Kapitel 2

Folgen und endliche Summen

- Folgen und ihre Eigenschaften
- Endliche arithmetische und geometrische Folgen und Reihen
- Vollständige Induktion
- Anwendungen

Folgen

Im Allgemeinen besteht eine Folge aus einer Anordnung (nullter, erster, zweiter . . . Wert) von gewissen reellen Zahlen. Durch diese Anordnung wird jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ genau ein Wert $a(n)$ zugeordnet und eine Reihenfolge festgelegt:

$$a(0), a(1), a(2), \ldots$$

Definition

Eine Abbildungsvorschrift $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $a(n) = a_n$ heißt (unendliche) Folge. Hierfür schreibt man auch

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_n) = a_0, a_1, a_2, \ldots$$

Die reellen Zahlen a_n heißen Folgenglieder.

Häufig beginnt die Abbildungsvorschrift nicht mit der Zahl Null, sondern mit der Eins. Daher benutzen wir das Symbol $\mathbb{N}_+ := \mathbb{N} \setminus \{0\}$ für die Menge der positiven natürlichen Zahlen.

Beispiel

a) *Die Folge* $1, 3, 5, 7, \ldots$ *der ungeraden natürlichen Zahlen kann man schreiben als*

$$a_0 = a(0) = 1,\ a_1 = a(1) = 3,$$

$$a_2 = a(2) = 5,\ a_3 = a(3) = 7,$$

usw. Das Bildungsgesetz *für die Folgenglieder lautet offensichtlich*

$$a_n = a(n) = 2n + 1.$$

Statt die Folge — wie eingangs — durch Aufzählung ihrer Glieder zu definieren, können wir daher auch $(2n+1)_{n \in \mathbb{N}}$ *(Definition mittels Abbildungsvorschrift) schreiben.*

b) *Die Folge* $1^3, 2^3, 3^3, \ldots$ *lässt sich auch durch* $(n^3)_{n \in \mathbb{N}_+}$ *angeben.*

c) *Die alternierende, nur aus zwei Werten bestehende Folge* $1, -1, 1, -1 \ldots$ *kann durch das Bildungsgesetz* $a_n = (-1)^n$*,* $n \in \mathbb{N}$*, definiert werden.*

Umgebung eines Punktes

Zur Untersuchung von Grenzwerteigenschaften von Folgen, benötigt man Kenntnisse über „Abstandsverhalten“ von Folgengliedern.

Abstand zweier reeller Zahlen x und a: $|x-a|$.

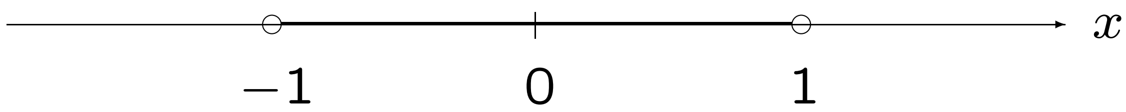
Die Menge aller Punkte $x \in \mathbb{R}$, die von einem Punkt a einen Abstand kleiner als eine vorgegebene Zahl ε haben, bilden eine *Umgebung* von a.

Definition

Für $\varepsilon > 0$ ist die ε-Umgebung von a definiert durch

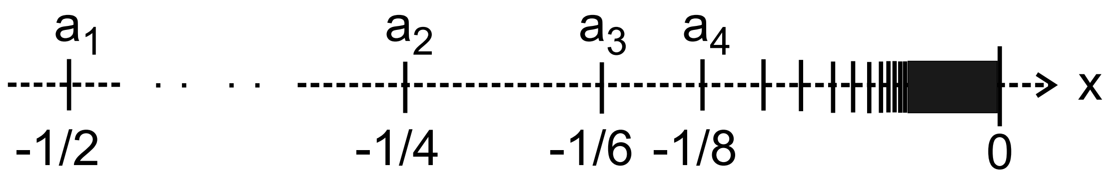
$$\begin{aligned} U_\varepsilon(a) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| < \varepsilon\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid a-\varepsilon < x < a+\varepsilon\}. \end{aligned}$$

Mit $a = 0$ und $\varepsilon = 1$ ergibt sich $U_1(0)$ zu



Konvergenzbegriff

Der *Konvergenzbegriff* lässt sich exemplarisch an der Folge $\left(-\frac{1}{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}_+} = -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{6}, \ldots$ und deren Visualisierung studieren:



Die Folge hat die Eigenschaften:

a) Mit zunehmenden n werden die Folgenglieder a_n größer und unterscheiden sich dabei immer weniger von der Zahl 0.

b) In jeder noch so kleinen Umgebung der Zahl 0 ($U_\varepsilon(0)$, ε beliebig klein gewählt!) liegen fast alle Glieder der Folge.

   D.h. nur endlich viele Glieder liegen außerhalb der vorgegebenen Umgebung.

Konvergenzbegriff — Fortsetzung

- Beispielsweise liegen in $U_{1/6}(0)$ alle Folgenglieder mit Ausnahme der ersten drei,
- in $U_{1/100}(0)$ alle mit Ausnahme der ersten fünfzig ($|a_{51}| < 1/100$),
- in $U_{1/1000}(0)$ alle mit Ausnahme der ersten fünfhundert ($|a_{501}| < 1/1000$), usw.

Fast alle Folgenglieder bedeutet somit: *alle mit Ausnahme von endlich vielen*.

Für unsere Folge gilt für fast alle $n \in I\!N_+$

$$a_n \in U_\varepsilon(0) \quad \text{bzw.} \quad \left| -\frac{1}{2n} - 0 \right| < \varepsilon. \qquad (*)$$

Bei *jeder* Wahl für ε liegen nur endlich viele Folgenglieder außerhalb von $U_\varepsilon(0)$. Die Ungleichung $(*)$ $1/(2n) < \varepsilon$ kann äquivalent umgeformt werden in

$$n > 1/(2\varepsilon).$$

Diese Ungleichung wird bereits von der kleinsten Zahl $n_0 \in I\!N$ erfüllt, die größer als $1/(2\varepsilon)$ ist.

Konvergenz bzw. Divergenz einer Folge

Fast alle bedeutet auch: *mindestens alle ab einem bestimmten Index* n_0.

So wie sich unsere Beispielfolge der Zahl 0 nähert, kann sich eine Folge i. Allg. natürlich einer beliebigen Zahl $a \in I\!R$ nähern.

Definition

Die Folge (a_n) heißt konvergent mit dem Grenzwert (oder Limes) a, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl n_0 existiert, so dass für alle $n \geq n_0, n \in I\!N$, gilt $|a_n - a| < \varepsilon$. Man schreibt dann symbolisch (mit sog. Limeszeichen oder einfacher):

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a \quad \textbf{oder} \quad a_n \to a.$$

Ist $a = 0$, so heißt (a_n) Nullfolge. Existiert keine derartige Zahl a, dann heißt (a_n) divergent.

Beispiel

a) *Egal, welches beliebige* ε *man sich auch vorgibt, für die Folge*

$$\left(-\frac{1}{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}_+}$$

findet man immer ein geeignetes n_0*, nämlich* $n_0 > 1/(2\varepsilon)$*. Somit gilt*

$$|-1/(2n) - 0| < \varepsilon$$

für $n > n_0$*, also ist die Folge konvergent mit dem Grenzwert 0, d.h. eine Nullfolge.*

b) *Auch die durch*

$$a_n = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}_+,$$

definierte Folge ist eine Nullfolge. Die Existenz der Zahl n_0 *ergibt sich direkt aus der Umformung von Gleichung*

$$|1/n - 0| < \varepsilon$$

zu $n > 1/\varepsilon$*. Für jede natürliche Zahl größer als* $1/\varepsilon$ *ist somit* $|a_n - a| < \varepsilon$ *erfüllt.*

Divergente Folgen

Es gibt auch Folgen, die keinen Grenzwert besitzen. Beispielsweise hat die Folge $a_n = (-1)^n$ keinen Grenzwert, da unendlich viele Folgenglieder gleich 1 ($a_0, a_2, a_4, \ldots$), aber auch unendlich viele gleich -1 ($a_1, a_3, a_5, \ldots$) sind. In keiner Umgebung $U_\varepsilon(1)$ bzw. $U_\varepsilon(-1)$ liegen also fast alle Folgenglieder.

Die Folge $a_n = n^3$ zeigt ein interessantes Verhalten: Ihre Folgenglieder werden immer größer, schließlich „beliebig groß“. Mathematisch kann man dies wie folgt ausdrücken:

Sei $M > 0$ eine reelle Zahl, dann sind nur endlich viele Folgenglieder kleiner als M. Fast alle Glieder, nämlich diejenigen a_n mit $n > \sqrt[3]{M}$ sind größer als M. Da die Wahl von M dabei belanglos ist, hat man die Aussage:

Für alle $M > 0$ gilt, dass fast alle Folgenglieder größer als M sind.

Bestimmte Divergenz

Definition

Wenn für eine Folge (a_n) die Aussage „Für alle $M > 0$ bzw. $M < 0$ gilt, dass fast alle Glieder a_n größer bzw. kleiner als M sind“ erfüllt ist, dann nennt man sie bestimmt divergent mit dem uneigentlichen Grenzwert ∞ bzw. $-\infty$. Man schreibt dann

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \infty \quad \textbf{bzw.} \quad \lim_{n \to \infty} a_n = -\infty.$$

Beschränktheit und Monotonie

Weitere wichtige Eigenschaften, mit deren Hilfe man Konvergenzuntersuchungen durchführen kann, seien nachfolgend definiert:

Definition

Eine Folge (a_n) heißt nach oben bzw. nach unten beschränkt, falls es eine Zahl M_o bzw. M_u gibt, mit

$$a_n \leq M_o \quad \textbf{bzw.} \quad a_n \geq M_u \textbf{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Eine Folge heißt beschränkt, falls sie sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist.
Folgen, für deren Glieder

$$a_{n+1} \geq a_n \quad \textbf{bzw.} \quad a_{n+1} \leq a_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, nennt man monoton wachsend bzw. monoton fallend.

Monotoniekriterium

Damit lässt sich nun ein wichtiges Ergebnis, das wir hier nicht beweisen wollen, formulieren:

Eine monoton wachsende, nach oben beschränkte bzw. monoton fallende, nach unten beschränkte Folge ist konvergent.

Beispiel

Die bereits untersuchte Folge

$$(a_n) = \left(-\frac{1}{2n}\right),\ n \in \mathbb{N}_+,$$

ist wegen

$$-\frac{1}{2(n+1)} > -\frac{1}{2n}$$

monoton wachsend.

Da sie durch die Zahl 0 nach oben beschränkt ist, konvergiert sie.

Wir haben schon gezeigt, dass sie eine Nullfolge ist.

Grenzwertregeln

Für die Bildung von Grenzwerten gelten gewisse Rechenregeln, die es erlauben, von den Grenzwerten einfacher Folgen — etwa (a_n), (b_n) — auf die Grenzwerte komplizierter Folgen, wie z.B. Summenfolge (a_n+b_n) oder Produktfolge $(a_n \cdot b_n)$, zu schließen:

Für zwei konvergente Folgen (a_n) und (b_n) mit den Grenzwerten a und b gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) &= a + b, \\
\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) &= a - b, \\
\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) &= a \cdot b, \\
\lim_{n\to\infty}(c \cdot a_n) &= c \cdot a, \;\; c \in \mathbb{R} \text{ const.} \\
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) &= \frac{a}{b}, \;\text{ falls } b_n \neq 0, b \neq 0.
\end{aligned}$$

Grenzwertregeln bei bestimmter Divergenz

Ist eine der Folgen (a_n), (b_n) bestimmt divergent, z.B. $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, dann gelten ähnliche Rechenregeln (dabei soll ∞ *keine Zahl* sein, sondern ein Symbol für bestimmte Divergenz):

$$
\begin{aligned}
&\text{„}a \pm \infty = \pm\infty\text{“}, \qquad &&\text{„}a \cdot \infty = \pm\infty\text{“},\\
&\text{„}\frac{a}{\infty} = 0\text{“}, \qquad &&\text{„}\frac{\infty}{a} = \pm\infty\text{“}.
\end{aligned}
$$

Ferner gilt auch

$$\text{„}\infty \cdot \infty = \infty\text{“}.$$

Man beachte aber, dass

$$\text{„}\infty - \infty,\ 0 \cdot \infty,\ \frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0^0;\ 1^{\infty}\text{“}$$

(0 steht dabei als Symbol für $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$) unbestimmte Formen sind und bei jedem Auftreten eine eigene Untersuchung erfordern.

Es gilt lediglich (falls $b \neq 0$)

$$\text{„}\frac{b}{0} = \pm\infty\text{“}.$$

Beispiel

a) *Da wir bereits wissen, dass*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

ist, können wir nun schließen:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \cdot 0 = 0.$$

b) *Um den Grenzwert der durch*

$$a_n = \frac{4-n}{2n-1}$$

definierten Folge zu bestimmen, benutzen wir $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ *und erhalten*

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{4-n}{2n-1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} \cdot \frac{(4/n)-1}{2-1/n} \\ &= \frac{4 \cdot 0 - 1}{2-0} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Wichtige Grenzwerte

Ohne Beweise führen wir einige Grenzwerte von Folgen auf, deren Kenntnis für spätere Anwendungen wichtig ist:

Es seien $c \in I\!R$ eine Konstante und q eine reelle Zahl mit $|q| < 1$, dann gilt:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{c} = 1, \qquad \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty,$$

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1, \qquad \lim_{n \to \infty} q^n = 0.$$

Arithmetische und geometrische Folge

Definition

Eine Zahlenfolge (a_n) heißt arithmetische bzw. geometrische Folge, falls die Differenz k bzw. der Quotient q benachbarter Elemente konstant ist, d.h.

$$a_{n+1} - a_n = k \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$$

Bei der geometrischen Folge ist natürlich $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erforderlich.

Bildungsgesetze

Unmittelbar aus der Definition folgt:

Arithmetische bzw. geometrische Folgen besitzen beide jeweils ein einfaches Bildungsgesetz:

$$\boldsymbol{a_n = a_0 + n \cdot k} \qquad \textbf{bzw.} \qquad \boldsymbol{a_n = a_0 \cdot q^n.}$$

Das „arithmetische" Bildungsgesetz erkennt man sofort.

Das „geometrische" Bildungsgesetz folgt wegen

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q$$

aus

$$\begin{aligned} a_n = a_{n-1}q &= (a_{n-2}q) \cdot q \\ &= (a_{n-3}q) \cdot q^2 = \ldots = a_0 q^n. \end{aligned}$$

Beispiel

a) *Durch* $a_n = n/2$, *d.h.*

$$0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots,$$

ist eine arithmetische Folge mit $k = \frac{1}{2}$ *definiert.*

b) *Durch* $a_n = 2^n$, *d.h.*

$$(a_n) = 1, 2, 4, 8, 16, \ldots,$$

ist eine geometrische Folge mit $q = 2$ *gegeben.*

Das Summenzeichen

Endliche Summen, die aus vielen Summanden bestehen, schreibt man in der Regel bequemer durch Benutzung des *Summenzeichens* $\sum$.

So z.B. die Summe s_n in der Form

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i := a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1}.$$

Definitionsgemäß ist dabei der *Summationsindex* i der Reihe nach durch die Zahlen 0 bis $n-1$ zu ersetzen. Allgemein lässt sich dann die Summe der Summanden

$$a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n; \; n \geq m,$$

schreiben als

$$\sum_{i=m}^{n} a_i := a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n.$$

Wert von endlicher arithmetischer und geometrischer Reihe

Es gibt einfache Formeln, mit denen man den Wert der Reihen sofort berechnen kann:

Ist $s_n := a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1}$ eine endliche arithmetische Reihe, dann gilt:

$$s_n = \frac{n}{2}(a_0 + a_{n-1}).$$

Ist $s_n := a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1}$ eine endliche geometrische Reihe mit dem Quotienten $q := a_{k+1}/a_k \neq 1$, dann gilt:

$$s_n = a_0 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Die Formel für die arithmetische Reihe lässt sich mit einer Idee von Klein-Gauß leicht herleiten.

Beweisprinzip der Vollständigen Induktion

Um die Gültigkeit einer Aussage $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ zu beweisen, muss man zweierlei zeigen:

- **$A(0)$ ist wahr, d.h. die Aussage gilt für $n = 0$ (Induktionsbeginn),**
- **Aus $A(n)$ folgt $A(n+1)$, d.h. wenn die Aussage für eine beliebige natürliche Zahl n gilt, dann gilt sie auch für die nachfolgende Zahl $n+1$ (Induktionsschluss).**

Der Induktionsbeginn besagt also: $A(0)$ gilt. Durch den Induktionsschluss folgt, dass die Aussage auch für den Nachfolger 1 der Zahl 0 gilt: also $A(1)$. Wiederum durch den Induktionsschluss folgt, dass die Aussage auch für den Nachfolger 2 der Zahl 1 gilt: also $A(2)$, usw. Damit kann man $A(n)$ für jede beliebige natürliche Zahl n zeigen.

Bemerkungen zum Prinzip der Vollständigen Induktion

- Statt von „Induktionsbeginn“ spricht man auch von „Induktionsanfang“ oder „Induktionsbasis“; für den „Induktionsschluss“ sind ebenso die Begriffe „Induktionsschritt“ oder „Schritt von n auf $n + 1$“ gebräuchlich.

- Der Induktionsbeginn muss nicht bei 0 liegen, auch 1 oder irgendeine andere natürliche (oder sogar ganze) Zahl sind üblich.

- Es gibt Möglichkeiten der Verallgemeinerung: Man kann etwa im Induktionsschritt von $A(0)$, $A(1)$, ..., $A(n)$ auf $A(n + 1)$ schließen, also nicht von *einer* Zahl auf die nächste, sondern von mehreren Vorgängern aus.

  Andererseits gelten Aussagen nur für alle geraden bzw. ungeraden Zahlen, wenn man von $A(n)$ auf $A(n + 2)$ im Induktionsschluss folgern kann.

Beispiel
Beweis der folgenden Summenformel:

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \qquad (*)$$

Induktionsbeginn:
Gezeigt wird Formel ($*$) für $n = 1$.

Für $n = 1$ besteht die Summe auf der linken Seite nur aus einem einzigen Summanden, nämlich der 1. Auf der rechten Seite ergibt $\frac{n(n+1)}{2}$ nach Einsetzen von $n = 1$ ebenfalls

$$\frac{1 \cdot (1+1)}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1,$$

womit dann die Formel ($*$) für $n = 1$ bewiesen wäre.

Induktionsschluss:
Wir setzen jetzt voraus, dass die Formel ($*$) für n gilt, und zeigen, dass sie dann auch für $n+1$ richtig ist. Also formal aufgeschrieben:

Induktionsvoraussetzung: (Das wird vorausgesetzt!)

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \qquad (**)$$

Beispiel — Fortsetzung

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \qquad (**)$$

<u>Induktionsbehauptung</u>: (Das ist zu zeigen!)

$$1 + 2 + 3 + ... + n + (n+1) = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2} \qquad (***)$$

Auf die Induktionsbehauptung wiederum kommt man, indem man in der Induktionsvoraussetzung überall, wo n steht, dieses durch $n+1$ ersetzt (auf Klammersetzung achten!).
Beim Induktionsschluss kommt es nun darauf an, $(***)$ aus $(**)$ herzuleiten — man wird also auch irgendwo in der Beweiskette das Bekannte, also $(**)$, benutzen müssen. Wir starten mit der linken Seite der Induktionsbehauptung:

$$1 + 2 + 3 + ... + n + (n+1) = \underbrace{[1 + 2 + 3 + ... + n]}_{= \frac{n(n+1)}{2}} + (n+1)$$

Beispiel — Fortsetzung

Wir starten mit der linken Seite der Induktionsbehauptung:

$$1 + 2 + 3 + ... + n + (n + 1) = \underbrace{[1 + 2 + 3 + ... + n]}_{= \frac{n(n+1)}{2}} + (n + 1)$$

nach Induktionsvoraussetzung ($**$), und fahren fort mit dem Ausklammern von $(n + 1)$:

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n + 1) = (n + 1) \cdot \left[\frac{n}{2} + 1\right] = (n + 1) \cdot \frac{(n + 2)}{2}.$$

Damit haben wir die rechte Seite der Induktionsbehauptung ($* * *$) stehen — was zu beweisen war!

Rekursion, Fakultäten

Vollständige Induktion ist eng verwandt mit Rekursion, was folgendes Beispiel gut verdeutlicht:

Fakultäten sind bekanntlich definiert als

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1,$$

etwa

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Wenn man nun aber $5! = 120$ kennt, wäre es doch dumm, $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ auszurechnen — das geht nämlich einfacher:

$$6! = 6 \cdot 5! = 6 \cdot 120 = 720.$$

Dass man, wie gesehen, $6!$ auf $6 \cdot 5!$ *zurückführen* kann, wird mit dem Begriff *Rekursion* bezeichnet.

Fakultäten kann man also rekursiv definieren:

$$0! := 1,\ (n+1)! = (n+1) \cdot n!.$$

Potenzen, Potenzgesetze

Ein anderes Beispiel für eine rekursive Definition sind Potenzen:

$$a^0 = 1, \quad a^{n+1} = a^n \cdot a.$$

Wenn man nun noch Potenzen für negative Exponenten wie folgt erklärt:

$$a^{-n} = (a^{-1})^n = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n},$$

dann gelten (zunächst für ganze Zahlen m, n) die bekannten *Potenzgesetze*:

$$\boldsymbol{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}, \qquad \boldsymbol{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}},$$

$$\boldsymbol{(a^m)^n = a^{m \cdot n}},$$

$$\boldsymbol{(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n}, \qquad \boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$$

Rekursive Definition von Zahlenfolgen

Man kann Zahlenfolgen bilden, indem man die erste Zahl (den Startwert) a_0 vorgibt, sowie eine Rekursionsvorschrift, wie sich die $(n+1)$-te Zahl a_{n+1} aus der n-ten Zahl a_n berechnet.

So ist etwa durch

$$a_0 = 1 \quad \text{und} \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{2}{a_n})$$

eine Zahlenfolge rekursiv definiert. Durch iteratives Verwenden der Rekursionsformel erhält man

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2}(a_0 + \frac{2}{a_0}) = 1.5, \\ a_2 &= \frac{1}{2}(a_1 + \frac{2}{a_1}) \approx 1.4157, \\ a_3 &= \frac{1}{2}(a_2 + \frac{2}{a_2}) \approx 1.4142 \end{aligned}$$

usw.

Diese Folge ist übrigens schon seit über 2000 Jahren bekannt. Als „Verfahren von Heron“ liefert sie mit wachsendem n immer bessere Näherungswerte für $\sqrt{2}$.

Beweise in der Mathematik

Zur Mathematik gehören Beweise — wie das Amen zur Kirche, wie Versuche zur Experimentalphysik, wie Messungen zu den Ingenieurwissenschaften.

Beweise sind in allen exakten Wissenschaften wirklich wichtig, denn ein bloß intuitives Verständnis kann — das ist auch eine Alltagserfahrung — leicht täuschen. Dabei gibt es auch in der Mathematik ganz unterschiedliche Beweistypen.

Mathematische Aussagen haben oft die Gestalt

„Wenn A, dann B".

In der Logik verwendet man dafür die Abkürzung

„$A \Rightarrow B$"

(sog. „Implikation"). Aber „A $\Rightarrow$ B" kann man nicht immer *direkt* zeigen, d.h. mit Zwischenschritten

„$A \Rightarrow\ Zw_1\ \Rightarrow\ Zw_2\ \Rightarrow \ldots \Rightarrow\ Zw_n\ \Rightarrow\ B$"

herleiten. Manchmal kommt man auf scheinbaren Umwegen weiter.

Beweis durch Kontraposition

Ein solcher vermeintlicher Umweg ist der so genannte „Beweis durch Kontraposition“. Hier zeigt man anstelle von

$$„A \;\Rightarrow\; B“$$

die *Kontraposition*

$$„\overline{B} \Rightarrow \overline{A}“$$

(wobei $\overline{A}$ für die Verneinung von A steht).

Dass „A $\Rightarrow$ B“ und „$\overline{B} \;\Rightarrow\; \overline{A}$“ äquivalent (also logisch gleichwertig) sind, lernt man in der Logik — dort lernt man übrigens auch, dass

$$„A \;\Rightarrow\; B“$$

etwas ganz anderes als

$$„B \;\Rightarrow\; A“$$

ist.

Widerspruchsbeweise

Eine andere Möglichkeit, eine Aussage „A $\Rightarrow$ B“ zu beweisen, ist der so genannte Widerspruchsbeweis. Er funktioniert *indirekt*: Man setzt

$$„A \wedge \overline{B}“$$

(A und nicht-B) voraus und leitet daraus einen Widerspruch ab.

Ein Glanzstück solcher mathematischer Beweiskunst ist etwa der Beweis Euklids, dass es unendlich viele Primzahlen geben muss: Euklid nahm an, es gebe nur endlich viele Primzahlen und leitete daraus einen Widerspruch her.

Euklid (etwa 3. Jahrhundert v.Chr.) liefert auch das Stichwort für eine weitere wichtige Charakterisierung der Mathematik im Zusammenhang mit Beweisen: die so genannte *axiomatische Vorgehensweise*.

Neuere Beweise

Dass mathematische Beweise immer komplizierter werden, ist auch kein Geheimnis. Manchmal kann ein solcher Beweis nur einer größeren Gemeinschaft von Wissenschaftlern gelingen. So waren etwa an der Klassifikation der so genannten endlichen Gruppen mehr als 100 Mathematiker beteiligt.

Andere Beweise sind das Werk einzelner Genies, wie z.B. der Beweis des so genannten Fermat'schen Satzes von Andrew Wiles. Dieser Klassiker der Mathematikerzunft hat folgenden Hintergrund:

Bekanntlich gibt es Zahlentripel (x, y, z), die die Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ erfüllen, etwa $(3, 4, 5)$ die Gleichung $3^2 + 4^2 = 5^2$. Wie steht es nun mit der Gleichung $x^n + y^n = z^n$? Gibt es andere natürliche Zahlen n, so dass sich entsprechende Zahlentripel mit n als Exponenten finden lassen?

Die Antwort ist — nein.

Andrew Wiles ist für den Beweis des Fermat'schen Satzes mit der Fields-Medaille ausgezeichnet worden (einer Art Nobelpreis für Mathematiker).