5 Grenzwertregel von Bernoulli und de L'Hospital

Oft muss man den Grenzwert einer Funktion berechnen. Ist die Funktion ein Quotient zweier Funktionen, so kann die Grenzwertbildung auf **unbestimmte Ausdrücke** führen. In diesem Kapitel gehen wir speziell auf zwei Typen ein:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{und} \quad \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} .$$

Dabei können folgende unbestimmte Ausdrücke auftreten:

1. Falls $f(x_0) = 0$ und $g(x_0) = 0$ folgt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \frac{0}{0} .$$

2. Falls $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$ und $\lim\limits_{x \to \pm\infty} g(x) = 0$ ist, dann folgt

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)}{\lim\limits_{x \to \pm\infty} g(x)} = \frac{0}{0} .$$

3. Falls $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x \to \pm\infty} g(x) = \infty$ ist, dann folgt

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)}{\lim\limits_{x \to \pm\infty} g(x)} = \frac{\infty}{\infty} .$$

4. Falls $f(x_0) = \infty$ und $g(x_0) = \infty$ folgt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \frac{\infty}{\infty} .$$

Beispiel 1

Der Grenzwert

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{\lim\limits_{x \to 0} e^x - 1}{\lim\limits_{x \to 0} x} = \frac{0}{0}$$

ist zunächst noch unbestimmt.

Beispiel 2

Der Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{e^x} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\ln(x)}{\lim\limits_{x\to\infty}e^x} = \frac{\infty}{\infty}$$

ist ebenfalls noch unbestimmt.

Aufgabe 1

Bestimme die obenstehenden Grenzwerte mit Hilfe des Taschenrechners und einer entsprechenden Zahlenfolge.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \ldots \qquad \text{und } \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{e^x} = \ldots$$

Es können noch weitere unbestimmte Ausdrücke auftreten, welche aber durch geschickte Umformungen auf die zwei Haupttypen $\frac{0}{0}$ und $\frac{\infty}{\infty}$ zurückgeführt werden können. Es sind die folgenden Ausdrücke:

$$0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 1^\infty,\ 0^0,\ \infty^0.$$

Wir leiten nun eine **Formel** her, mit der die **unbestimmten Ausdrücke** $\frac{0}{0}$ und $\frac{\infty}{\infty}$ berechnet werden können.

Seien $f(x)$ und $g(x)$ zwei stetige Funktionen mit $f(x_0) = 0$ und $g(x_0) = 0$, d.h. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x_0) = 0$ und $\lim\limits_{x\to x_0} g(x_0) = 0$, dann gilt

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)} = \frac{0}{0}.$$

Wir entwickeln nun beide Funktionen in eine Taylorreihe um die Stelle x_0:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots}{g(x_0)+\frac{g'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{g''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots}.$$

Weil $f(x_0) = 0$ und $g(x_0) = 0$ ist, folgt

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots}{\frac{g'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{g''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots}.$$

Jedes Glied der rechten Seite wird mit dem Term $x-x_0$ dividiert:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{f'(x_0)}{1!} + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0) + \ldots}{\frac{g'(x_0)}{1!} + \frac{g''(x_0)}{2!}(x-x_0) + \ldots}.$$

Wir bilden nun den Grenzübergang $x \to x_0$:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{f'(x_0)}{1!} + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0) + \ldots}{\frac{g'(x_0)}{1!} + \frac{g''(x_0)}{2!}(x-x_0) + \ldots} = \frac{\lim_{x \to x_0}\left[\frac{f'(x_0)}{1!} + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0) + \ldots\right]}{\lim_{x \to x_0}\left[\frac{g'(x_0)}{1!} + \frac{g''(x_0)}{2!}(x-x_0) + \ldots\right]}.$$

$$= \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Also

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Für den Fall, wo $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ und $\lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$ gilt, und damit

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)} = \frac{\infty}{\infty},$$

bildet man die Funktionen $F(x) = \frac{1}{f(x)}$ und $G(x) = \frac{1}{g(x)}$. Mit diesen Funktionen gilt dann

$$\lim_{x \to x_0} F(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0 \text{ und } \lim_{x \to x_0} G(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} = 0.$$

Also

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}} = \lim_{x \to x_0} \frac{G(x)}{F(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{G'(x)}{F'(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{-[g(x)]^{-2}g'(x)}{-[f(x)]^{-2}f'(x)}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{[f(x)]^2}{[g(x)]^2} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{g'(x)}{f'(x)}$$

Die Auflösung nach dem zweiten Faktor ergibt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g'(x)}{f'(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}}{\lim_{x \to x_0} \frac{[f(x)]^2}{[g(x)]^2}} = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{f(x)}{g(x)}}{\frac{[f(x)]^2}{[g(x)]^2}} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)[g(x)]^2}{g(x)[f(x)]^2} = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)}$$

und damit

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Wir fassen in einem Satz zusammen.

Satz 9

Grenzwertregel von Bernoulli und de L'Hospital

Für Grenzwerte, die auf den unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ führen, gilt die folgende Regel:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)},$$

falls $f'(x)$ und $g'(x)$ stetig sind und $f'(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ in einer Umgebung von x_0.

Bemerkung 1

Die Grenzwertregeln gelten nur für die obenstehenden unbestimmten Ausdrücken. Alle anderen unbestimmte Ausdrücke lassen sich jedoch durch spezielle **elementare Umformungen** auf eine dieser speziellen Ausdrücke zurückführen:

Funktion $f(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	elementare Umformung
$f(x) = u(x) \cdot v(x)$	$0 \cdot \infty$ oder $\infty \cdot 0$	$\dfrac{u(x)}{\frac{1}{v(x)}}$ oder $\dfrac{v(x)}{\frac{1}{u(x)}}$
$f(x) = u(x) - v(x)$	$\infty - \infty$	$\dfrac{\frac{1}{v(x)} - \frac{1}{u(x)}}{\frac{1}{u(x) \cdot v(x)}}$
$f(x) = u(x)^{v(x)}$	$0^0, \infty^0, 1^\infty$	$e^{v(x) \cdot \ln(u(x))}$

Beispiel 3

Berechne $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$.

Der Limes liefert $\frac{0}{0}$. Also nach Bernoulli de L'Hospital gilt:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(e^x - 1)'}{x'} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{1} = 1.$$

Beispiel 4

Berechne $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln(2x - 1)}{e^x}$.

Der Limes liefert $\frac{\infty}{\infty}$. Also nach Bernoulli de L'Hospital gilt:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(2x-1)}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{[\ln(2x-1)]'}{[e^x]'} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{2x-1}}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{(2x-1)e^x} = 0\,.$$

Beispiel 5

Berechne $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin(x)}\right]$.

Der Limes liefert $\infty-\infty$. Also ist die Regel von Bernoulli de L'Hospital nicht unmittelbar anwendbar. Wir formen zuerst gemäss der obenstehenden Tabelle um:

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin(x)}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x}{x\cdot\sin(x)} = \frac{0}{0}\,.$$

Nun ist die Regel von Bernoulli de L'Hospital anwendbar:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x}{x\cdot\sin(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{[\sin(x)-x]'}{[x\cdot\sin(x)]'} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{\sin(x)+x\cdot\cos(x)} = \frac{0}{0}\,.$$

Wir müssen die Regel nochmals anwenden:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{\sin(x)+x\cdot\cos(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{[\cos(x)-1]'}{[\sin(x)+x\cdot\cos(x)]'} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin(x)}{2\cos(x)-x\cdot\sin(x)} = \frac{0}{2} = 0\,.$$

Also

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin(x)}\right] = 0\,.$$

Beispiel 6

Berechne $\lim_{x\to 0}\left[\left(a+\frac{1}{x}\right)\ln(1+ax)\right]$.

Der Limes liefert $\infty\cdot 0$. Also ist die Regel von Bernoulli de L'Hospital ebenfalls nicht unmittelbar anwendbar. Wir formen zuerst gemäss der obenstehenden Tabelle um:

$$\lim_{x\to 0}\left[\left(a+\frac{1}{x}\right)\ln(1+ax)\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+ax)}{\frac{1}{a+\frac{1}{x}}}\right] = \frac{0}{0}\,.$$

Mit der Regel von Bernoulli de L'Hospital gilt:

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+ax)}{\dfrac{1}{a+\dfrac{1}{x}}}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{[\ln(1+ax)]'}{\left[\dfrac{x}{ax+1}\right]'} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{a}{1+ax}}{\dfrac{1}{(ax+1)^2}} = \lim_{x\to 0} a(1+ax) = a\,.$$

Also

$$\lim_{x\to 0}\left[\left(a+\frac{1}{x}\right)\ln(1+ax)\right] = a\,.$$

Beispiel 7

Berechne $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$.

Der Limes liefert 1^{∞}. Also gemäss der obenstehenden Tabelle zuerst umformen:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left[e^{x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right] = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left[x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]} = e^{\infty\cdot 0}\,.$$

Der Exponent muss gemäss Tabelle umgeformt werden, damit die Regel angewendet werden kann:

$$\lim_{x\to\infty}\left[x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}}\right] = \frac{0}{0}\,.$$

Die Regel kann nun angewendet werden:

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]'}{\left[\dfrac{1}{x}\right]'} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}\right)\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)}{\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\dfrac{1}{x}} = 1\,.$$

Somit ist

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left[e^{x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right] = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left[x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]} = e^1 = e\,.$$

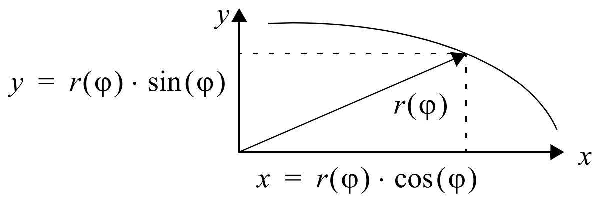
Beispiel 8

Wir wollen die Steigung der Kurventangente an der Stelle $\varphi = \pi$ der Kardioide mit der Gleichung

$$r = 1+\cos(\varphi),\quad 0\le\varphi<2\pi$$

berechnen.

Drücken wir die parametrisierte Kurve als Funktion aus, dann gilt:



$$y = (1+\cos(\varphi))\cdot\sin(\varphi) \text{ und } x = (1+\cos(\varphi))\cdot\cos(\varphi).$$

Ferner gilt:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dx} = \frac{dy}{d\varphi}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{d\varphi}}.$$

Mit

$$\frac{dy}{d\varphi} = -\sin^2(\varphi)+(1+\cos(\varphi))\cos(\varphi) = \cos(\varphi)+\cos^2\varphi-\sin^2\varphi = 2\cos^2\varphi-1+\cos(\varphi)$$

und

$$\frac{dx}{d\varphi} = -\sin(\varphi)\cos(\varphi)-(1+\cos(\varphi))\sin(\varphi) = -2\sin(\varphi)\cos(\varphi)-\sin(\varphi) = -\sin(2\varphi)-\sin(\varphi)$$

folgt

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dx} = \frac{dy}{d\varphi}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{d\varphi}} = \frac{2\cos^2\varphi-1+\cos(\varphi)}{-\sin(2\varphi)-\sin(\varphi)}.$$

Berechnet man damit die Steigung der Kurventangente an der Stelle $\varphi = \pi$, dann bekommt man einen unbestimmten Ausdruck:

$$y'(\pi) = \frac{0}{0}.$$

Wir verwenden also die Regel von Bernoulli de L'Hospital:

$$\begin{aligned} y'(\pi) &= \lim_{\varphi\to\pi}\frac{2\cos^2\varphi-1+\cos(\varphi)}{-\sin(2\varphi)-\sin(\varphi)} = \lim_{\varphi\to\pi}\frac{[2\cos^2\varphi-1+\cos(\varphi)]'}{[-\sin(2\varphi)-\sin(\varphi)]'} \\ &= \lim_{\varphi\to\pi}\frac{-4\cos(\varphi)\sin(\varphi)-\sin(\varphi)}{-2\cos(2\varphi)-\cos(\varphi)} = \frac{0}{-1} = 0 \end{aligned}$$

Die Kardioide besitzt an der Stelle $\varphi = \pi$ eine waagrechte Tangente.