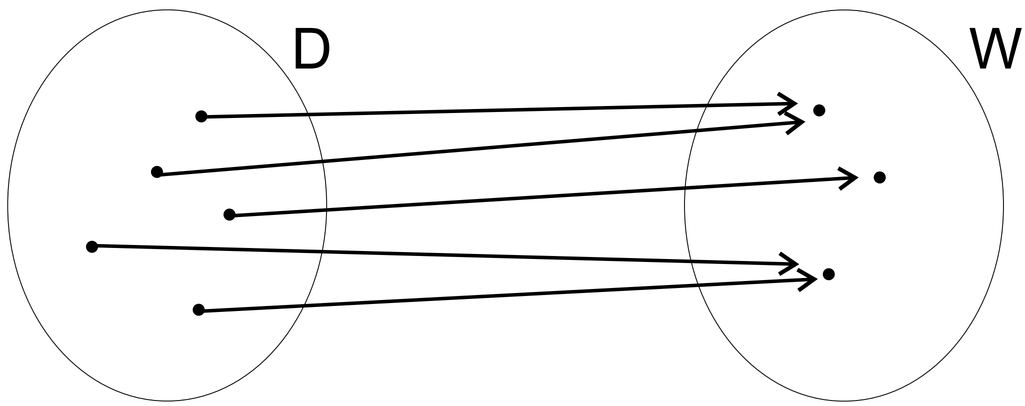
Kapitel 3

Funktionen

- Grundbegriffe
- Grenzwerte bei Funktionen
- Stetigkeit
- Die elementaren Funktionen
- Anwendungen

Funktionen und ihre Darstellung

Unter einer *Abbildung* von einer Menge D in eine Menge W versteht man eine Vorschrift, die jedem Element x von D genau ein Element y von W zuordnet.



Statt Abbildung sagt man auch *Funktion*, besonders dann, wenn D und W Teilmengen von $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, sind. Der Funktionsbegriff spielt eine wichtige Rolle bei der quantitativen Beschreibung der Umwelt.

Reelle Funktion

Definition

Eine reelle Funktion f ist eine Vorschrift, die jedem Element $x \in D \subseteq \mathbb{R}$ genau ein Element $y \in W \subseteq \mathbb{R}$ zuordnet. Man schreibt dafür

$$x \mapsto y = f(x) \quad \text{oder} \quad f : D \to W.$$

D heißt Definitionsbereich, W nennt man Wertebereich ($\hat{=}$ Menge der Funktionswerte $f(x)$, wenn x den Definitionsbereich D durchläuft). x wird als Argument, unabhängige Variable oder Veränderliche bezeichnet, y als abhängige Variable oder Veränderliche. $f(x_0)$ heißt Funktionswert an der Stelle x_0 oder Bild von x_0.

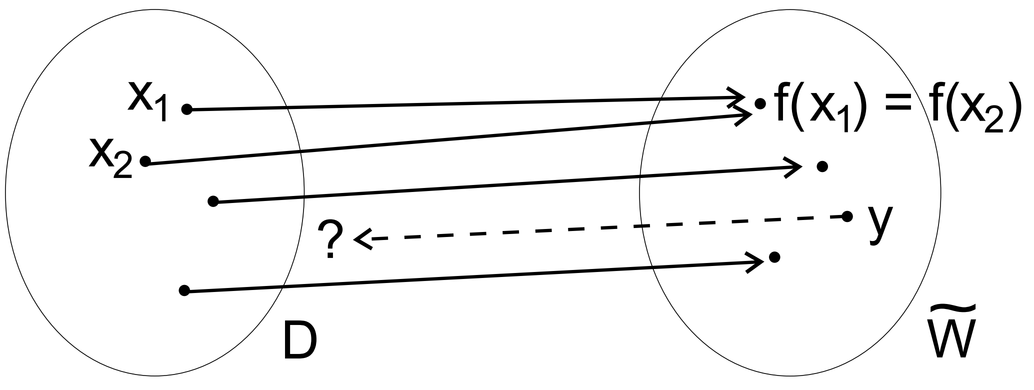
Injektive und surjektive Funktion

- Eine Funktion $f : D \to \tilde{W}$ heißt *injektiv*, wenn keine zwei verschiedenen Argumente x_1 und x_2 gleiche Funktionswerte haben. Aus $f(x_1) = f(x_2)$ folgt also stets $x_1 = x_2$. Dies ist genau dann der Fall, wenn jede Parallele zur x-Achse den Graph G_f in *höchstens* einem Punkt schneidet.

- Eine Funktion $f : D \to \tilde{W}$ heißt *surjektiv*, wenn jedes Element $y \in \tilde{W}$ auch wenigstens einmal als Bild von f auftritt. Man schreibt dann auch $\tilde{W} = W = f(D)$.

Bijektive Funktion

- Eine Funktion nennt man *bijektiv*, wenn sie sowohl *injektiv als auch surjektiv* ist. Für eine bijektive Funktion ist also die Gleichung $f(x) = y$ mit $y \in \tilde{W}$ immer eindeutig lösbar.



Die Umkehrfunktion

Definition

Eine Funktion $f : D \to W$ heißt umkehrbar, wenn zu jedem Funktionswert $y \in W$ genau ein Argumentwert $x \in D$ gehört. Die Funktion

$$f^{-1} : W \to D,$$

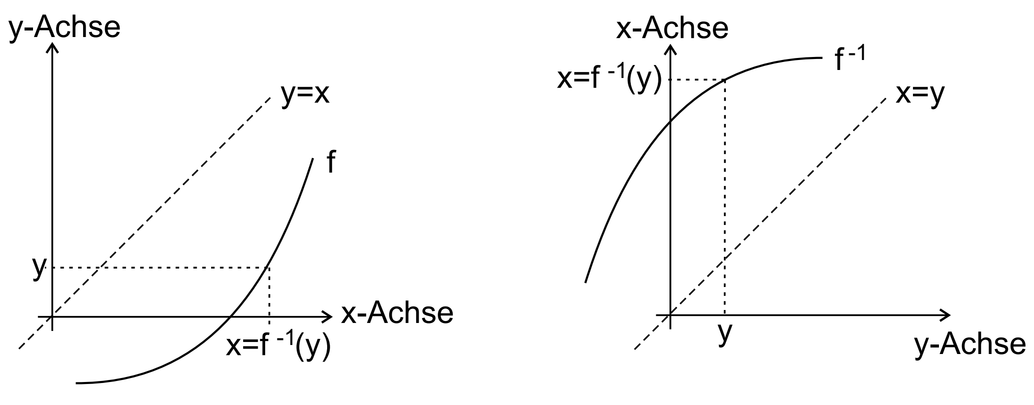
welche den Elementen von W eindeutig die Elemente von D zuordnet, heißt Umkehrfunktion der Funktion f oder die zu f inverse Funktion.

Bestimmung der Umkehrfunktion

Zur praktischen Bestimmung einer Umkehrfunktion empfiehlt sich daher folgendes Vorgehen:

- Löse die Gleichung $y = f(x)$ nach x auf. Dies ergibt $x = f^{-1}(y)$.

- Vertausche x und y. Dies liefert $y = f^{-1}(x)$.



Monotonie

Definition

Eine Funktion $f(x) : D \to W$ heißt in einem Intervall $I \subseteq D$

- **monoton wachsend bzw. steigend, falls für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ stets $f(x_1) \leq f(x_2)$ gilt;**
- **monoton fallend, falls für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ stets $f(x_1) \geq f(x_2)$ folgt.**

Gilt in den Ungleichungen strikte Ungleichheit, so spricht man von strenger Monotonie.

Periodizität

Definition

Ist f eine auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion und gilt für eine Konstante $p > 0$

$$f(x+p) = f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, so heißt f periodisch mit der Periode p. Auch $2p, 3p, \ldots$ sind dann Perioden.

Beispiel

Die Funktionen $\sin x$ *und* $\cos x$ *haben die (kleinste) Periode* $p = 2\pi$ *(z.B.* $\sin(x + 2\pi) = \sin x$*), während* $\tan x$ *und* $\cot x$ *die (kleinste) Periode* $p = \pi$ *(z.B.* $\tan(x + \pi) = \tan x$*) aufweisen.*

Gerade und ungerade Funktion

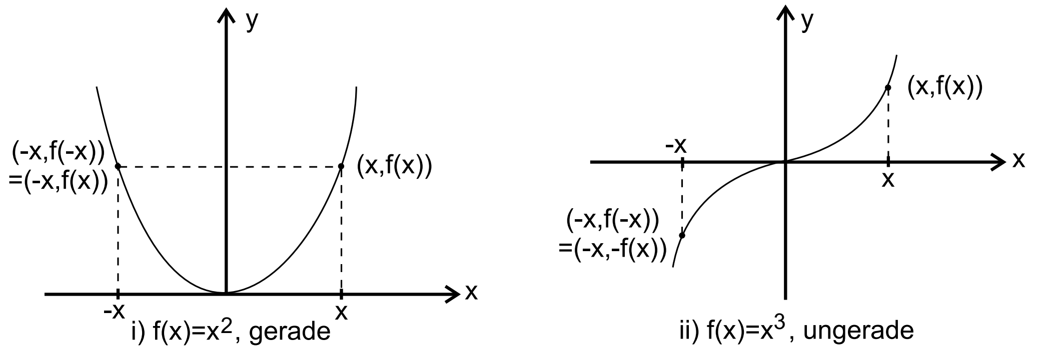
Definition

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt

- **gerade, falls $f(-x) = f(x)$,**
- **ungerade, falls $f(-x) = -f(x)$**

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.
Der Graph einer geraden Funktion ist symmetrisch zur y-Achse.
Der Graph einer ungeraden Funktion punktsymmetrisch zum Ursprung.

Gerade und ungerade Funktion



Beispiel

Gerade Funktionen: $f(x) = |x|$, $f(x) = x^2$, *und* $f(x) = \cos(x)$.

Ungerade Funktionen: $f(x) = sgn(x)$, $f(x) = x^3$, *und* $f(x) = \sin(x)$.

Nullstelle

Definition

Eine Stelle x_0 im Definitionsbereich einer Funktion $f(x)$ heißt Nullstelle, wenn $f(x_0) = 0$ gilt.

Beispiel
Der Graph der Parabel $f(x) = x^2$ hat in $x_0 = 0$ einen Berührpunkt *mit der x-Achse, der Graph der kubischen Parabel $f(x) = x^3$ schneidet in $x_0 = 0$ die x-Achse.*

In beiden Fällen liegt in $x_0 = 0$ eine Nullstelle vor.

Komposition, Verkettung, Hintereinanderschaltung

Definition

Mit Hilfe der beiden Funktionen $f : D_f \to W_f$ und $g : D_g \to W_g$ kann eine neue Funktion $h : D_f \to W_g$ definiert werden, wenn der Wertebereich von f im Definitionsbereich von g enthalten ist ($W_f \subseteq D_g$). Die so definierte Funktion heißt Hintereinanderschaltung, Verkettung oder Komposition von f und g. Man schreibt $h = g \circ f$ bzw. $h(x) = g(f(x))$.

Man kann auch mehr als zwei Funktionen verketten: $h \circ g \circ f$ bedeutet z.B. $h[g(f(x))]$.

Geometrische Operationen am Funktionsgraphen

Ersetzt man $y = f(x)$ durch	so wird der zugehörige Graph
1. $y = f(x - x_0)$	um x_0 in x-Richtung verschoben, falls $x_0 > 0$: nach rechts falls $x_0 < 0$: nach links
2. $y = f(x) + y_0$	um y_0 in y-Richtung verschoben, falls $y_0 > 0$: nach oben falls $y_0 < 0$: nach unten
3. $y = -f(x)$ 4. $y = f(-x)$ 5. $x = f(y)$	an der x-Achse gespiegelt an der y-Achse gespiegelt an Winkelhalb. $y = x$ gespiegelt
6. $y = af(x),\ a > 0$ 7. $y = f(bx),\ b > 0$	in y-Richtung mit a gestreckt in x-Richtung mit $\frac{1}{b}$ gestreckt

Grenzwert einer Funktion I

Definition

Die Funktion $f : D \longrightarrow W$ hat in einem Punkt x_0 (der nicht in D liegen muss!) genau dann den Grenzwert a, wenn für alle Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_+}$ mit $x_n \in D$, $x_n \neq x_0$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} f(x_n) = a.$$

In diesem Falle sagt man, dass $f(x)$ für $x \longrightarrow x_0$ gegen a konvergiert und schreibt:

$$\lim_{x\longrightarrow x_0} f(x) = a.$$

Linksseitiger Grenzwert

Definition

Sei $f(x)$ definiert auf dem Intervall $(x_0 - b, x_0)$ mit $b > 0$. Man sagt dann, dass $f(x)$ in x_0 den linksseitigen Grenzwert a_L hat, wenn für alle Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_+}$ mit $x_n < x_0$ und $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$ gilt:

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = a_L.$$

Mögliche Schreibweisen sind:

$$\lim_{x \to x_0 -} f(x) = a_L$$

oder

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = a_L.$$

Rechtsseitiger Grenzwert

Definition

Sei $f(x)$ definiert auf dem Intervall (x_0, x_0+b) mit $b > 0$. Man sagt dann, dass $f(x)$ in x_0 den rechtsseitigen Grenzwert a_R hat, wenn für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$ mit $x_n > x_0$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a_R.$$

Mögliche Schreibweisen sind:

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = a_R$$

oder

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = a_R.$$

Beispiel

Für die Funktion $f(x) = \text{sgn}(x)$ gilt:

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = -1,$$

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = 1.$$

Es ist $a_L \neq a_R$ und damit $f(x)$ in $x = 0$ nicht konvergent.

Grenzwerte für $x \to \infty$ bzw. $x \to -\infty$

Bei $x \to \infty$ gibt es natürlich höchstens einen linksseitigen Grenzwert a_L, bei $x \to -\infty$ höchstens einen rechtsseitigen Grenzwert a_R. In beiden Fällen spricht man von einem Grenzwert schlechthin und schreibt

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = a_L \qquad \text{oder} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = a_R.$$

Beispiel
Für die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ gilt

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0,$$

da mit $x_n \to \infty$ gilt:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{x_n} = 0.$$

Rechenregeln für Funktionsgrenzwerte

Wenn $\lim f(x)$ und $\lim g(x)$ (für $x \to x_0$ oder auch für $x \to \pm\infty$) existieren, dann gilt:

a) $\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$,

b) $\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$,
Spezialfall ($c =$ const):
$\lim[c \cdot f(x)] = c \cdot \lim f(x)$,

c) $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$, **falls** $g(x) \neq 0$,

d) „Sandwichtheorem“:
Aus $g(x) \leq h(x) \leq f(x)$ **und** $\lim g(x) = \lim f(x) = a$, **folgt** $\lim h(x) = a$.
Spezialfall ($g(x) = -f(x)$, $a = 0$): Gilt $|h(x)| \leq f(x)$ **und** $\lim f(x) = 0$, **so folgt** $\lim h(x) = 0$.

Beispiel

Wir betrachten die Funktion $f(x) = \frac{x^2+\sin x}{1+x^2}$ *für* $x \to \infty$*. Ausklammern von* x^2 *in Zähler und Nenner mit anschließendem Kürzen liefert*

$$f(x) = \frac{1 + \frac{\sin x}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + 1}.$$

Nun ist wegen Regel b)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \cdot 0 = 0.$$

Daraus folgt aufgrund von $\mid \frac{\sin x}{x^2} \mid \leq \frac{1}{x^2}$ *nach dem „Sandwichtheorem“*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x^2} = 0.$$

Unter Beachtung von Regel a) und c) ergibt sich somit

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{1+0}{0+1} = 1.$$

Stetige Funktion

Definition

Eine Funktion $f : D \to W$ heißt in $x_0 \in D$

- **stetig, falls**

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

d.h. der Grenzwert muss existieren und gleich dem Funktionswert in x_0 sein,

- **linksseitig stetig, falls**

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0),$$

- **rechtsseitig stetig, falls**

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0).$$

Die Funktion heißt stetig im Intervall I, wenn $f(x)$ für jedes $x \in I$ stetig ist.

Wichtige Merkregel:

$$\boldsymbol{f} \textbf{ stetig in } \boldsymbol{x_0} \Longleftrightarrow$$

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \boldsymbol{f(x) = f(x_0) = f(\lim_{x \longrightarrow x_0} x).}$$

Da Wurzel- und Exponentialfunktion stetig sind, bedeutet dies beispielsweise, dass Umformungen der Form

$$\lim \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim f(x)}$$

bzw.

$$\lim \mathrm{e}^{f(x)} = \mathrm{e}^{\lim f(x)}$$

möglich sind.

Kombination stetiger Funktionen

Seien $f(x)$ und $g(x)$ stetige Funktionen in x_0. Dann sind auch folgende Funktionen in x_0 stetig:

$$f(x) \pm g(x), \; f(x) \cdot g(x),$$

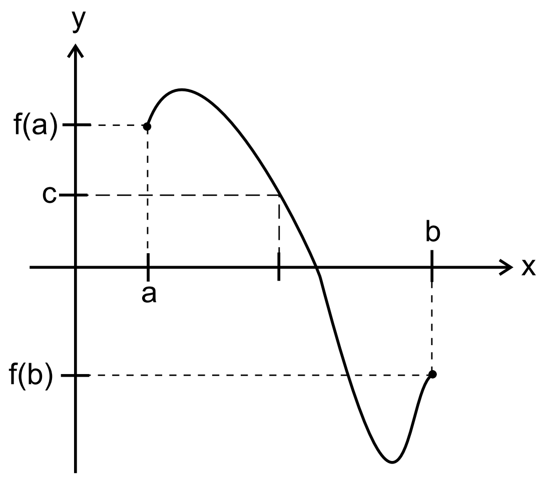
$$\frac{f(x)}{g(x)}, \text{ falls } g(x_0) \neq 0.$$

Komposition stetiger Funktionen

Ist $f(x)$ stetig in x_0 und $g(u)$ stetig in $u_0 = f(x_0)$, so ist die zusammengesetzte Funktion $y = g(f(x))$ stetig in x_0.

Zwischenwertsatz

Seien $y = f(x)$ stetig auf dem abgeschlossen Intervall $I = [a, b]$ und c eine Zahl zwischen $f(a)$ und $f(b)$. Dann existiert mindestens ein $\xi \in (a, b)$ mit $f(\xi) = c$.



Spezialfall: *Nullstellensatz von Bolzano*:
Haben $f(a)$ und $f(b)$ unterschiedliches Vorzeichen, dann hat $f(x)$ in $[a, b]$ mindestens eine Nullstelle. Dies ist Grundlage für viele numerische Verfahren zur Bestimmung von Funktions-Nullstellen.

Polynome

Definition

Für $n \in \mathbb{N}$ und $a_n (\neq 0), a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ heißt die Funktion $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto p(x)$ mit

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Polynom n-ten Grades mit den Koeffizienten a_k, $k = 0, 1, \ldots, n$.

Nullstellen, Linearfaktoren

Definition

Die Zahl x_1 heißt Nullstelle des Polynoms $p(x)$, wenn gilt:

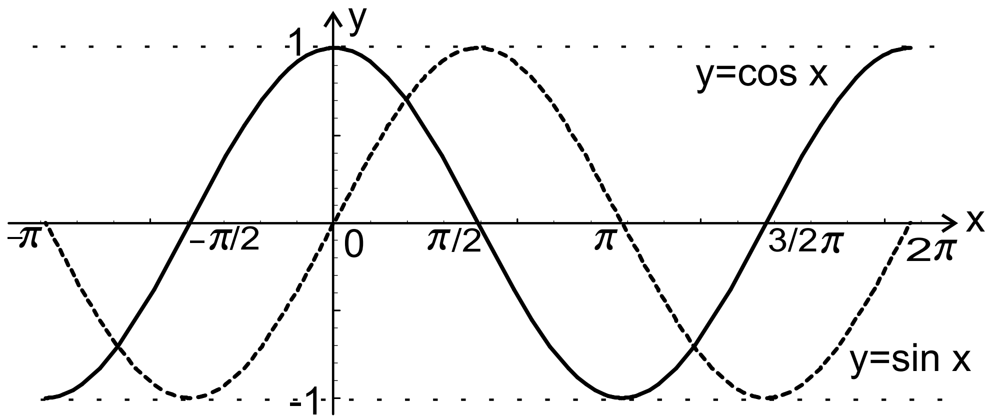
$$p(x_1) = 0.$$

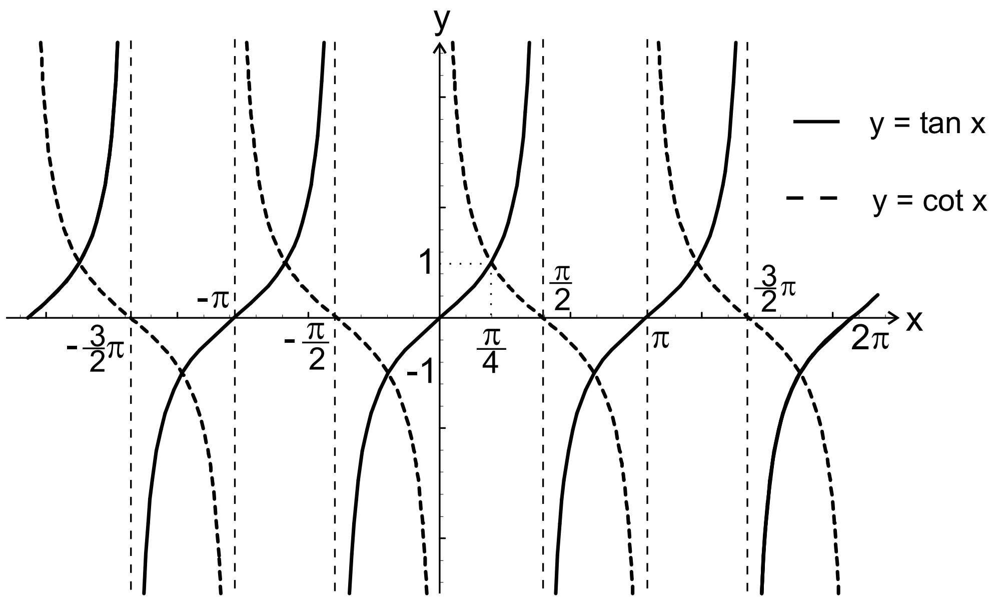
Ist x_1 eine Nullstelle des Polynoms $p(x)$ vom Grade $n > 0$, so kann man den Linearfaktor $(x - x_1)$ ohne Rest abdividieren:

$$p(x) = (x - x_1) \cdot p_{n-1}(x)$$

Dabei ist $p_{n-1}(x)$ ein Polynom $(n-1)$-ten Grades.

Funktionsgraphen der trigonometrischen Funktionen





Wichtige Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen

- Alle Winkelfunktionen sind *periodisch*, d.h. der Kurvenverlauf wiederholt sich: Sinus und Cosinus sind 2π-periodisch, Tangens und Cotangens sind π-periodisch.

- Alle Winkelfunktionen lassen sich ineinander umrechnen. Der Cosinus ist z.B. ein „verschobener" Sinus:
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x),$$
Tangens und Cotangens sind über Sinus und Cosinus definiert:
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

- Für den Zusammenhang zwischen Sinus und Cosinus ist auch der Satz von Pythagoras wichtig:
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Wichtige Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen

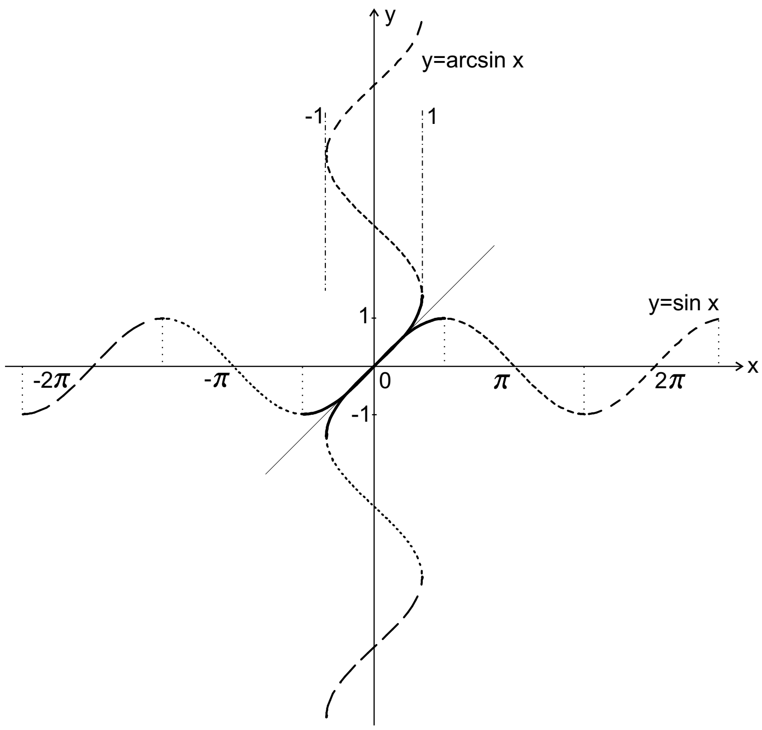
- Bei der praktischen Anwendung von trigonometrischen Funktionen muss man oft die so genannten *Additionstheoreme* (vgl. Formelsammlung) verwenden, etwa:

$$\begin{aligned} \sin(x_1 \pm x_2) &= \sin x_1 \cdot \cos x_2 \\ &\quad \pm \cos x_1 \cdot \sin x_2 \\ \cos(x_1 \pm x_2) &= \cos x_1 \cdot \cos x_2 \\ &\quad \mp \sin x_1 \cdot \sin x_2 . \end{aligned}$$

- Die „Techniker“ benötigen häufig eine Tabelle (mit einer „Eselsbrücke“ zum Merken spezieller Sinus- und Cosinuswerte):

Gradmaß	0°	30°	45°	60°	90°
Bogenmaß	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Sinus	0	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$
Cosinus	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{0} = 0$

Umkehrung der trigonometrischen Funktionen



Definition

Die Umkehrfunktion des Sinus auf dem Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ heißt Arcussinus ($\arcsin$). Es gilt:

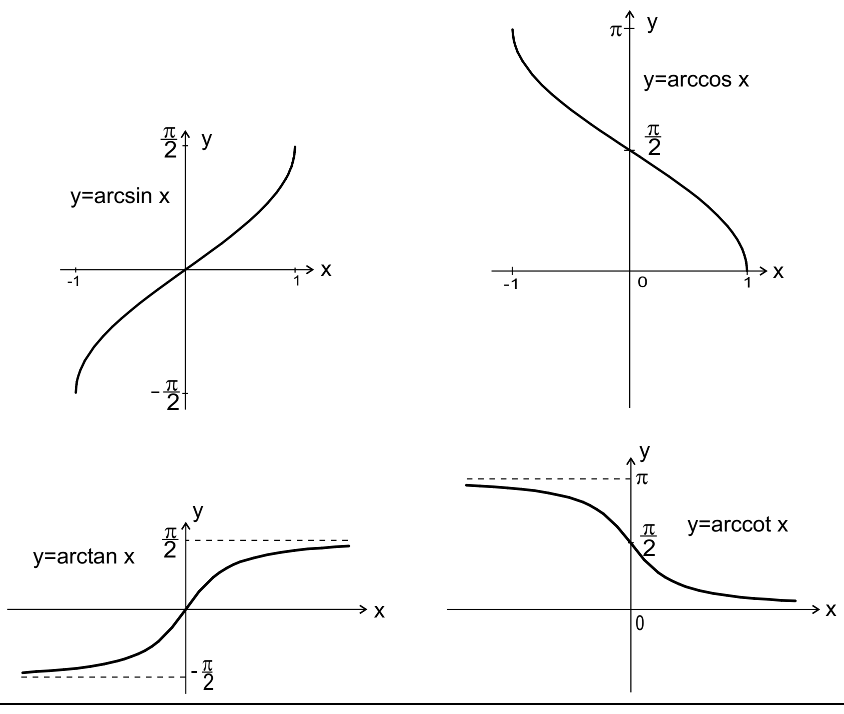
$$\arcsin x : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Umkehrung der trigonometrischen Funktionen

Definition

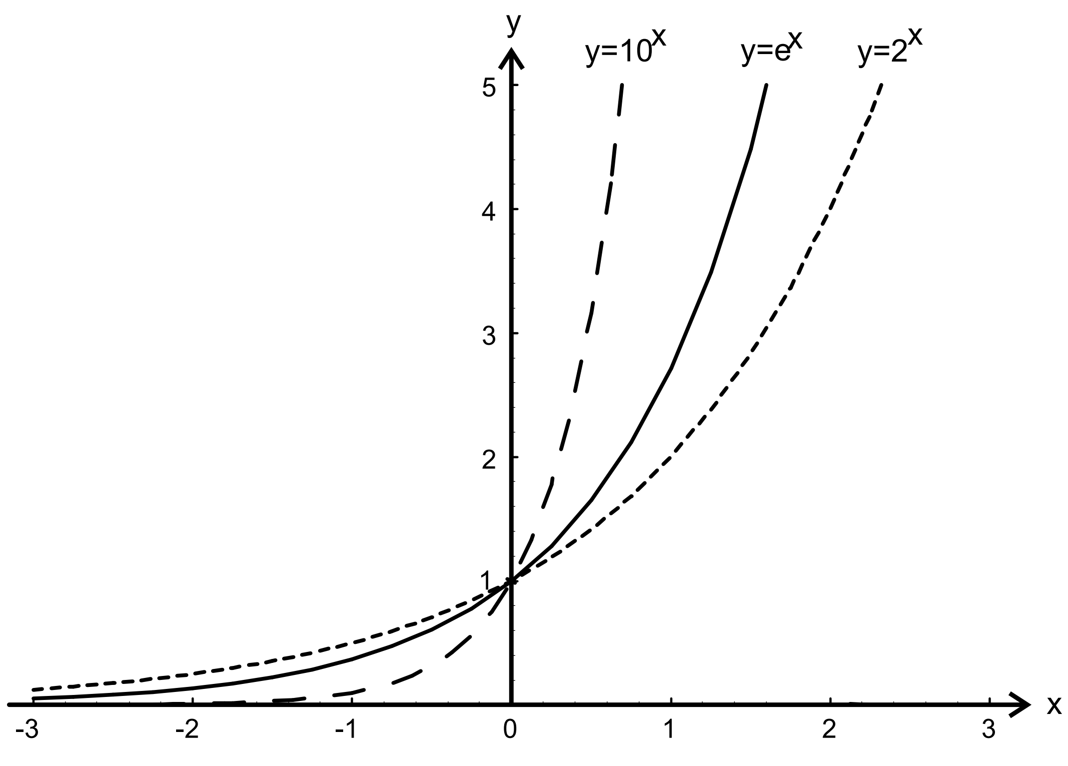
Entsprechende Umkehrfunktionen (genannt Arcusfunktionen) existieren auch für die anderen trigonometrischen Funktionen Cosinus, Tangens und Cotangens mit

$$\begin{array}{llll} \arccos x & : & [-1,1] & \longrightarrow & [0,\pi], \\ \arctan x & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}), \\ \text{arccot}\, x & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & (0,\pi). \end{array}$$



Die Potenzfunktionen

Man kann nun $f(x) = 2^x$ auch ganz allgemein für reelle Exponenten definieren und erhält eine so genannte *Potenzfunktion*. Als Basis könnte man natürlich auch andere Werte als 2 wählen, etwa 10 oder die in der Mathematik so beliebte *Euler'sche Zahl* $\mathrm{e} \approx 2.7182818$.
Die zugehörigen Potenzfunktionen ähneln einander sehr:



Die Exponentialfunktion $f(x) = e^x$

Sie dient in den Anwendungen meist zur Beschreibung von Wachstums- und Zerfallsprozessen; Die Eulersche Zahl e haben wir schon als Grenzwert einer Folge eingeführt:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

analog gilt

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

Allerdings wird die Exponentialfunktion meist als *unendliche Reihe* eingeführt:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots .$$

Funktionalgleichung der e–Funktion

Für die Exponentialfkt. $e^x : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ gilt (für $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$):

$$e^{x_1+x_2} = e^{x_1} \cdot e^{x_2}.$$

In Übereinstimmung mit den bekannten Rechenregeln für Potenzen gelten dann auch die weiteren Rechengesetze:

Es gilt:

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}, \quad (e^x)^y = e^{x \cdot y},$$

$$e^0 = 1, \quad e^1 = e.$$

Grenzverhalten der e–Funktion

Es ist:

$$\lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0, \qquad \lim_{x \to \infty} \mathrm{e}^x = \infty.$$

Bezüglich des Wachstumsverhaltens der Exponentialfunktion lässt sich weiterhin bemerken, dass die Exponentialfunktion sehr rasch ansteigt, und zwar (auf lange Sicht) schneller als jede noch so große Potenz von x, in Formelzeichen

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = \infty$$

für beliebiges n. In der Informatik spricht man daher auch von *exponentiellem Wachstum* im Gegensatz zum langsameren *polynomialen Wachstum*.

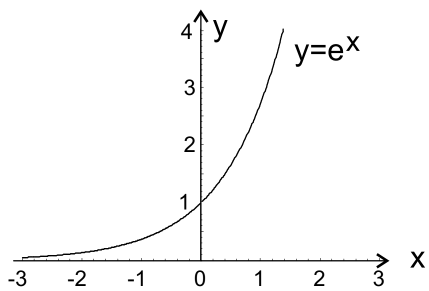
(Natürlicher) Logarithmus

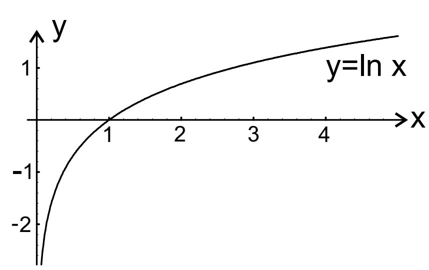
Da die Exponentialfunktion streng monoton wachsend ist, gehören zu verschiedenen Argumenten x_1 und x_2 auch verschiedene Funktionswerte e^{x_1} und e^{x_2}. Man kann also die Gleichung $\mathrm{e}^x = y$ für jedes $y > 0$ nach x auflösen.

Definition

Die Funktion $\ln x : (0, \infty) \to I\!R$, genannt (natürlicher) Logarithmus, ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion.

Der Graph von $\ln x$ ergibt sich entsprechend durch Spiegelung der Exponentialfunktion an der Winkelhalbierenden.





Die Funktionalgleichung für den Logarithmus

Für den (natürlichen) Logarithmus gilt:

$$\ln(x_1 \cdot x_2) = \ln x_1 + \ln x_2$$

für $x_1, x_2 > 0$.

Dies folgt unmittelbar aus der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion und der Eigenschaft, dass Exponentialfunktion und Logarithmus Umkehrfunktionen sind:

$$\mathrm{e}^{\ln x_1 + \ln x_2} = \mathrm{e}^{\ln x_1} \cdot \mathrm{e}^{\ln x_2} = x_1 \cdot x_2 = \mathrm{e}^{\ln(x_1 \cdot x_2)}.$$

Exponentenvergleich links und rechts liefert das Ergebnis.

Weitere wichtige Rechenregeln für Logarithmen

Es gilt für $x_1, x_2 > 0$:

$$\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \ln x_1 - \ln x_2,$$

$$\ln\left(x_1^{x_2}\right) = x_2 \cdot \ln x_1.$$

Allgemeine Exponentialfunktion

Definition

Als allgemeine Exponentialfunktion wird die Funktion

$$\boldsymbol{a^x := \mathrm{e}^{x \cdot \ln a} : \mathbb{R} \to (0, \infty)}$$

mit $a > 0$ bezeichnet. Auch hier gilt für x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$ die Funktionalgleichung

$$\boldsymbol{a^{x_1 + x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2}.}$$

Auch die anderen Eigenschaften übertragen sich von der Exponentialfunktion auf die allgemeine Exponentialfunktion: So ist sie stetig, es gilt $a^0 = 1$. Die allgemeine Exponentialfunktion ist auch monoton — und zwar streng monoton wachsend für $a > 1$ und streng monoton fallend für $0 < a < 1$.

a–Logarithmus als Umkehrfunktion von $y = a^x$

Definition

Die Funktion

$$\log_a x : (0, \infty) \to \mathbb{R}$$

für $a > 0$, $a \neq 1$, genannt a–Logarithmus, ist die Umkehrfunktion der allgemeinen Exponentialfunktion. Auch für den Logarithmus gilt für x_1, $x_2 > 0$ die Funktionalgleichung

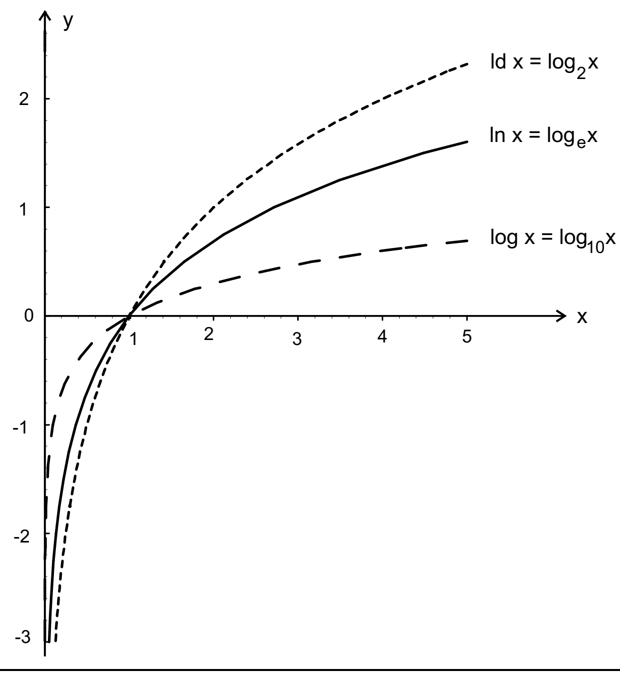
$$\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2.$$

a–Logarithmus und natürlicher Logarithmus

Für $a > 0$ und $x > 0$ gilt:

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Neben dem (natürlichen) Logarithmus $\ln x = \log_e x$ (also dem Logarithmus zur Basis e) wird auch der duale oder binäre Logarithmus $\operatorname{ld} x = \log_2 x$ (zur Basis 2) und der dekadische bzw. Brigg'sche Logarithmus $\log x = \log_{10} x$ (zur Basis 10) häufig verwendet.



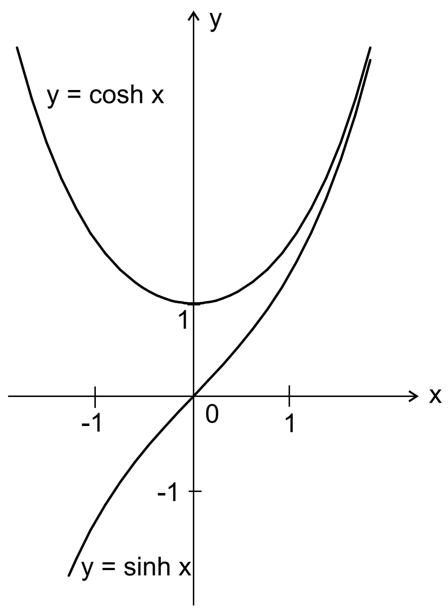
Hyperbelfunktionen

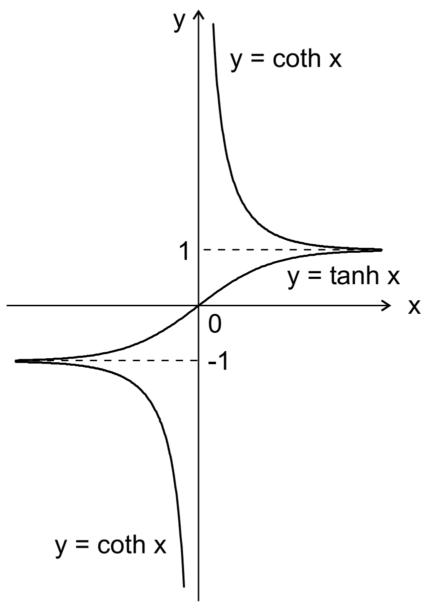
Definition

Die Hyperbelfunktionen Sinus Hyperbolicus, Cosinus Hyperbolicus, Tangens Hyperbolicus und Cotangens Hyperbolicus sind wie folgt definiert:

$$
\begin{aligned}
\sinh x &= \tfrac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right) &&: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\\
\cosh x &= \tfrac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right) &&: \mathbb{R} \to [1,\infty),\\
\tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x} &&: \mathbb{R} \to (-1,1),\\
\coth x &= \frac{\cosh x}{\sinh x} &&: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to (-\infty,-1)\cup(1,\infty).
\end{aligned}
$$

Hyperbelfunktionen





Interessant an den Hyperbelfunktionen ist, dass sie sich in mancher Hinsicht analog zu den trigonometrischen Funktionen verhalten. So gelten etwa die Gleichungen:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\sinh(x_1 + x_2) = \sinh x_1 \cosh x_2 + \cosh x_1 \sinh x_2.$$

Funktionsauswertungen mittels Taschenrechner

Hauptfehlerquelle bei Auswertung der trigonometrischen Funktionen:

Benutzer hat z.B. Gradmaß eingeschaltet, gibt die entsprechenden Winkel aber im Bogenmaß ein (oder umgekehrt).

Auf fast allen Taschenrechnern kann man durch die $\boxed{\text{MODE}}$ -Taste oder durch $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{DRG}}$ spezifizieren, ob man mit DEG (=degree=Gradmaß) oder mit RAD (=radiant=Bogenmaß) rechnet.

$$sin(30^\circ) = 0.5, \;\; \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0.5,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx 0.8660254.$$

Taschenrechner gibt anders als Computeralgebra-Systeme (wie Maple oder Mathematica) nur Näherungswerte nicht exakte Werte aus wie etwa

$$\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Fehlender Cotangens

Bei den *trigonometrischen Funktionen* fällt auf, dass zwar Sinus, Cosinus und Tangens durch die entsprechenden Tasten $\boxed{\text{SIN}}$, $\boxed{\text{COS}}$ und $\boxed{\text{TAN}}$ vorhanden sind, dass aber der Cotangens fehlt. Hier sollte man z.B. die Formel für den Cotangens

$$\cot x = \frac{1}{\tan x}$$

verwenden.

Vorsicht ist geboten, da Tangens und Cotangens nicht für alle reellen Zahlen definiert sind. Dann melden viele Taschenrechner „Error“ wie z.B. „- E -“, etwa bei $\tan(-\frac{\pi}{2})$.

Arcusfunktionen

Man berechnet etwa Werte des Arcussinus über die beiden Tasten $\boxed{\text{SHIFT}}$ und $\boxed{\text{SIN}}$. Die zweite Belegung von Tasten steht meist über der Taste, wobei man hier vorsichtig sein muss: So bedeutet $\sin^{-1}$ keineswegs $\frac{1}{\sin}$, sondern die Umkehrfunktion des Sinus, also den Arcussinus.

$$\underline{\text{Bsp.:}}\quad \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0.5235988$$

Man erhält nicht den exakten Wert, nämlich $\frac{\pi}{6}$, sondern eben die obige Näherung (wenn man Bogenmaß als „Mode“ eingestellt hat!). Der Arcuscotangens fehlt, aber hier kann man ohne Probleme folgende Beziehung verwenden:

$$\operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - \arctan x.$$

Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen

Wenn Sie etwa die Gleichung

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

lösen wollen, so tippen Sie in Ihren Taschenrechner $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{SIN}}$ (d.h. Arcussinus) $\frac{1}{2}$ ein und erhalten als Lösung

$$\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0.5235988.$$

Andere Lösungen von $\sin x = \frac{1}{2}$ erhält man nicht, weil bei Definition der Arcusfunktionen deren Wertebereiche geeignet eingeschränkt wurden, etwa beim Arcussinus auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Die Gleichung $\sin x = y$ hat bei gegebenem $y \in [-1, 1]$, etwa $y = \frac{1}{2}$, aber in jedem der Intervalle

$$I_k := [-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi]$$

mit $k \in \mathbb{Z}$ genau eine Lösung.

Zweige der Umkehrfunktionen

$y = \sin x$ hat auch auf

$$I_k := [-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi]$$

eine Umkehrfunktion, die k–ter *Zweig* des Arcussinus heißt.

Die bereits definierte Umkehrfunktion $\arcsin x$ heißt *Hauptzweig*.

Man kann sich etwa graphisch klarmachen, dass für den k-ten Zweig des Arcussinus gilt:

$$\arcsin_k x = (-1)^k \arcsin x + k\pi.$$

Zweige der Umkehrfunktionen

Die weiteren Stellen, an denen der Sinus den Wert $\frac{1}{2}$ annimmt, sind:

$$\begin{array}{lllllll}
\ldots \\
\arcsin_{-2}\left(\frac{1}{2}\right) & = & (-1)^{-2}\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)-2\pi & = & \frac{\pi}{6}-2\pi & = & -\frac{11}{6}\pi, \\
\arcsin_{-1}\left(\frac{1}{2}\right) & = & (-1)^{-1}\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)-1\pi & = & -\frac{\pi}{6}-\pi & = & -\frac{7}{6}\pi, \\
\arcsin_{1}\left(\frac{1}{2}\right) & = & (-1)^{1}\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)+1\pi & = & -\frac{\pi}{6}+\pi & = & \frac{5}{6}\pi, \\
\arcsin_{2}\left(\frac{1}{2}\right) & = & (-1)^{2}\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)+2\pi & = & \frac{\pi}{6}+2\pi & = & \frac{13}{6}\pi, \\
\ldots
\end{array}$$

D.h. *alle* Lösungen der Gleichung $\sin x = \frac{1}{2}$ ergeben sich zu

$$y_k = (-1)^k \underbrace{\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)}_{=\frac{\pi}{6}} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$