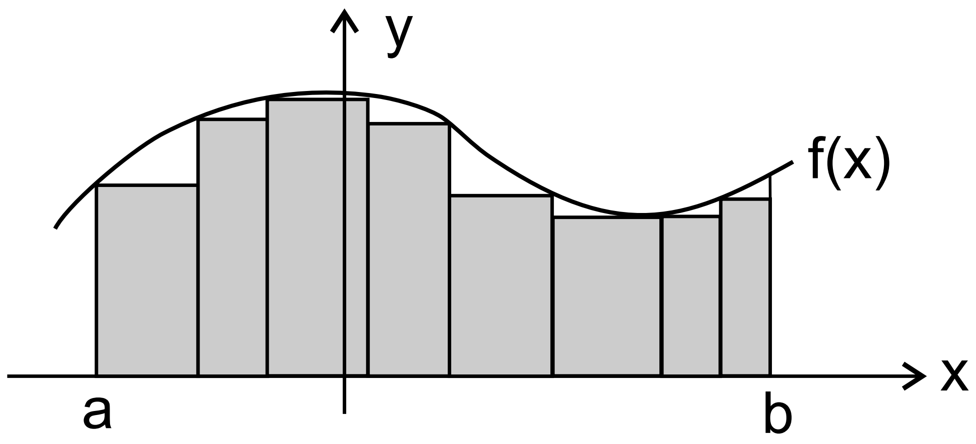
Bei der Integration geht es anschaulich gesprochen um die Frage der Flächenmessung: Sei dazu eine auf einem Intervall $[a, b]$ definierte, beschränkte Funktion $f(x)$ gegeben.



Wie kann man dann den grau unterlegten Flächeninhalt zwischen Funktion und x-Achse berechnen (oder überhaupt erst definieren)?

Idee bei Integration

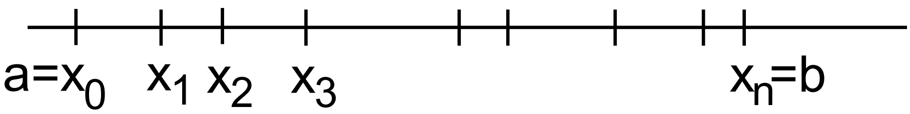
Man zerlegt die zu bestimmende Fläche in (kleine) Rechtecke und summiert deren Flächeninhalte auf. Will man eine noch bessere Näherung, so muss man die Fläche in immer mehr und immer „dünnere" Rechtecke aufteilen.



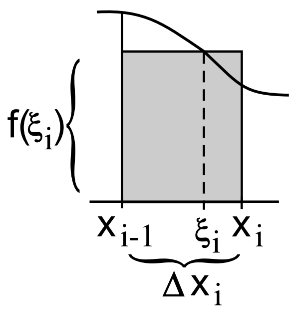
Vorgehen bei Integration

Im Einzelnen ist folgende Prozedur durchzuführen:

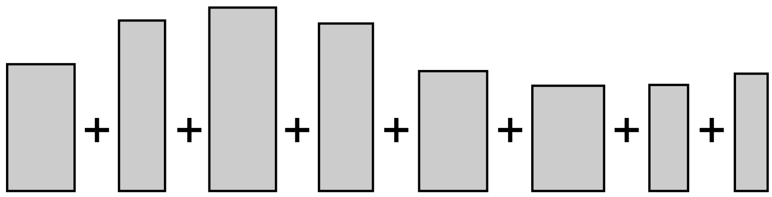
- Intervall $[a, b]$ in n Teilintervalle $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, ..., n$, der Breite $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ zerlegen (dabei $a = x_0$, $b = x_n$),



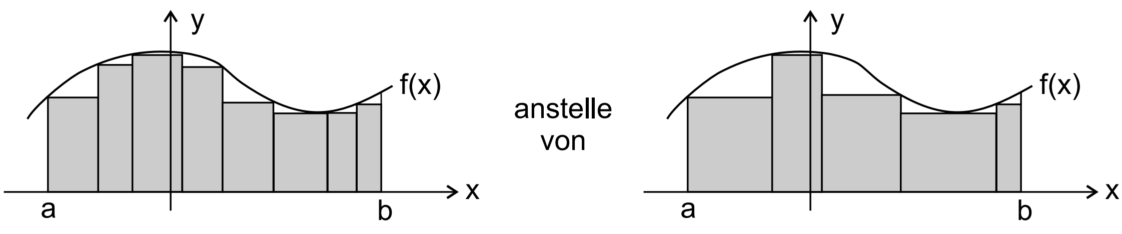
- über jedem Teilintervall ein Rechteck konstruieren, dessen Länge einem Funktionswert von f an irgendeiner Zwischenstelle $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ aus diesem Teilintervall entspricht,



- alle einzelnen Rechteckflächen $f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ aufsummieren zur Gesamtfläche
$s_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$,



- Näherungswert s_n verbessern, indem man eine feinere Unterteilung (= Partition) des Intervalls $[a, b]$ wählt und damit die Anzahl der Teilintervalle erhöht, aber gleichzeitig die Breite *aller* verkleinert.



Bestimmtes Integral

Definition

Falls die beschriebene Prozedur für $n \to \infty$ in jedem Fall gegen einen bestimmten Grenzwert konvergiert, so bezeichnet man

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

als bestimmtes Integral von f über dem Intervall $[a, b]$. Dann heißt die Funktion f integrierbar über $[a, b]$, a untere Integrationsgrenze, b obere Integrationsgrenze, $[a, b]$ Integrationsintervall, f Integrand und x Integrationsvariable.

Rechenregeln für das bestimmte Integral

Für das bestimmte Integral gilt:

a) $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx,$

b) $\int_a^a f(x)\,dx = 0,$

c) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$
$a < c < b$

d) $\int_a^b \alpha \cdot f(x)\,dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x)\,dx,$

e) $\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx$
$= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx,$

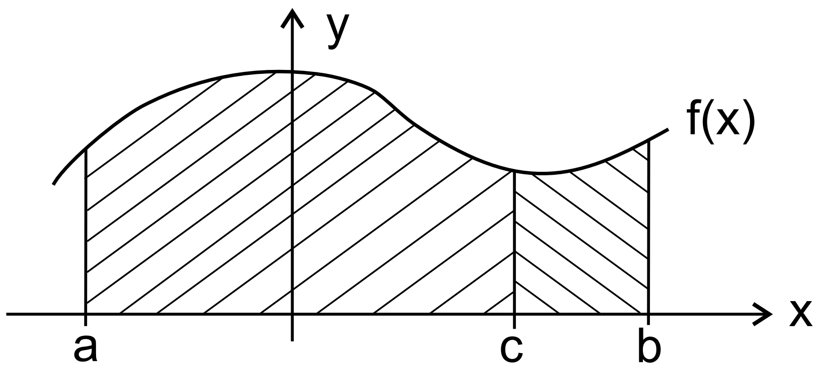
f) **Falls** $f(x) \leq g(x)$ **und** $a \leq b,$ **dann gilt:**
$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx,$

g) **Falls** $m \leq f(x) \leq M$ **für alle** $x \in [a, b],$
dann gilt:
$m\,(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M\,(b-a).$

Rechenregeln für das bestimmte Integral (Veranschaulichung)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

für $a < c < b$



Ableitung der Integralfunktion

Es sei f eine auf $[a, b]$ definierte stetige Funktion. Die durch

$$\tilde{F}(x) := \int_a^x f(t)\, dt$$

definierte Integralfunktion hat die Ableitung

$$\tilde{F}\,'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\, dt\right) = f(x).$$

Die Ableitung der Integralfunktion ist also gleich dem Wert des Integranden an der oberen Grenze. Die Integration ist demnach die Umkehrung der Differentiation.

Stammfunktion

Definition

Eine Funktion $F(x)$, deren Ableitung gleich einer gegebenen Funktion $f(x)$ ist, d.h. für die $F'(x) = f(x)$ auf einem Intervall gilt, heißt Stammfunktion von f auf diesem Intervall.

Beispiel

a) *Die Funktion* $F_1(x) = \frac{1}{3}x^3$ *ist Stammfunktion der Funktion* $f(x) = x^2$*.*

b) *Die Funktion* $F_2(x) = \frac{1}{3}x^3 - 17$ *ist Stammfunktion der Funktion* $f(x) = x^2$*.*

c) *Die Funktion* $\tilde{F}(x) = \int_a^x t^2\, dt$ *ist Stammfunktion der Funktion* $f(x) = x^2$*.*

Hat man aber eine Stammfunktion gefunden (wie in a)), so erhält man durch Addition einer beliebigen Konstanten (z.B. von -17 in b)) eine weitere Stammfunktion, denn die Ableitung einer Konstanten ist immer gleich 0. Es gilt sogar, dass man durch Addition einer beliebigen Konstanten zu einer Stammfunktion *alle Stammfunktionen* einer Funktion erhält.

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Sei $F(x)$ eine (beliebige) Stammfunktion von $f(x)$. Dann gilt für das bestimmte Integral

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\big|_{x=a}^{b} = F(b) - F(a).$$

Mit Hilfe des Hauptsatzes lassen sich bestimmte Integrale ganz einfach in zwei Schritten berechnen:

- Man bestimme eine beliebige Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$ (Beachte: $F'(x) = f(x)$).

- Man werte die Stammfunktion an der oberen und an der unteren Integrationsgrenze aus ($F(b)$ und $F(a)$) und subtrahiere diese beiden Werte.

Übung

Berechnen Sie mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung die folgenden Integrale:
a) $\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx$ *und* *b)* $\int_1^2 \sqrt{x} \, dx$.

Lösung

a) *Es gilt:*

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx &= \sin x \Big|_{x=0}^{\pi/2} \\ &= \sin(\pi/2) - \sin 0 \\ &= 1 - 0 = 1.\end{aligned}$$

b) *Es gilt:*

$$\begin{aligned}\int_1^2 \sqrt{x} \, dx &= \int_1^2 x^{1/2} \, dx = \frac{2}{3} x^{3/2} \Big|_{x=1}^{2} \\ &= \frac{2}{3}\left(2^{3/2} - 1^{3/2}\right) \\ &\approx \frac{2}{3}(2.8284 - 1) \approx 1.2189.\end{aligned}$$

Tabelle der Grundintegrale

Funktion $f(x)$	Stammfunktion $F(x)$
$x^\alpha, \quad \alpha \neq -1$	$\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + c$
$\frac{1}{x}, \quad x \neq 0$	$\ln\lvert x\rvert + c$
e^x	$e^x + c$
$\sin x$	$-\cos x + c$
$\cos x$	$\sin x + c$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + c$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \lvert x\rvert < 1$	$\arcsin x + c$

Unbestimmtes Integral

Definition

Die Menge aller Stammfunktionen von f wird mit $\int f(x)\,dx$ bezeichnet und heißt unbestimmtes Integral von f.

Die Bezeichnung $\int f(x)\,dx$ für das unbestimmte Integral drängt sich durch den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung förmlich auf:

Man erhält das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,dx$, indem man einen Vertreter der Stammfunktionen, genannt $\int f(x)\,dx$, wählt und an den Integrationsgrenzen a und b auswertet.

Rechenregeln für unbestimmte Integrale

Es gilt:

a) $\int \alpha \cdot f(x)\,dx = \alpha \cdot \int f(x)\,dx,$

b) $\int (f(x) + g(x))\,dx$
$= \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$

Übung

Worin besteht der Unterschied zwischen $\int \cos x \, dx$, $\int_0^x \cos t \, dt$ *und* $\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx$ *?*

Lösung

a) *Der Ausdruck* $\int \cos x \, dx$ *heißt unbestimmtes Integral und steht für die Gesamtheit aller Stammfunktionen von* $\cos x$*:* $\int \cos x \, dx = \sin x + c$.

b) *Der Term* $\int_0^x \cos t \, dt$ *ist eine einzelne Stammfunktion von* $\cos x$*.*

c) *Schließlich ist* $\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx$ *ein bestimmtes Integral, dessen Wert gleich der reellen Zahl* 1 *ist. Anschaulich gesprochen gibt* $\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx$ *den Flächeninhalt zwischen der Cosinus-Funktion und der* x*-Achse über dem Intervall* $[0, \pi/2]$ *an.*

Partielle Integration

Die Produktregel der Differentialrechnung für die Ableitung des Produktes zweier Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ lautet:

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x).$$

Integration auf beiden Seiten liefert:

$$u(x)v(x) = \int (u(x)v(x))' dx$$

$$= \int u'(x)v(x)\, dx + \int u(x)v'(x)\, dx.$$

Nach Umordnung der Terme erhalten wir:

Die Integrationsregel der partiellen Integration lautet:

$$\boldsymbol{\int u'(x) \cdot v(x) dx}$$

$$\boldsymbol{= u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x) dx.}$$

Beispiel

Eine einfache Anwendung der partiellen Integration liefert die Stammfunktion zu $\int x \cdot \mathrm{e}^x \, dx$:

$$\begin{aligned} \int \underbrace{\mathrm{e}^x}_{u'} \cdot \underbrace{x}_{v} \, dx &= \underbrace{\mathrm{e}^x}_{u} \cdot \underbrace{x}_{v} - \int \underbrace{\mathrm{e}^x}_{u} \cdot \underbrace{1}_{v'} \, dx \\ &= x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + c. \end{aligned}$$

Wir wollen nun noch kurz untersuchen, was passiert wäre, wenn wir als u' bzw. v die jeweils andere Funktion gewählt hätten:

$$\int \underbrace{x}_{u'} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^x}_{v} \, dx = \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{u} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^x}_{v} - \int \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{u} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^x}_{v'} \, dx$$

Diese Gleichung ist zwar mathematisch korrekt, führt aber nicht weiter, da das verbleibende Integral $\int x^2 \mathrm{e}^x \, dx$ komplizierter ist als das Ausgangsintegral $\int x\mathrm{e}^x \, dx$.

Übung

Berechnen Sie das Integral $\int \ln x \, dx$ *mittels partieller Integration*
(Tipp: Wählen Sie $v = \ln x$ *und* $u' = 1$*).*

Lösung

$$\begin{aligned}
\int \ln x \, dx &= \int \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{\ln x}_{v} \, dx \\
&= \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\ln x}_{v} - \int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{v'} \, dx \\
&= x \cdot \ln x - \int 1 \, dx = x \cdot \ln x - x + c.
\end{aligned}$$

Substitution

Auch aus der Kettenregel erhalten wir eine Integrationsformel. Die Ableitung der verketteten Funktion $F(x) = F(g(t))$ mit $x = g(t)$ ergibt nämlich:

$$F'(x) = F'(g(t)) \cdot g'(t).$$

Wenn $F(x)$ Stammfunktion von $f(x)$ ist (d.h. $F'(x) = f(x)$), folgt durch Integration

$$\int f(g(t)) \cdot g'(t)\, dt = \int f(x)\, dx.$$

Die Integrationsregel der Substitution lautet:

$$\boldsymbol{\int f(g(t)) \cdot g'(t)\, dt = \int f(x)\, dx, \quad x = g(t).}$$

Beispiel zur Substitution

Beispiel

Wir wollen im Folgenden das Integral

$$\int (\ln t)^2 \cdot \frac{1}{t}\, dt$$

mittels Substitution berechnen.

(Da wiederum das Produkt zweier Funktionen zu integrieren ist, könnte man aber evtl. auch mit Hilfe von partieller Integration zum Ergebnis kommen.)

Wir substituieren hier jedoch $x = \ln t$*, übersetzen also gleichermaßen von der „t“-Sprache in die „x“-Sprache. Dass gerade diese Substitution gewählt wird, liegt daran, dass die Ableitung von* $\ln t$*, nämlich* $\frac{1}{t}$*, ebenfalls im Integranden steht: Denn wegen* $x = \ln t$ *folgt für die Ableitung* $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}$ *und (indem wir* $\frac{dx}{dt}$ *als Bruch auffassen)* $dx = \frac{1}{t}dt$*.*

Beispiel zur Substitution (Fortsetzung)

Damit liegt folgende Umformung nahe:

$$\int (\ln t)^2 \cdot \frac{1}{t}\, dt = \int x^2\, dx.$$

Das transformierte Integral in x ist einfach zu lösen:

$$\int x^2\, dx = \frac{1}{3}x^3 + c.$$

Nun muss noch nach t rücksubstituiert werden:

$$\frac{1}{3}x^3 + c = \frac{1}{3}(\ln t)^3 + c.$$

In der Terminologie der Substitutionsregel ist: $f(x) = x^2$, $g(t) = \ln t$ und damit

$$\int \underbrace{(\ln t)^2}_{f(g(t))} \cdot \underbrace{\frac{1}{t}}_{g'(t)}\, dt = \int \underbrace{x^2}_{f(x)}\, dx.$$

Insgesamt haben wir als Ergebnis erhalten:

$$\int (\ln t)^2 \cdot \frac{1}{t}\, dt = \frac{1}{3}(\ln t)^3 + c.$$

Beispiel zur Substitution

Beispiel

Das Integral $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$, $|x| \leq 1$ *wird unter Zuhilfenahme der Substitution* $x = \sin t$ *bestimmt. Um diese Substitution auszuführen, schreiben wir uns zunächst eine Art „Wörterbuch“ zur Übersetzung von der „x“-Sprache in die „t“-Sprache:*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \sin t \\ x^2 & = & \sin^2 t \\ 1-x^2 & = & 1-\sin^2 t = \cos^2 t \\ \sqrt{1-x^2} & = & \cos t \quad \textit{(Beachte: } \cos t \geq 0) \\ \frac{dx}{dt} & = & \cos t \quad \textit{also } dx = \cos t\,dt. \end{array} \right\} \qquad (*)$$

Damit erhalten wir folgende Umformung:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \underbrace{\cos t}_{\sqrt{1-x^2}} \cdot \underbrace{\cos t\,dt}_{dx} = \int \cos^2 t\,dt.$$

Beispiel zur Substitution (Fortsetzung)

Wir entnehmen einer Formelsammlung:

$$\int \cos^2 t\, dt = \frac{1}{2}(t + \sin t \cos t) + c.$$

Wegen $x = \sin t$ *und entsprechend* $t = \arcsin x$ *und obigem „Wörterbuch“ (*$*$*) erfolgt noch die Rücksubstitution von Termen in* t *in* x*-Ausdrücke:*

$$\frac{1}{2}(t + \sin t \cos t) + c$$

$$= \frac{1}{2}(\underbrace{\arcsin x}_{t} + \underbrace{x}_{\sin t} \cdot \underbrace{\sqrt{1 - x^2}}_{\cos t}) + c.$$

Insgesamt:

$$\int \sqrt{1 - x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left(\arcsin x + x \cdot \sqrt{1 - x^2}\right) + c,$$

für $|x| \leq 1$.

Uneigentliche Integrale

Man kann den bekannten Integrationsbegriff für stetige Funktionen auf endlichen Intervallen $[a, b]$ auch noch weiter ausdehnen: So genannte *uneigentliche Integrale* treten in zwei Fällen auf, nämlich

- bei unendlichem Integrationsintervall und
- bei unbeschränktem Integranden.

In diesen Fällen ist zusätzlich ein Grenzübergang auszuführen: Der betreffende Limes kann existieren, dann konvergiert das uneigentliche Integral und man kann ihm eine reelle Zahl zuordnen. Andernfalls existiert der entsprechende Grenzwert nicht und das uneigentliche Integral divergiert.

Übung

Rechnen Sie das Integral $\int_3^\infty \frac{1}{x}\,dx$ *aus!*

Lösung

Zunächst ist:

$$\int_3^b \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|\big|_{x=3}^b = \ln b - \ln 3.$$

Der Grenzwert führt jetzt aber auf Divergenz:

$$\begin{aligned}\int_3^\infty \frac{1}{x}\,dx &= \lim_{b\to\infty}\int_3^b \frac{1}{x}\,dx \\ &= \lim_{b\to\infty}(\ln b - \ln 3) = +\infty.\end{aligned}$$

Uneigentliche Integrale
1.Fall

Definition

Bei den uneigentlichen Integralen unterscheiden wir zwei Fälle:
Die Funktion $f(x)$ sei auf jedem Intervall $[a, u]$, $u \in I\!R$ integrierbar. Dann definiert man

$$\int_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{u \to \infty} \int_a^u f(x)\,dx,$$

wenn dieser Grenzwert existiert. Man sagt: Das uneigentliche Integral existiert oder konvergiert (andernfalls: Es existiert nicht oder divergiert).

Uneigentliche Integrale
2.Fall

Definition

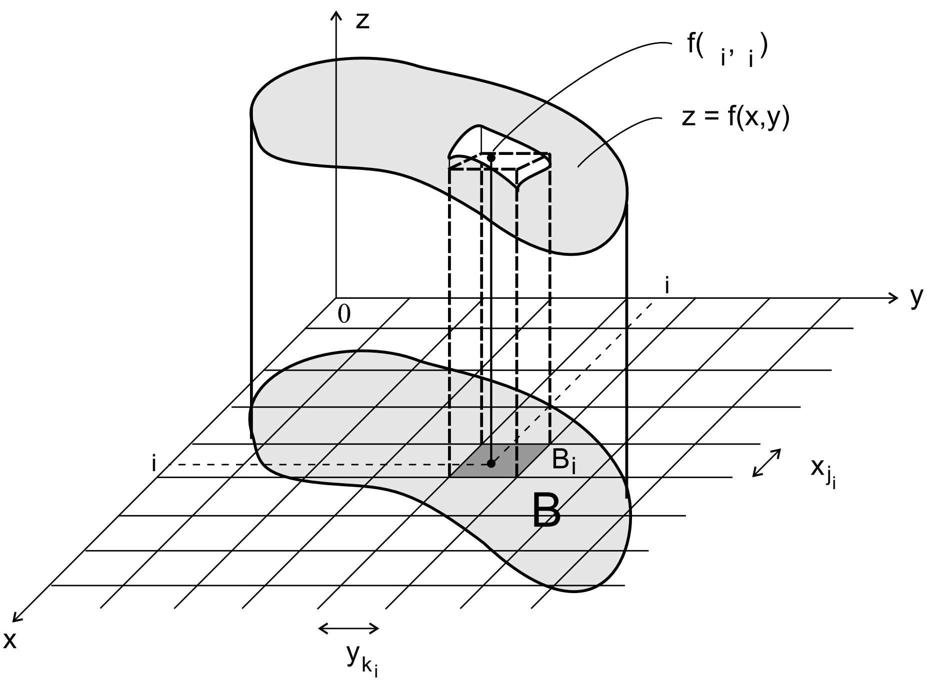
Bei den uneigentlichen Integralen unterscheiden wir zwei Fälle:
Die Funktion $f(x)$ sei auf jedem Intervall $[a, u]$ mit $a \leq u < b$ integrierbar und es gelte: $\lim_{x \to b-} f(x) = \pm\infty$. Dann definiert man

$$\int_a^b f(x)\, dx := \lim_{u \to b-} \int_a^u f(x)\, dx,$$

wenn dieser Grenzwert existiert. Wiederum sagt man: Das uneigentliche Integral existiert oder konvergiert (andernfalls: Es existiert nicht oder divergiert).

Doppelintegral als Volumen

Wir wollen im Folgenden den Begriff des Integrals $\int_a^b f(x)\,dx$ einer Funktion $f(x)$ über einem Intervall $[a,b]$ auf Funktionen in mehreren Variablen verallgemeinern. Dabei sollen — der Anschaulichkeit halber — Funktionen von zwei Veränderlichen $f(x,y)$ betrachtet werden. Gesucht ist hier das *Volumen* zwischen der Funktion und der x,y-Ebene über einem *Bereich* $\mathcal{B}$.



Bereichsintegral (Gebietsintegral)

Wir nennen gewisse einfach zu charakterisierende Mengen der Ebene „Bereiche“ und halten fest:

Definition

Unter dem Bereichsintegral (oder Gebietsintegral) der Funktion $f(x, y)$ über dem Bereich $\mathcal{B}$ (Konvergenz vorausgesetzt) versteht man

$$\iint_{\mathcal{B}} f(x, y)\, dx\, dy :=$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \Delta x_{j_i} \Delta y_{k_i}.$$

Rechenregeln für das Bereichsintegral

Für das Bereichsintegral gilt:

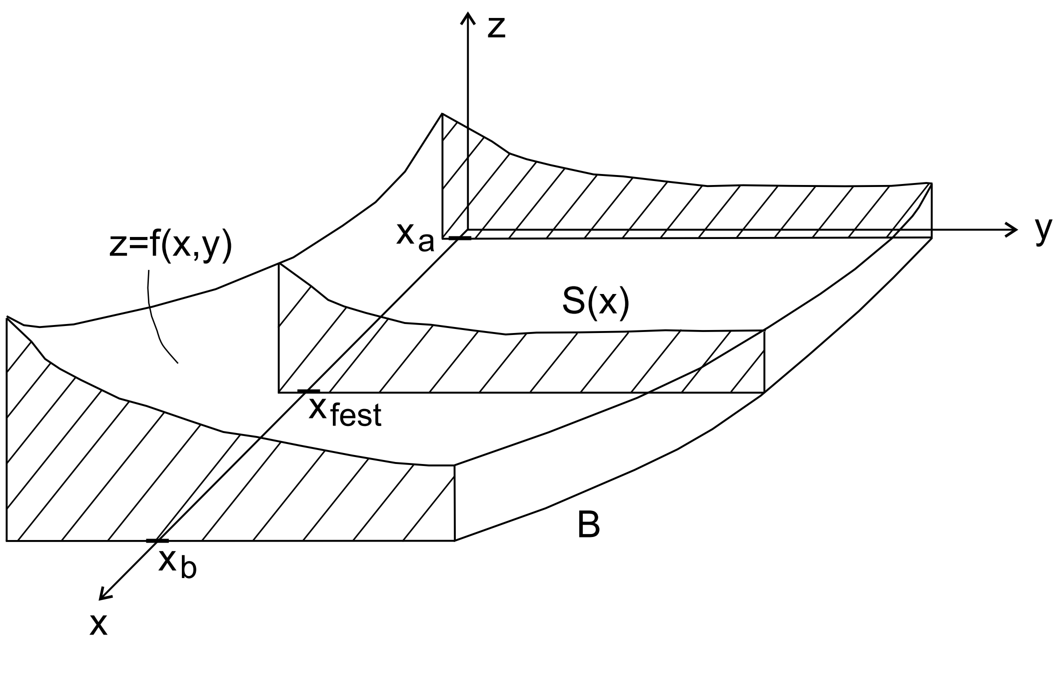
a) $\iint_{\mathcal{B}} \alpha \cdot f \, dx \, dy = \alpha \cdot \iint_{\mathcal{B}} f \, dx \, dy,$

b) $\iint_{\mathcal{B}} (f + g) \, dx \, dy$
$= \iint_{\mathcal{B}} f \, dx \, dy + \iint_{\mathcal{B}} g \, dx \, dy,$

c) $\iint_{\mathcal{B}} f \, dx \, dy$
$= \iint_{\mathcal{B}_1} f \, dx \, dy + \iint_{\mathcal{B}_2} f \, dx \, dy,$
falls $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$
und $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ **höchstens Randpunkte gemeinsam haben.**

Grundidee zur Berechnung von Mehrfachintegralen

Man berechnet das Gesamtvolumen als Summe hauchdünner Scheiben mit *bekannter Querschnittsfläche*, quasi als hätte man einen Holzklotz (das zu berechnende Volumen) in kleine zueinander parallele Scheibchen zerhackt. Die einzelnen Scheiben können dabei durchaus verschieden aussehen, je nachdem an welcher Stelle man sie herausgegriffen hat:



Grundidee zur Berechnung von Mehrfachintegralen

Das Bereichsintegral $\iint_{\mathcal{B}} f(x,y)\,dx\,dx$ kann als Summe, oder besser gleich als Integral kleiner Scheiben $S(x)$ geschrieben werden, wobei derartige Scheiben für $x \in [x_a, x_b]$ auftreten und je nach gewähltem x verschiedene Gestalt haben können:

$$\iint_{\mathcal{B}} f(x,y)\,dx\,dx = \int_{x_a}^{x_b} S(x)\,dx.$$

Die einzelnen Scheiben können wiederum als *Einfachintegrale* aufgefasst werden:

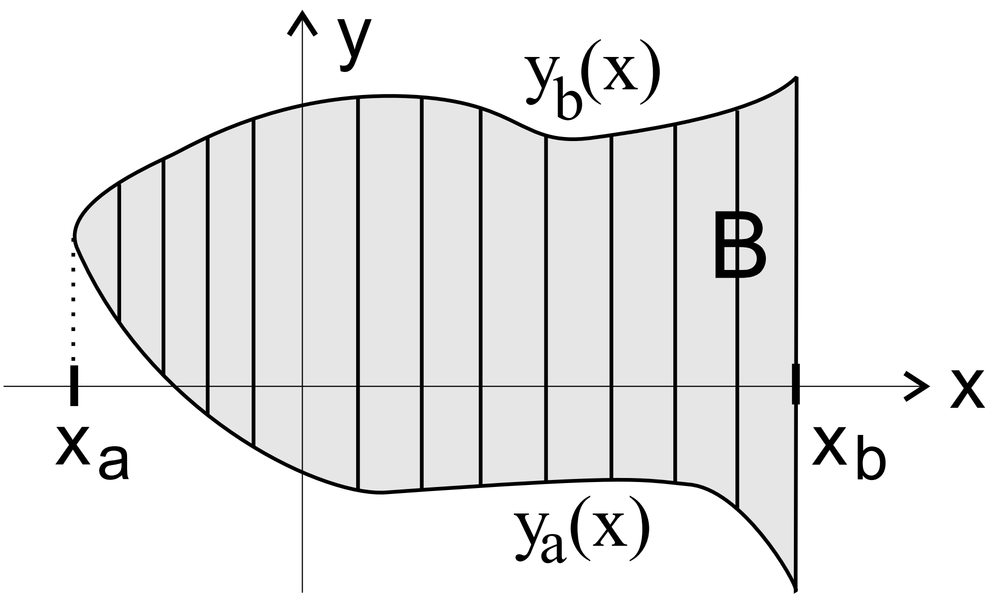
$$S(x) = \int_{y_a(x)}^{y_b(x)} f(x,y)\,dy.$$

Insgesamt wird dadurch das Doppelintegral $\iint_{\mathcal{B}} f(x,y)\,dx\,dx$ in *zwei ineinander verschachtelte Einzelintegrale* aufgespalten. Dabei ist das *innere Integral zuerst* zu berechnen.

Normalbereich (in x)

Ein Integrationsbereich $\mathcal{B}$ lässt sich als so genannter *Normalbereich* beschreiben durch:

$$\mathcal{B} = \{(x, y) \,|\, x_a \leq x \leq x_b,\; y_a(x) \leq y \leq y_b(x)\}\,.$$



Berechnung von Bereichsintegralen bei Normalbereich in x, inneres Integral in y

Bei einem Normalbereich in x

$$\boldsymbol{\mathcal{B} = \{(x,y) \,|\, x_a \leq x \leq x_b,}$$

$$\boldsymbol{y_a(x) \leq y \leq y_b(x)\}}$$

berechnen wir Bereichsintegrale in der Form

$$\boldsymbol{\iint_{\mathcal{B}} f(x,y)\,dx\,dy =}$$

$$\boldsymbol{\int_{x=x_a}^{x_b} \left(\int_{y=y_a(x)}^{y_b(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.}$$

Es lassen sich die Rollen von x und y bei entsprechend vorliegendem Bereich natürlich auch vertauschen (man kann Holzklötze nicht nur in x-Richtung, sondern auch in y-Richtung zerhacken, ohne dass sich das Volumen des Holzklotzes verändern würde).

Berechnung von Bereichsintegralen bei Normalbereich in y, inneres Integral in x

Bei einem Normalbereich in y

$$\mathcal{B} = \{(x,y) \,|\, y_a \leq y \leq y_b,$$

$$x_a(y) \leq x \leq x_b(y)\}$$

berechnen wir Bereichsintegrale in der Form

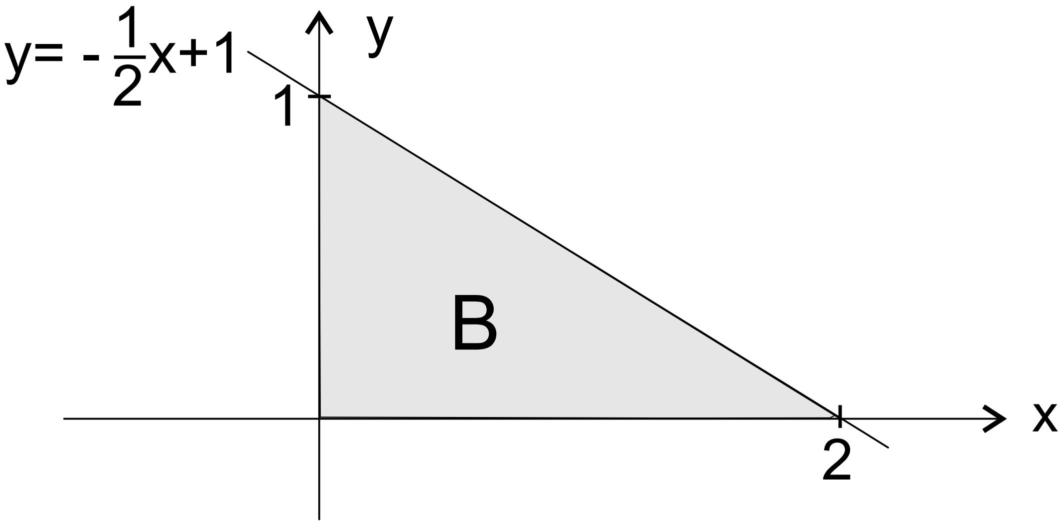
$$\iint_{\mathcal{B}} f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$\int_{y=y_a}^{y_b} \left(\int_{x=x_a(y)}^{x_b(y)} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Übung: Berechnung von Bereichsintegralen

Übung

Berechnen Sie für den durch die Kurven $x = 0$*,* $y = 0$ *und* $y = -1/2\,x + 1$ *berandeten Bereich* $\mathcal{B}$ *das Bereichsintegral* $\iint_{\mathcal{B}} x\,dx\,dy$*.*



Fragestellung

Besonders in Deutschland wird auf den Autobahnen mit recht hoher Geschwindigkeit gefahren. Ein großes Gefahrenpotenzial bilden dabei Kurven und Ausfahrten, da die Straßenführung an diesen Stellen meist einen Kreisbogen beinhaltet. Dieser Bogen hat, anders als eine Gerade, eine *Krümmung* $K \neq 0$, die dafür verantwortlich ist, dass ein Fahrzeug mit zu hoher Geschwindigkeit aus der Kurve fliegt. Das liegt wiederum daran, dass die am Fahrzeug angreifende Zentrifugalkraft F — wie aus der Kinetik bekannt — proportional zur *Krümmung* K ist, genauer $F = Kmv^2$ (m Masse des Autos und v seine Geschwindigkeit).

Wegbeschreibung

Bekannterweise beschreibt der Physiker einen Weg in der Ebene (hier: die Straßenführung) durch dessen Koordinaten:

$$x(s), y(s),$$

wobei $s \in \mathbb{R}$ ein Parameter ist.

Würde man beispielsweise $x(s) = s$ und $y(s) = s$ für $s \geq 0$ setzen, so gilt für alle s stets $y = x$. In diesem Fall ergäbe sich als Weg also die Winkelhalbierende des ersten Quadranten.

Klothoide

Wenn man nun eine Kurve ohne einen so genannten *Übergangsbogen* direkt aus der Geraden (mit Krümmung $K = 0$) einleiten würde, hätte das zur Folge, dass beim Durchfahren der Kurve ganz plötzlich die Krümmung von 0 auf einen von Null verschiedenen Wert springen würde (Unstetigkeit!). Aus Sicherheitsgründen benutzt man deswegen im Straßenbau als Übergangsbogen die so genannte *Klothoide*. Deren „Weg“ wird durch die Integrale

$$x(s) = \int_0^s \cos\left(\pi \frac{u^2}{2}\right) du,$$

$$y(s) = \int_0^s \sin\left(\pi \frac{u^2}{2}\right) du$$

beschrieben.

Klothoide

Bei Funktionen in einer Veränderlichen wird die zweite Ableitung als ein Maß für das Krümmungsverhalten gesehen. Auch die Krümmung $K(s)$ eines durch $x(s)$, $y(s)$ beschriebenen Weges kann man messen. In fast jeder Formelsammlung findet man hier die Formel (1. und 2. Ableitung werden üblicherweise mit Punkten bezeichnet, z.B. $\dot{x}(s), \ddot{x}(s)$):

$$K(s) = \frac{\dot{x}(s)\ddot{y}(s) - \ddot{x}(s)\dot{y}(s)}{(\dot{x}^2(s) + \dot{y}^2(s))^{3/2}}.$$

Krümmung der Klothoide

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung besagt nun, dass gilt:

$$\dot{x}(s) = \cos\left(\pi \frac{s^2}{2}\right) \quad \text{und} \quad \dot{y}(s) = \sin\left(\pi \frac{s^2}{2}\right).$$

Damit ergibt sich für den Nenner $(\dot{x}^2(s) + \dot{y}^2(s))^{3/2}$

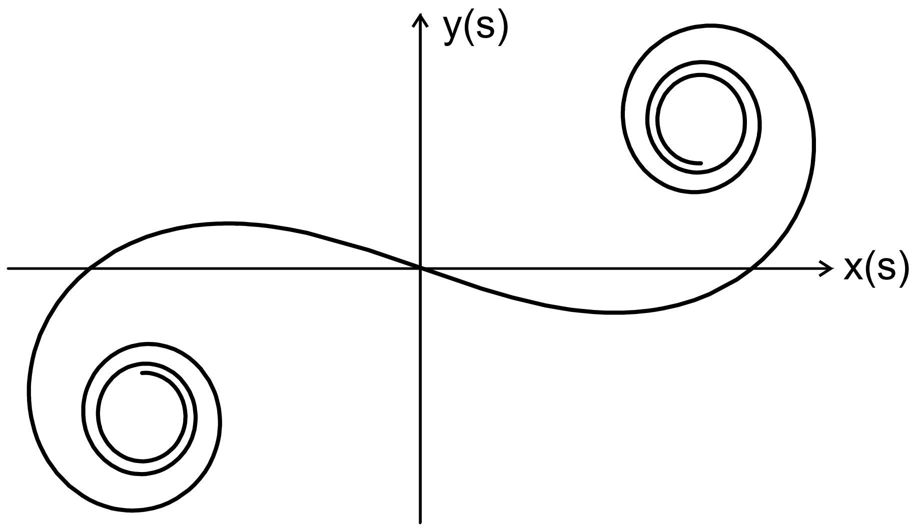
$$\left[\cos^2\left(\pi \frac{s^2}{2}\right) + \sin^2\left(\pi \frac{s^2}{2}\right)\right]^{3/2} = 1.$$

Wegen $\ddot{x}(s) = -\pi s \sin\left(\pi \frac{s^2}{2}\right)$ und
$\ddot{y}(s) = \pi s \cos\left(\pi \frac{s^2}{2}\right)$ folgt schließlich

$$K(s) = \pi s \left[\cos^2\left(\pi \frac{s^2}{2}\right) + \sin^2\left(\pi \frac{s^2}{2}\right)\right] = \pi s.$$

Krümmung der Klothoide

Die Krümmung der Klothoide beginnt also bei $K = 0$ (für $s = 0$) und nimmt absolut gesehen stetig zu. Die Kurve hat in jedem beliebigen Punkt eine andere Krümmung.



Trassierung von Straßen mittels Klothoiden

Die Trassierung einer Straße mit der Elementfolge Klothoide — Kreisbogen — Klothoide ist damit recht einfach durchführbar. Man nimmt einen Klothoidenteil (beginnend bei $s = 0$) solange, bis er die (konstante) Krümmung des Kreisbogens erreicht hat. Ans Ende des Kreisbogen setzt man dann das entsprechend „umgekehrte“ Klothoidenteil. Dadurch steigt die Zentrifugalkraft von Null linear bis auf den Kreisbahnwert an, bliebt dann konstant und nimmt nach Verlassen der Kreisbahn wieder linear auf Null ab. Auf diese Weise trägt hier die Mathematik ihren Teil zum stressfreien Beherrschen von Fahrzeugen vor und hinter Kurven auch bei lebhaftem Verkehr bei.

Fresnelsche Integrale

Die beiden Integrale nennt man übrigens *Fresnelsche Integrale*. Sie sind nicht analytisch lösbar, die Straßenbauingenieure müssen also mit Tafelwerken (numerische Integration!) arbeiten. Exakt berechenbar — wenn auch nicht mit unseren Mitteln — ist lediglich der Wert der uneigentlichen Integrale:

$$\int_0^\infty \cos\left(\pi\frac{u^2}{2}\right)\,du = \int_0^\infty \sin\left(\pi\frac{u^2}{2}\right)\,du = \frac{1}{2}.$$

Man erkennt, dass der Faktor π in den Integralen nicht bloße Willkür ist, sondern aus Normierungsgründen gewählt wurde.