11. Gewöhnliche Differentialgleichungen (DGL)

11.1 Einführung

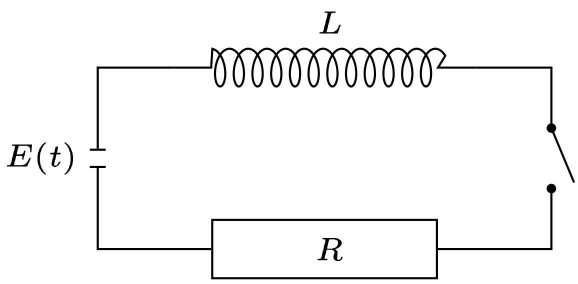
Beispiele für das Auftreten von DGL:

Bsp. 1: **Temperaturausgleich**

$$\frac{dy}{dt} = -k(y-a), \quad y(t_0) = y_0 > a$$

$y = y(t)$ $\sim$ Temperatur des Körpers z. Zt. t
a $\sim$ Umgebungstemperatur

Bsp. 2: **Einschaltvorgang**



Stromkreis mit einem Ohmschen Widerstand R und einem induktiven Widerstand (Spule, Induktionskoeffizient L)

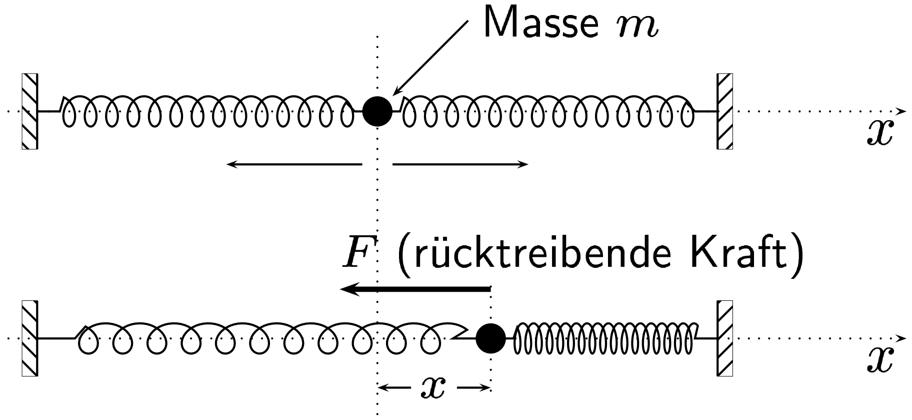
$E(t)$ = angelegte Spannung

$I(t)$ = fließender Strom

t = Zeit

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t), \quad I(0) = 0$$

Bsp. 3: **Ungedämpfte harmonische Schwingung**



Federschwingung: Rücktreibende Kraft (F) ist proportional zur Auslenkung $(-x)$

$F = m\ddot{x} = \alpha(-x),$ $\qquad$ $\alpha \sim$ Federkonstante

$$m\ddot{x} + \alpha x = 0, \quad x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = v_0$$

Definition 1
Eine **Differentialgleichung** (DGL) ist eine Gleichung zwischen einer abhängigen Veränderlichen, ihren Differentialquotienten nach den unabhängigen Veränderlichen und diesen selbst.

gewöhnliche DGL: Es tritt nur eine unabhängige Veränderliche x auf,
abhängige Veränderliche $y(x)$ = gesuchte Funktion.

allgemeine Form:

$$\begin{aligned} &\text{implizit:} \quad F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \\ &\text{explizit:} \quad y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \end{aligned} \qquad (1)$$

partielle DGL: mehrere unabhängige Veränderliche, z. B. x, y, z

$w(x, y, z)$ abhängige Veränderliche = gesuchte Funktion

allgemeine Form:

$F(x, y, z, w, w_x, w_y, w_z, w_{xx}, w_{xy}, w_{xz}, \ldots) = 0$

Ordnung einer DGL = Ordnung der höchsten in der DGL auftretenden Ableitung der gesuchten Funktion.

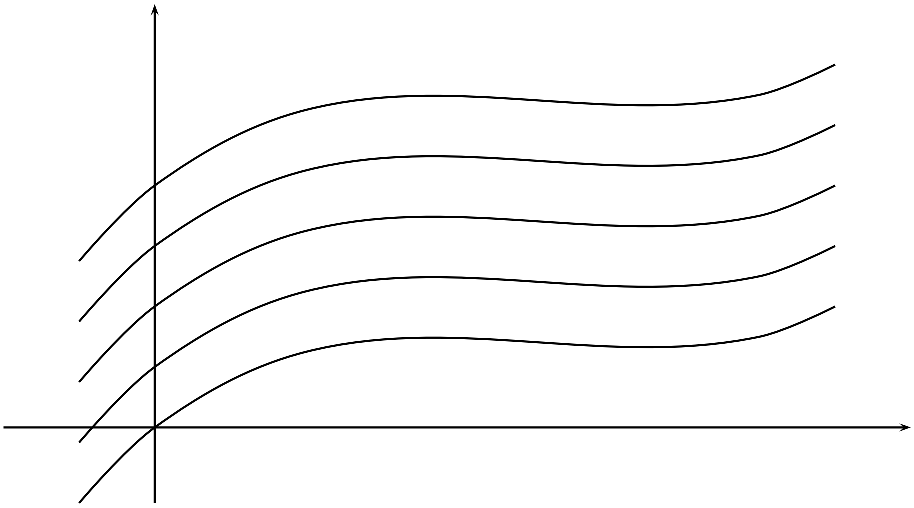
Im folgenden werden nur gewöhnliche Differentialgleichungen betrachtet.

Definition 2
Jede Funktion $y = f(x)$, die in einem Intervall I mindestens n mal differenzierbar ist, heißt eine **Lösung** (oder **Integral**) der DGL in I, wenn sie, samt ihren Ableitungen in (1) eingesetzt, diese Gleichung in I zur Identität in x macht.

Allgemeine Lösung der DGL: Lösung mit n willkürlichen Konstanten, die sich nicht durch weniger Konstante ersetzen lassen.

Beispiel:

Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, so hat die "einfachste" Differentialgleichung $y' = f(x)$ die allgemeine Lösung $y = F(x) + C$ mit beliebig wählbarer Konstante C (unbestimmte Integration).



Partikuläre Lösung der DGL: entsteht durch spezielle (feste) Wahl der Konstanten.

singuläre Lösung der DGL:
Lösung, die nicht durch eine spezielle Wahl der Konstanten aus der allgemeinen Lösung erhältlich ist.

Beispiel:

$F(x, y, y') = y'^2 - 4xy' + 4y = 0$

$y = Cx - \dfrac{C^2}{4}$ allgemeine Lösung,

$C \sim$ frei wählbare Konstante

$y = 2x - 1$ partikuläre Lösung ($C = 2$)

$y = x^2$ singuläre Lösung

DGL und Kurvenscharen

- **einparametrige Kurvenschar**

$$y = \varphi(x, C) \tag{1}$$

Scharparameter C

$$y' = \frac{d}{dx}\varphi(x, C) \tag{2}$$

Aus (1) und (2) C eliminieren

$$\Downarrow$$

$F(x, y, y') = 0$ DGL der Schar

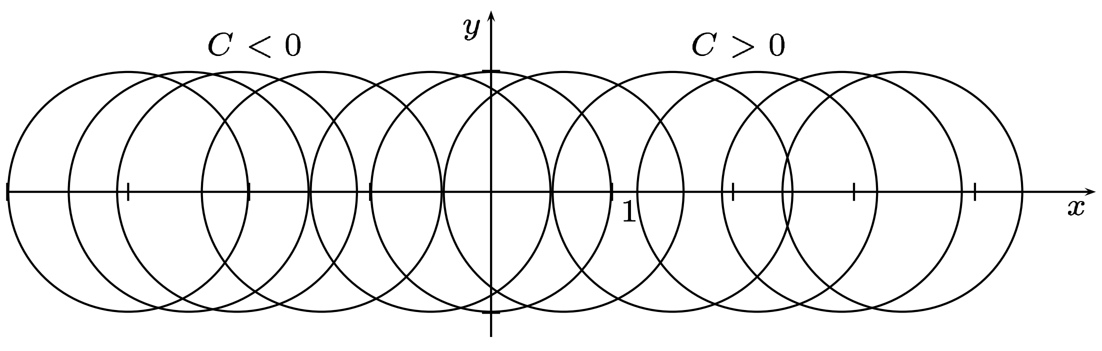
Beispiel: Kreisschar $(x - C)^2 + y^2 = 1$

$$2(x - C) + 2yy' = 0$$

$$\Downarrow$$

$y^2 y'^2 + y^2 = 1$ DGL der Schar

Kreisschar $(x - C)^2 + y^2 = 1$



- **zweiparametrige Kurvenschar**

$$y = \varphi(x, c_1, c_2) \tag{3}$$

$$y' = \frac{d\varphi}{dx} \tag{4}$$

$$y'' = \frac{d^2\varphi}{dx^2} \tag{5}$$

Aus diesen drei Gleichungen (3), (4), (5) sind c_1, c_2 zu eliminieren

$$\Downarrow$$

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

Beispiel: Schar aller Kreise mit konstantem Radius r

$$(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2 \quad a, b \sim \text{Scharparameter}$$

$$2(x-a) + 2(y-b)y' = 0$$

$$1 + (y-b)'y' + (y-b)y'' = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\frac{(1+y'^2)^3}{y''^2}}_{\substack{\text{Quadrat des klassischen Krümmungsradius,}\\ \text{vgl. 10.5(↑)}}} = r^2 \qquad \text{DGL der Schar}$$

11.2 Gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung

11.2.1 Richtungsfeld, Existenz und Eindeutigkeit

$y' = f(x, y)$

f ordnet jedem Punkt $\binom{x}{y}$ einen Anstieg $y' = f(x, y)$ zu.

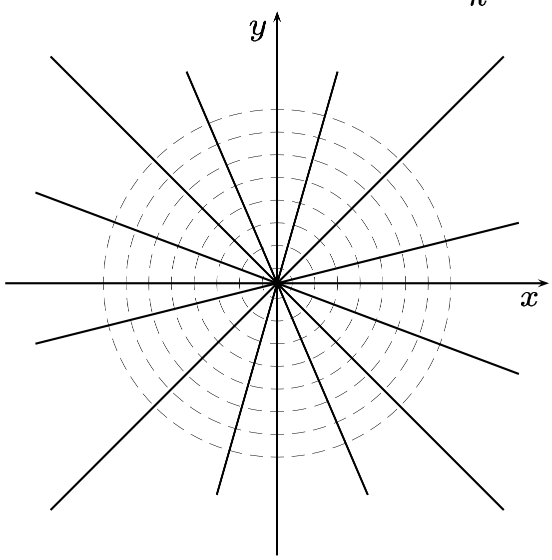
Definition:
(x_0, y_0, y_0') heißt **Linienelement** der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$, wenn $y_0' = f(x_0, y_0)$.

Richtungsfeld $:=$ Gesamtheit der Linienelemente

$f(x, y) = K \quad \sim \quad$ **Isoklinenschar** der DGL $y' = f(x, y)$
$K =$ Scharparameter

Beispiel:

$y' = -\frac{x}{y}$ Isoklinen: $y' = k \mapsto y = -\frac{1}{k}x$



Anfangswertproblem (AWP):

Es ist eine Lösung $y = y(x)$ der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ zu bestimmen, die durch einen vorgegebenen Punkt $P_0(x_0, y_0)$ des Definitionsbereiches von f verläuft, d. h. für die $y(x_0) = y_0$ erfüllt ist.

Existenz- und Eindeutigkeitssatz
$f(x, y)$ sei in dem (einfach zusammenhängenden) Gebiet G stetig und dort beschränkt und genüge einer LIPSCHITZ-Bedingung
$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq M|y_2 - y_1|$ für $\forall\binom{x}{y_1}, \binom{x}{y_2} \in G$ (*)
Dann besitzt die Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ durch jeden Punkt $P_0(x_0, y_0) \in G$ genau eine Lösungskurve, die in einer Umgebung von x nebst ihrer Ableitung stetig ist.

$M \sim$ Lipschitzkonstante

(*) liegt zwischen Stetigkeit und partieller Differenzierbarkeit; die Lipschitzbedingung ist gleichbedeutend mit der Beschränktheit des partiellen Differenzenquotienten bezüglich y in G:

$$\left|\frac{f(x, y_2) - f(x, y_1)}{y_2 - y_1}\right| \leq M$$

Erfüllt f die Lipschitzbedingung (*), so bezeichnet man f als **Lipschitz-stetig in G bzgl.** y.

(Rudolph Lipschitz, 1832 - 1903, Bonn)

11.2.2 Trennung der Veränderlichen

Sei $y' = f(x, y)$ mit $f(x, y) = h(x) \cdot g(y)$
("trennbare Veränderliche", "Produkttyp")

Voraussetzung:

h sei stetig in $[a, b]$
g sei stetig differenzierbar in $[c, d]$

$\rightarrow$ f ist Lipschitz-stetig im Rechteck
$\left\{ \binom{x}{y} \mid a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d \right\}$,

denn: (sei $c \leq y_1 < y_2 \leq d$)

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| = |h(x)g(y_2) - h(x)g(y_1)|$$

$$= \quad |h(x)|\,|g(y_2) - g(y_1)|$$

$$= \quad \underbrace{|h(x)|}_{\leq M_1}\underbrace{|g'(\eta)|}_{\leq M_2}|y_2 - y_1| \qquad MWS,\ \eta \in (y_1, y_2)$$

(als stetige Funktionen auf abgeschlossenen Bereichen sind h und g' beschränkt)

$$\leq \quad M\,|y_2 - y_1| \quad \text{mit} \quad M := M_1 M_2 \qquad qed.$$

$\Downarrow$ Ex.- u. Eindeutigkeitssatz

Durch jeden Punkt $\binom{x_0}{y_0}$ mit $a < x_0 < b$, $c < y_0 < d$ verläuft genau eine Lösungskurve. Sei $\binom{x_0}{y_0}$ vorgegeben und $y = \varphi(x)$ die (eindeutige) Lösung des AWP.

<u>Fall 1:</u> $g(y_0) = 0$
Dann ist die konstante Funktion $y \equiv y_0$ eine Lösung, also <u>die</u> Lösung des AWP, d. h. $y = \varphi(x) \equiv y_0$, denn $h(x)g(y)|_{y\equiv y_0} = h(x)\underbrace{g(y_0)}_{0} = 0 = \frac{d}{dx}y_0 = y'$.

<u>Fall 2:</u> $g(y_0) \neq 0$
Dann gilt $g(y) \neq 0$ in einer Umgebung U von y_0.

Sei $G(y)$ Stammfunktion von $\frac{1}{g(y)}$, d. h. $\frac{d}{dy}G(y) = \frac{1}{g(y)}$.
Sei $H(x)$ Stammfunktion von $h(x)$, d. h. $\frac{d}{dx}H(x) = h(x)$.

$y = \varphi(x)$ ist Lösung des AWP $\Rightarrow$

$$y' = h(x)g(y)|_{y=\varphi(x)}$$

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{g(y)} \cdot y'|_{y=\varphi(x)} \\ &= \frac{d}{dy}G(y) \cdot y'|_{y=\varphi(x)} \\ &= \frac{d}{dx}\left[G(\varphi(x))\right] \quad \text{Kettenregel!} \end{aligned}$$

Das beinhaltet:
Neben $H(x)$ ist auch $G(\varphi(x))$ eine Stammfunktion von $h(x) \Rightarrow$

$$G(\varphi(x)) = H(x) + C.$$

Wegen $G'(y_0) = \dfrac{1}{g(y_0)} \neq 0$ ist die Funktion $G(y)$ in einer Umgebung von y_0 monoton, besitzt also eine Umkehrfunktion γ.
$[z = G(y) \Leftrightarrow \gamma(z) = y,$ d. h. $\gamma(G(y)) \equiv y$ und $G(\gamma(z)) \equiv z]$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\varphi(x) = \gamma(H(x) + C)}$$

Allgemeine Lösung der DGL

(Spezielle Wahl der Konstante $C = C_0 := G(y_0) - H(x_0)$ liefert die Lösung des AWP:

$$\begin{aligned} \varphi(x_0) &= \gamma(H(x) + C_0)|_{x=x_0} \\ &= \gamma(H(x_0) + C_0) \\ &= \gamma(G(y_0)) \\ &= y_0 \end{aligned}$$

Lösungsmethodik:

$$\begin{aligned}
y' &= f(x,y) = h(x)g(y) \\
\frac{dy}{dx} &= h(x)g(y) \\
\frac{dy}{g(y)} &= h(x)\,dx && \text{"Trennung"} \\
\int \frac{dy}{g(y)} &= \int h(x)\,dx + C && \text{unbestimmte Integration} \\
G(y) &= H(x) + C && \text{Auflösung nach } y \\
y &= \underline{\underline{\gamma(H(x)+C)}}
\end{aligned}$$

Allgemeine Lösung

Lösung des AWP $y = (x_0) = y_0$

1. Möglichkeit: Bestimmung der Konstante C in der allgemeinen Lösung durch Einsetzen des Punktes x_0, y_0: $C = G(y_0) - H(x_0)$

2. Möglichkeit: Bestimmte Integration:

$$\frac{dy}{dx} = h(x)g(y)$$

$$\frac{dy}{g(y)} = h(x)dx$$

$$\boxed{\int\limits_{y_0}^{y} \frac{dt}{g(t)} = \int\limits_{x_0}^{x} h(t)\,dt}$$

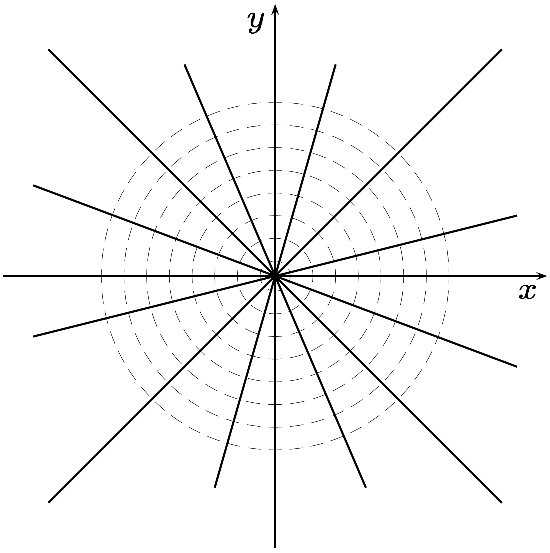
Lösung des AWP

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} G(y) - G(y_0) &= H(x) - H(x_0) \\ G(y) &= H(x) + \underbrace{G(y_0) - H(x_0)}_{=:C_0} \end{aligned}$$

Beispiel 1: $y' = -\dfrac{x}{y}$

$y' = -\frac{x}{y}$ Isoklinen: $y' = k \mapsto y = -\frac{1}{k}x$



$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{x}{y} \\ \int y\,dy &= -\int x\,dx \\ \frac{y^2}{2} &= -\frac{x^2}{2} + C_1, \quad 2C_1 =: C \\ x^2 + y^2 &= C \quad \textit{allgemeine Lösung} \quad (C \geq 0) \end{aligned}$$

Schar konzentrischer Kreise mit Radius $\sqrt{C}$

AWP: $y(0) = 3 \Rightarrow C = 9$

$$\boxed{x^2 + y^2 = 9 \qquad \textit{Lösung des AWP}}$$

oder mittels bestimmter Integration:

$$\begin{aligned}
y\,dy &= -x\,dx \\
\int_3^y t\,dt &= -\int_0^x t\,dt \\
\left.\frac{t^2}{2}\right|_3^y &= -\left.\frac{t^2}{2}\right|_0^x \\
\frac{y^2}{2} - \frac{3^2}{2} &= -\frac{x^2}{2} \\
x^2 + y^2 &= 3^2 \qquad \textit{Lösung des AWP}
\end{aligned}$$

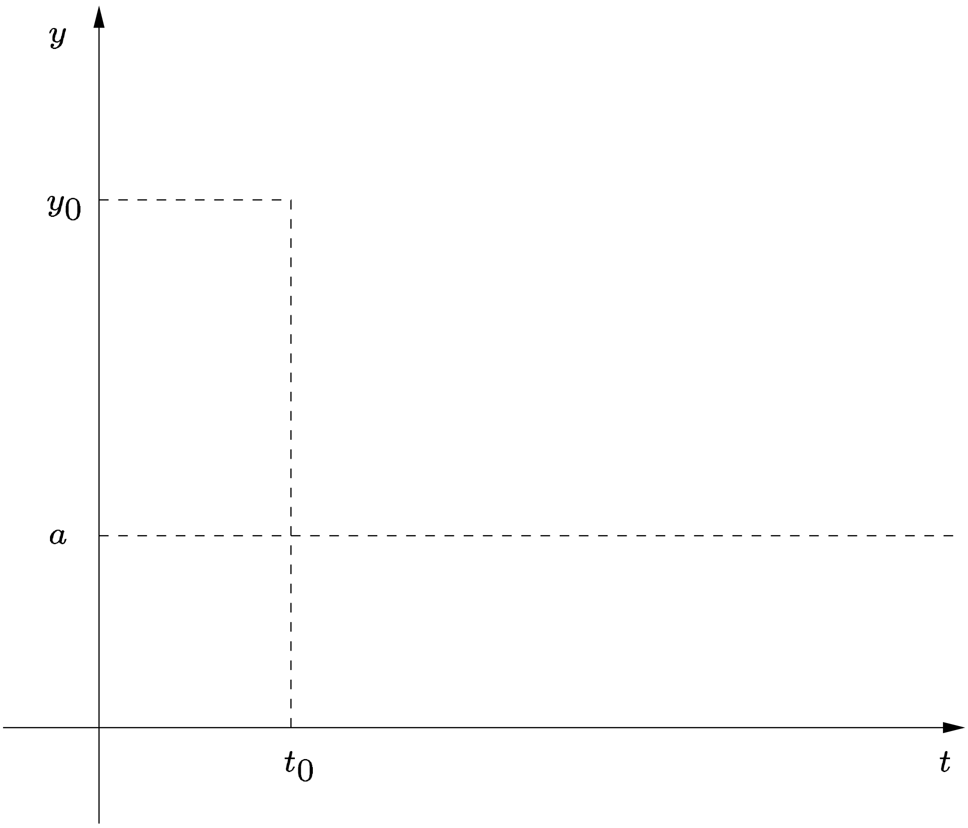
Beispiel 2: Temperaturausgleich (vgl. Einführung)

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= -k(y-a), \quad y(t_0) = y_0 \\
\int \frac{dy}{y-a} &= -k \int dt \\
\ln|y-a| &= -kt + C_1 \\
|y-a| &= e^{-kt+C_1} = e^{C_1} e^{-kt} \\
y - a &= \pm\, e^{C_1} e^{-kt}, \quad \pm\, e^{C_1} =: C \\
y &= a + Ce^{-kt} \qquad \textit{allgemeine Lösung}
\end{aligned}$$

$$y(t_0) = y_0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} y_0 & = & a + Ce^{-kt_0} \\ C & = & (y_0 - a)e^{kt_0} \end{array}$$

$$y = a + (y_0 - a)e^{kt_0}e^{-kt}$$

$$\boxed{y = a + (y_0 - a)e^{-k(t-t_0)} \qquad \textit{Lösung des AWP}}$$



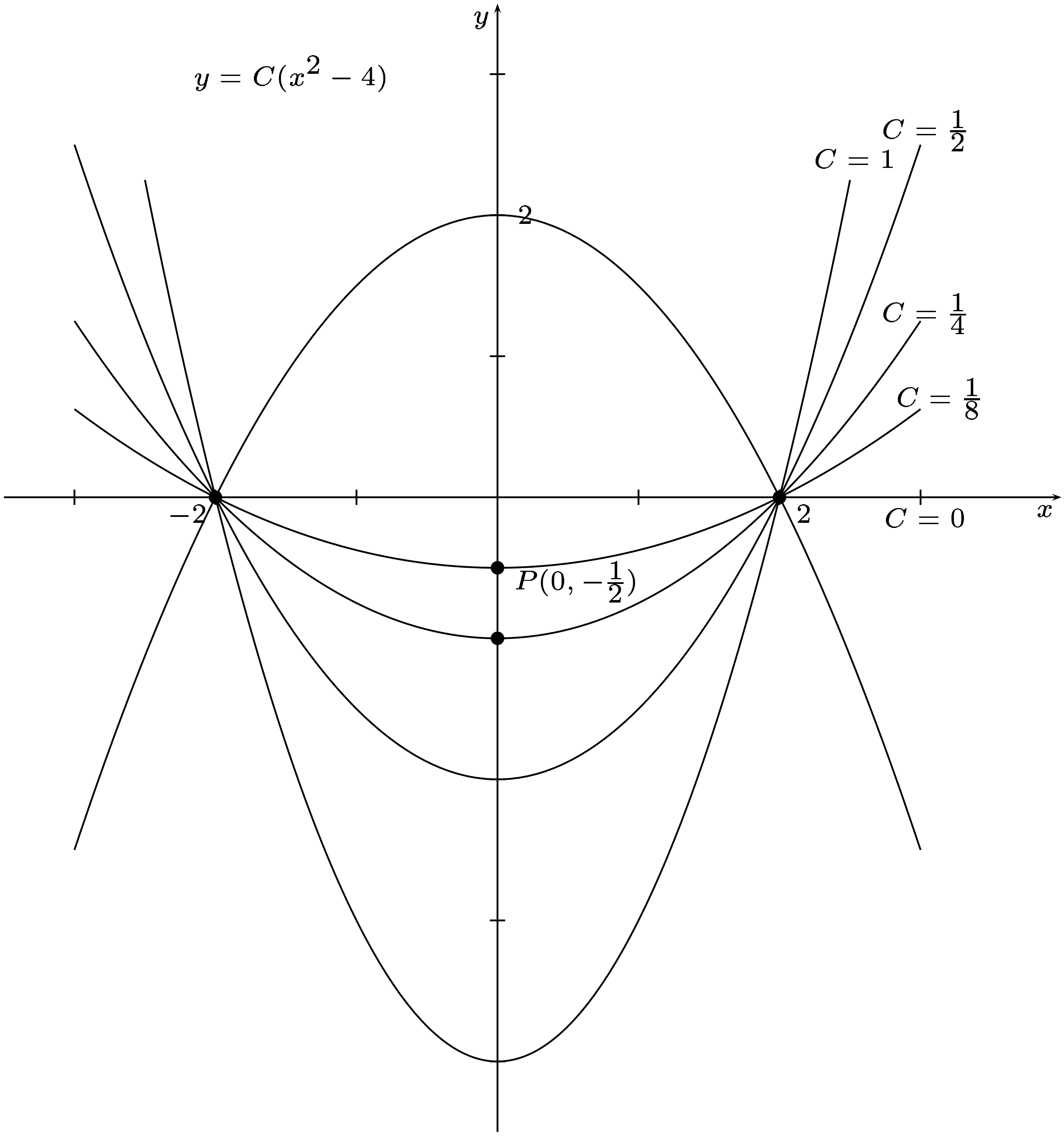
Beispiel 3: $x^2y' - 4y' - 2xy = 0$

$$\begin{aligned}
y'(x^2-4) &= 2xy \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{2xy}{x^2-4} \\
\int \frac{dy}{y} &= \int \frac{2x}{x^2-4}\,dx \\
\ln|y| &= \ln|x^2-4| + C_1 \\
|y| &= e^{\ln|x^2-4|+C_1} = e^{\ln|x^2-4|}e^{C_1} = e^{C_1}\cdot|x^2-4| \\
y &= \pm\, e^{C_1}(x^2-4), \quad C := \pm\, e^{C_1} \\
y &= C(x^2-4) \qquad \textit{allgemeine Lösung}
\end{aligned}$$

Durch den Punkt $P_0(2,0)$ verlaufen mehr als eine Lösung! (?)
Durch $P_1(2,1)$ verläuft überhaupt keine Lösung! (?)
Das kollidiert <u>nicht</u> mit dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz, denn bei

$$y' = \frac{2xy}{x^2-4} = f(x,y)$$

ist die Funktion f in allen Punkten $P(2,y_0)$ unstetig!
($x_0 = 2$ ist Polstelle)



y
$y = C(x^2 - 4)$
$C = \frac{1}{2}$
$C = 1$
2
$C = \frac{1}{4}$
$C = \frac{1}{8}$
-2
2
$C = 0$
x
$P(0, -\frac{1}{2})$

Beispiel 4: Radioaktiver Zerfall

Radioaktivität: Eigenschaft gewisser Atomkerne (Isotope, "radioaktive Elemente"), ohne äußere Einwirkung zu zerfallen unter Abgabe von

- α-Strahlung (Teilchenstrahlung, Heliumkerne, ${}^4_2He$)
- β-Strahlung (Teilchenstrahlung, Elektronen)
- γ-Strahlung (kurzwellige elektromagnetische Wellen)

(Ein bestimmtes zerfallendes Element sendet entweder nur α-Teilchen oder nur β-Teilchen aus, zu denen γ-Strahlen hinzukommen können.)

Historisch:

Henry Becquerel (1852 - 1908):
entdeckt natürliche Radioaktivität (1896):
Pechblende (Uranerz) schwärzt photographische Platte

Marie Curie (1867 - 1934):
erkannte Radioaktivität des Thoriums und entdeckte zusammen mit Pierre Curie (1859 - 1906) die radioaktiven Elemente Radium und Polonium (1898); isolierte Radium und Polonium aus der Pechblende (1902) (- Auf ein Radiumatom kommen in der Pechblende $3 \cdot 10^6$ Uranatome! -)
1903 Nobelpreis für Physik (mit P. Curie und H. Becquerel)
1911 Nobelpreis für Chemie

Ernest Rutherford (1871 - 1937):

erkennt, dass Radioaktivität auf dem spontanen Zerfall (spontane Umbildung) der Atomkerne der radioaktiven Elemente beruht (1903)

1908 Nobelpreis

Bezeichnung:

$^{A}_{Z}\mathcal{X}$ $\sim$ ein Atom des Elementes $\mathcal{X}$ mit Z Protonen und N Neutronen; genannt: Nuklid

Z $=$ Protonenanzahl; $=$ Kernladungszahl

$=$ "Ordnungszahl" (im Periodensystem)

A $=$ $Z + N =$ Nukleonenzahl, $=$ Massenzahl

$m_N = 1,6750 \cdot 10^{-24} g$ Masse des Neutron

$m_P = 1,6726 \cdot 10^{-24} g$ Masse des Proton

(also $m_N \approx m_p$)

Bei gleichem $\mathcal{X}$ kann N unterschiedliche Werte annehmen ("Isotope").

Beispiel: $^{228}_{88}Ra$, $^{226}_{88}Ra$ (Radium-Isotope, verschiedene Nuklide des Radiums)

$^{14}_{6}C$, $^{12}_{6}C$

Zerfallsreihe $\sim$ Folge von radioaktiven Isotopen, die durch sukzessiven radioaktiven Zerfall auseinander hervorgehen; Beginn bei einem **Mutternuklid**, Ende bei einem nichtradioaktiven, stabilen Nuklid.

In der Natur gibt es drei Zerfallsreihen:

Uranreihe	$^{238}_{92}U$	$\longrightarrow$	$^{206}_{82}Pb$
Thoriumreihe	$^{232}_{90}Th$	$\longrightarrow$	$^{208}_{82}Pb$
Actiniumreihe	$^{235}_{92}U$	$\longrightarrow$	$^{207}_{82}Pb$

Zerfallsgesetz (Elster, Geitel, 1899):

Die Zerfallsgeschwindigkeit ist proportional zur jeweilig vorhandenen unzerfallenen Substanzmenge.

$y = y(t) \sim$ unzerfallene Substanzmenge zur Zeit t

$$-\frac{dy}{dt} \sim y(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = -\lambda y(t)$$

$\lambda > 0$ Zerfallskonstante
$y(t_0) = y_0 =$ Anzahl der z. Zt. t_0 vorhandenen Kerne

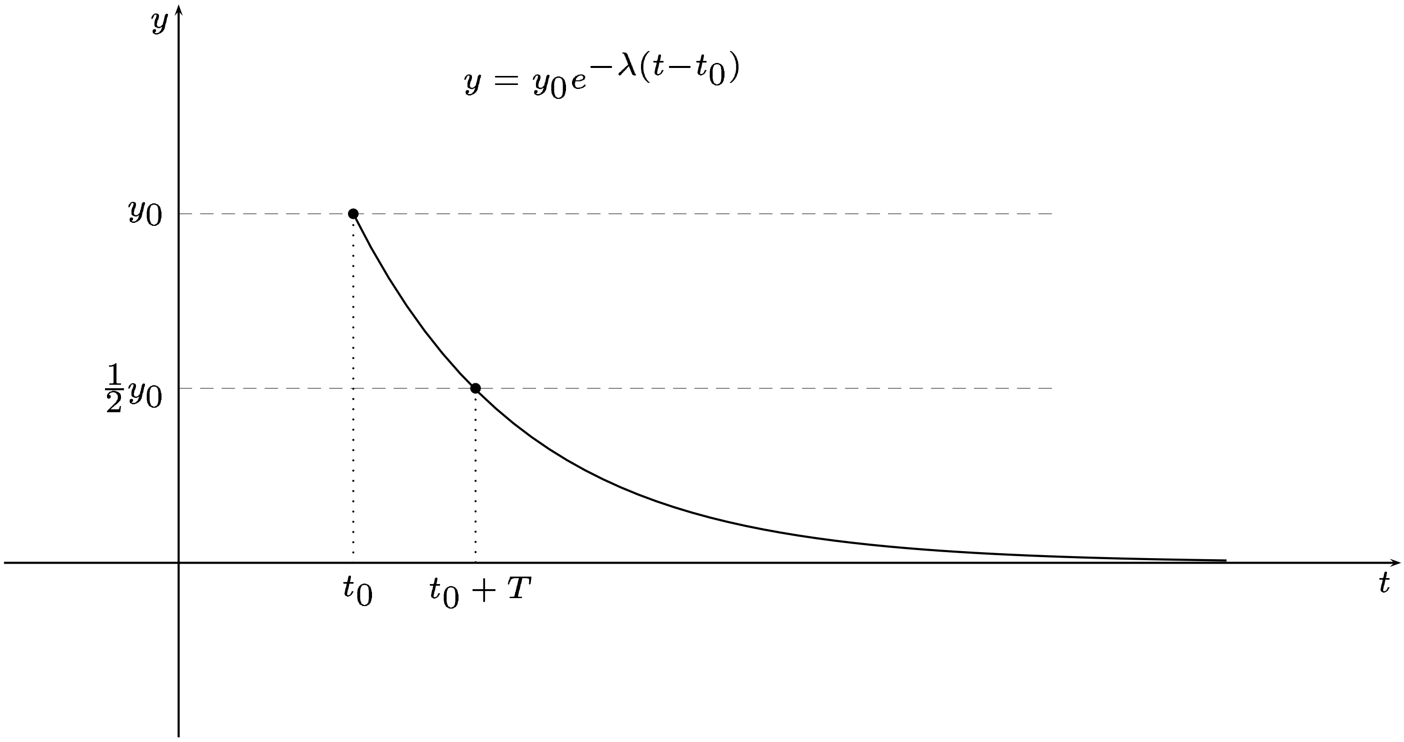
$\nearrow$

Dieses Zerfallsgesetz gilt für beliebige Grundgesamtheiten y_0!!

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{y} = -\lambda \int_{t_0}^{t} dt$$

$$\ln|y| - \ln|y_0| = -\lambda(t - t_0) \quad y, y_0 > 0$$

$$\boxed{y = y_0 e^{-\lambda(t-t_0)} \qquad \textit{Lösung des AWP}}$$



Halbwertzeit T = Zeit, in der die Hälfte der anfangs vorhandenen Menge y_0 zerfallen ist.

$$t = t_0 + T \Rightarrow \frac{y_0}{2} = y_0 e^{-\lambda T} \Rightarrow e^{\lambda T} = 2$$

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,6931}{\lambda}$$

T ist unabhängig von der Anfangsmenge y_0!

Konkrete Halbwertzeiten:

${}^{14}_{6}C$	$\sim$	5730 Jahre	[${}^{14}_{6}C \to {}^{14}_{7}N + \beta$-Strahlung]
${}^{226}_{88}Ra$	$\sim$	1590 Jahre	
${}^{238}_{92}U$	$\sim$	$4,51 \cdot 10^9$ Jahre	
${}^{212}_{84}Po$	$\sim$	$2 \cdot 10^{-7}$ Sekunden	
${}^{3}H$	$\sim$	$12,3$ Jahre	[${}^{3}H \to {}^{3}He + \beta$-Strahlung]

11.2.3 Auf trennbare Veränderliche zurückführbare DGL

(A) **Ähnlichkeits-DGL**
("DGL mit homogenen Veränderlichen")

Typ: $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

Subst.: $\frac{y(x)}{x} = z(x)$

$$\begin{array}{rcl} y &=& x \cdot z \\ y' &=& z + xz' \quad \text{Produktregel} \end{array}$$

DGL $\Rightarrow$

$$\begin{array}{rcl} z + xz' &=& f(z) \quad \sim \quad \text{trennbar!} \\ \displaystyle\int \frac{dz}{f(z) - z} &=& \displaystyle\int \frac{dx}{x} + C_1 = \ln|x| + C_1 \\ C \cdot e^{\int \frac{dz}{f(z)-z}} &=& x, \qquad \pm e^{C_1} =: \dfrac{1}{C} \end{array}$$

hieraus z eliminieren $\quad\rightarrow\quad z = \varphi(x, C)$

Rücksubst.: $y = z \cdot x$, $\quad \underline{\underline{y = x \cdot \varphi(x, C)}}$ allg. Lösung,

Anmerkung:
Die Isoklinen der Ähnlichkeits-DGL sind Geraden durch den Ursprung:

$$y' = K = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad \rightarrow \quad \frac{y}{x} = \Psi(K) \quad \Psi \sim \text{ Umkehrfkt. zu } f$$

$$\underline{\underline{y = \Psi(K) \cdot x}}$$

Isoklinenschar

Beispiel 1: $y' = \dfrac{y^2 - x^2}{2xy} = \dfrac{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}{2\,\frac{y}{x}}$

Subst.: $\dfrac{y}{x} = z,\ y = z \cdot x$
$y' = z'x + z$

DGL $\Rightarrow$ $z'x + z = \dfrac{z^2 - 1}{2z}$

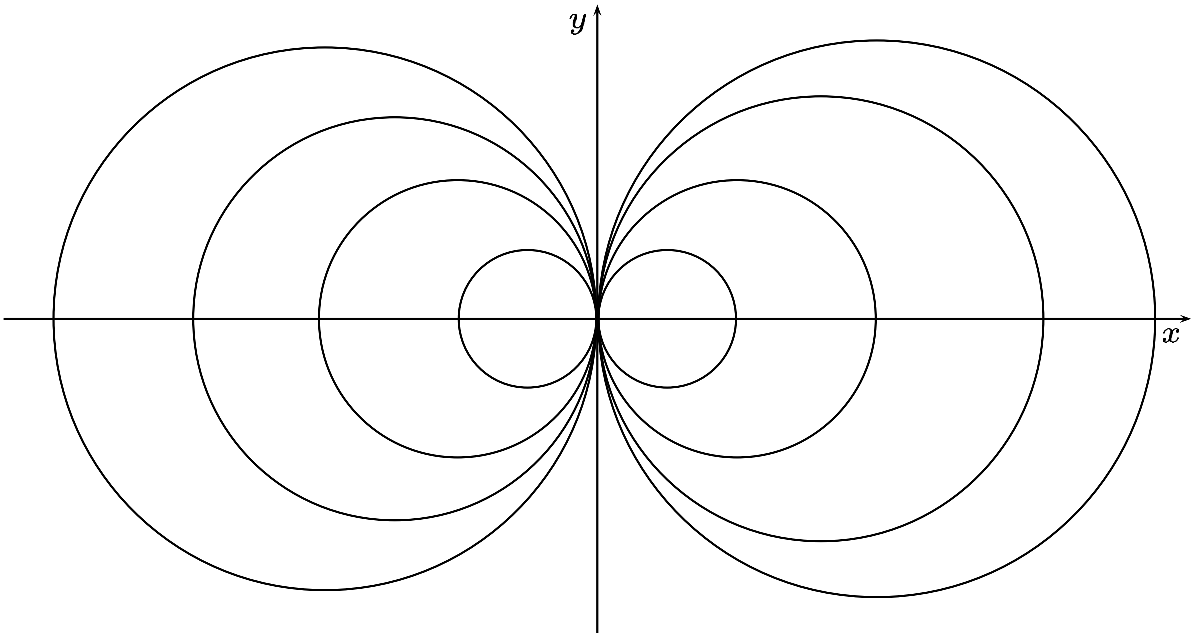
$$\begin{aligned}
x\,\frac{dz}{dx} &= \frac{z^2-1}{2z} - z = \frac{z^2 - 1 - 2z^2}{2z} \\
x\,\frac{dz}{dx} &= -\frac{z^2+1}{2z} \\
\int \frac{2z\,dz}{z^2+1} &= -\int \frac{dx}{x} + C_1 \\
\ln(z^2+1) &= -\ln|x| + C_1 \\
z^2 + 1 &= e^{-\ln|x|}e^{C_1} = e^{C_1} \cdot \frac{1}{|x|} \\
z^2 + 1 &= \pm\, e^{C_1} \cdot \frac{1}{x} = \frac{C}{x}, \quad C = \pm\, e^{C_1}
\end{aligned}$$

Rücksubst.:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1 &= \frac{C}{x} \\
x^2 + y^2 &= Cx \quad \text{allgemeine Lösung}
\end{aligned}$$

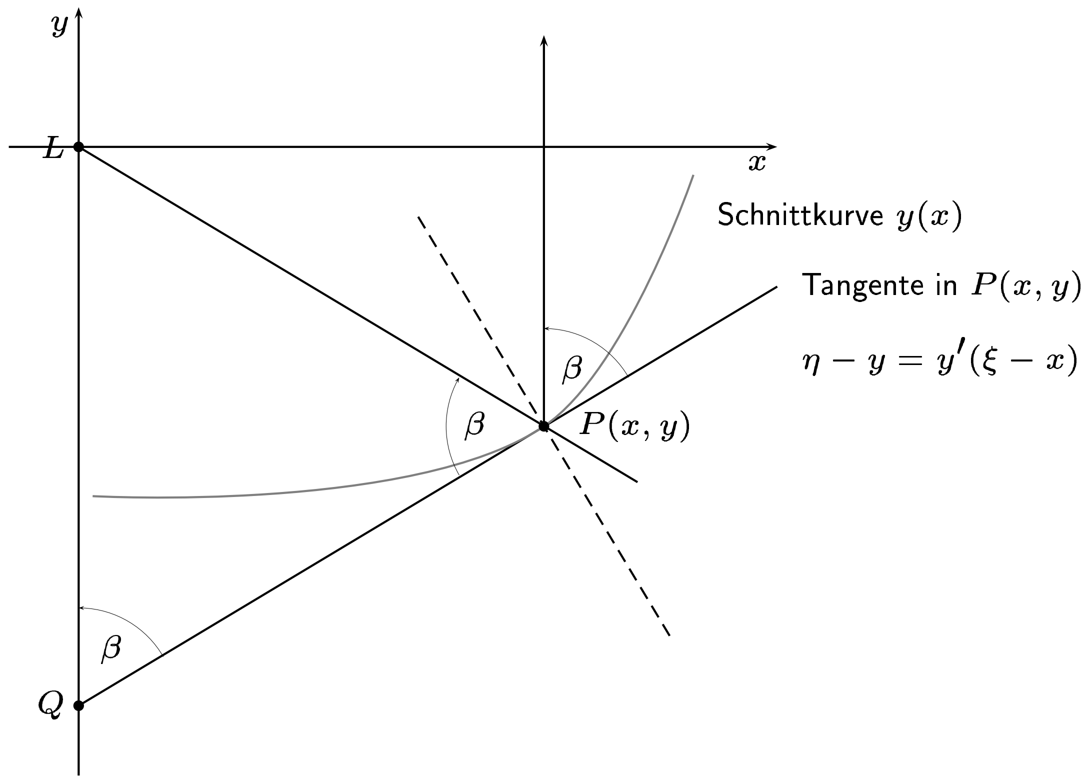
oder $\left(x - \dfrac{C}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\dfrac{C}{2}\right)^2, \qquad \dfrac{C}{2} = r$

$$\left(x - \frac{C}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{C}{2}\right)^2 \qquad \frac{C}{2} = r$$



Beispiel 2:

Gesucht ist die Form eines rotationssymmetrischen Spiegels, der alle Strahlen, die von einem auf der Rotationsachse vorgegebenen Lichtpunkt ausgehen, parallel zur Rotationsachse reflektiert.



Reflektionswinkel (β) $\to \triangle QLP$ gleichschenklig

$$\begin{aligned} LQ &= LP \\ -\eta_0 &= \sqrt{x^2+y^2} \qquad \eta_0 = \eta|_{\xi=0} = y - xy' \\ \Rightarrow \quad xy' - y &= \sqrt{x^2+y^2} \\ y' &= \frac{y}{x} + \sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}} \quad \text{DGL} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{y}{x} = z \to z'x &= \sqrt{1+z^2} \\ \int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} &= \int \frac{dx}{x} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(\text{arsinh}\, z =)\ \ln(z + \sqrt{1+z^2}) &= \ln|x| + C_1 \\
z + \sqrt{1+z^2} &= Kx \\
y + \sqrt{x^2+y^2} &= Kx^2 \\
x^2 + y^2 &= (Kx^2 - y)^2 \\
x^2 + y^2 &= K^2x^4 - 2Kx^2y + y^2
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{y = \frac{K^2x^2 - 1}{2K} = \frac{x^2 - C^2}{2C}} \qquad \left(C = \frac{1}{K}\right)
$$

allgemeine Lösung (Parabeln)

Ergänzung:

Der Lichtpunkt L ist Brennpunkt aller dieser Parabeln: Ist $P(x, \dfrac{x^2 - C^2}{2C})$ ein Parabelpunkt, so gilt $LP = PF$ ("Brennstrahl = Leitstrahl"), wobei $F(x, \dfrac{x^2 - C^2}{2C} + C)$ der Fußpunkt des Lotes von P auf die Gerade ("Leitlinie") $y = -C$ ist.

(B) Typ: $\quad y' = f(ax + by + c), \quad b \neq 0$

Subst.:

$$\begin{aligned} u(x) :&= ax + by(x) + c \\ y &= \frac{1}{b}(u - ax - c) \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{b}\left(\frac{du}{dx} - a\right) \end{aligned}$$

$DGL \quad \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \frac{1}{b}\left(\frac{du}{dx} - a\right) &= f(u) \\ \frac{du}{dx} &= b \cdot f(u) + a \qquad \text{trennbar!} \\ &\Downarrow \\ u &= \varphi(x, C) \quad \text{allgemeine Lösung} \end{aligned}$$

Rücksubstitution:

$$y = \frac{1}{b}(u - ax - c)$$

$$\boxed{y = \frac{1}{b}(\varphi(x, C) - ax - C)}$$

allgemeine Lösung der Ausgangs-DGL

Beispiel: $y' = (x+y-1)^2, \quad AWP \qquad y(0) = 1$

Subst.: $u = x+y-1 \quad \to y = u - x + 1 \quad y' = u' - 1$

DGL $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
u' - 1 &= u^2 \\
\frac{du}{dx} &= 1 + u^2 \\
\int \frac{du}{1+u^2} &= \int dx + C \\
\text{arc}\tan u &= x + C \\
u &= \tan(x + C)
\end{aligned}$$

Rücksubst.:

$y = u - x + 1$

$\boxed{y = \tan(x+C) - x + 1}$ Allgemeine Lösung

AWP:

$1 = \tan(0 + C) - 0 + 1$

$\tan C = 0 \to C = \pm k\,\pi$

(alle diese Konstanten können genommen werden)

$\downarrow$

$y = \tan(x \pm k\,\pi) - x + 1$ (belanglos, da periodisch!)

$\Downarrow$

$\boxed{y = \tan x - x + 1}$ Lösung des AWP

(C) Typ: $\quad y' = f\left(\dfrac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)$

1. Fall

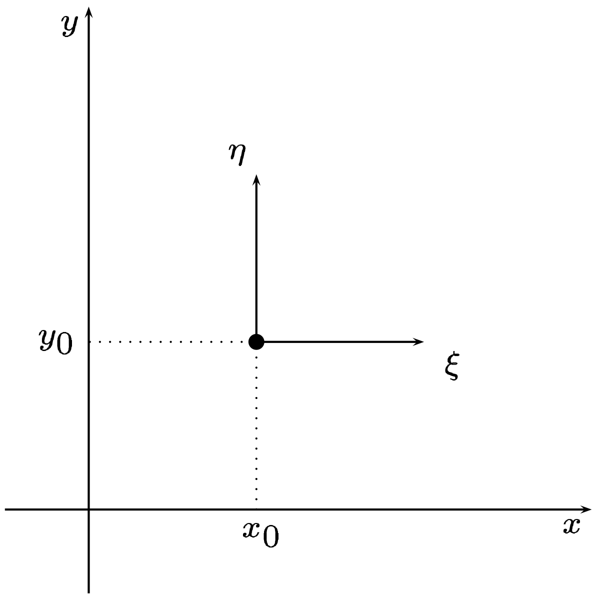
$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} \neq 0 \text{ d. h. die Geraden } \begin{cases} ax+by+c=0 \\ \alpha x+\beta y+\gamma=0 \end{cases}$$

besitzen Schnittpunkt x_0, y_0

Substitution

$x = x_0 + \xi$

$y = y_0 + \eta$



Lösung: $\quad y = y(x)$

$$y_0 + \eta = y(x_0+\xi) \Rightarrow \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{dy}{d\xi} = \frac{dy}{dx}\cdot\underbrace{\frac{dy}{d\xi}}_{1} = \frac{dy}{dx}$$

und

$$ax+by+c = a(x_0+\xi)+b(y_0+\eta)+c = a\xi+b\eta$$
$$\alpha x+\beta y+\gamma = \alpha(x_0+\xi)+\beta(y_0+\eta)+\gamma = \alpha\xi+\beta\eta$$

$$\text{DGL} \to \frac{dy}{dx} = \underbrace{\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a\xi + b\eta}{\alpha\xi + \beta\eta}\right) = f\left(\frac{a + b\,\frac{\eta}{\xi}}{\alpha + \beta\frac{\eta}{\xi}}\right)}_{\text{Ähnlichkeits-DGL}}$$

Substitution: $\frac{\eta}{\xi} = z(\xi)$ usw.

<u>2. Fall</u>

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = 0, \quad \text{dann gilt } (\alpha, \beta) = \lambda(a, b)$$

mit gewissem $\lambda \in \mathbb{R}$.

Subst.: $u = ax+by+c \to \dfrac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma} \equiv \dfrac{u}{\lambda u + \gamma - \lambda c}$

$$\frac{du}{dx} = a + b\frac{dy}{dx} \Longrightarrow \underbrace{\frac{du}{dx} = a + b\,f\left(\frac{u}{\lambda u + \gamma - \lambda c}\right)}_{\text{trennbar}}$$

Beispiel:
$$y' = \frac{x - 2y + 1}{2x - 4y - 1}$$
$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

Subst.: $u = x - 2y + 1, \quad \dfrac{du}{dx} = 1 - 2\dfrac{dy}{dx}$

$$\Downarrow$$

$$y' = \frac{x - 2y + 1}{2x - 4y - 1} = \frac{x - 2y + 1}{2(x - 2y + 1) - 3} = \frac{u}{2u - 3}$$

$$\frac{du}{dx} = 1 - 2\left[\frac{u}{2u-3}\right] = \frac{2u-3-2u}{2u-3}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{-3}{2u-3}$$

$$\int (2u-3)\,du = -3\int dx$$

$$u^2 - 3u = -3x + C_1$$

$$(x-2y+1)^2 - 3(x-2y+1) = -3x + C_1$$

$$\underline{\underline{x^2 + 4y^2 - 4xy + 2x + 2y = C}} \qquad C = C_1 + 2$$

Anmerkung:
Die Lösungsschar besteht aus Parabeln, deren Scheitel sämtlich auf der Geraden $x - 2y - \frac{1}{5} = 0$ liegen; diese Gerade ist zugleich gemeinsame Achse aller dieser Parabeln.
Durch die Drehung

$$\binom{\xi}{\eta} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\binom{x}{y}$$

(Drehpunkt $\binom{0}{0}$, Drehwinkel $\arctan 2 = 63,435^\circ$)
wird die Lösungsschar überführt in die Schar

$$\eta = -\frac{5\sqrt{5}}{6}\left(\xi - \frac{1}{5\sqrt{5}}\right)^2 + K.$$

11.2.4 Lineare DGL 1. Ordnung

$y' + p(x)y = q(x)$ $\sim$ inhomogene DGL

$p(x), q(x)$ stetig in $a < x < b$

$y' + p(x)y = 0$ $\sim$ (zugehörige) homogene DGL

a) Lösung der homogenen DGL

$$\begin{aligned} y' + p(x)y &= 0 \\ \int \frac{dy}{y} &= -\int p(x)dx + K_1 \\ \ln|y| &= \dots \\ y &= \pm e^{K_1} e^{-\int p(x)dx} \\ y &= K e^{-\int p(x)dx} \end{aligned}$$

allgemeine Lösung der homogenen DGL

b) Lösung der inhomogenen DGL

"Variation der Konstanten"

Ansatz: $y = K(x)\underbrace{e^{-\int p(x)dx}}_{=:y_h} = K(x) \cdot y_h$

DGL $\rightarrow$ $K' y_h + \underbrace{K y_h' + p(x) \cdot K \cdot y_h}_{K\underbrace{(y_h' + p(x)y_h)}_{\equiv 0,}} = q(x)$

da y_h Lösung des hom. Gleichung

$$K' y_h = q(x) \quad K(x) = \int \frac{q(x)}{y_h} dx + C$$

$$\underline{\underline{K(x) = \int q(x) e^{+\int p(x)dx} dx + C}}$$

Allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung:

$$\boxed{y = \underbrace{Ce^{-\int p(x)dx}}_{\substack{\text{allg. Lösung} \\ \text{homogen}}} + \underbrace{e^{-\int p(x)dx} \cdot \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx}_{\substack{\text{spez. Lösung} \\ \text{inhomogen}}}}$$

Beispiel 1:

$$\begin{aligned} xy' - y &= x^2 \cos x \\ \text{bzw.} \quad y' - \frac{y}{x} &= x \cos x \end{aligned}$$

a) homogen:

$$y' - \frac{y}{x} = 0, \quad \begin{aligned} \int \frac{dy}{y} &= \int \frac{dx}{x} + C_1 \\ \ln|y| &= \ln|x| + C_1 \\ y &= \pm e^{C_1} x \\ y &= Kx \quad \text{allg. Lösung homogen} \end{aligned}$$

b) inhomogen:

$y = K(x) \cdot x$

$$\text{DGL} \to \quad \begin{aligned} K' \cdot x + K \cdot 1 - K &= x \cos x \\ K' &= \cos x \\ K(x) &= \sin x + C \end{aligned}$$

$$\boxed{y = Cx + x \sin x \quad \text{allg. Lösung der inhomogenen DGL}}$$

Beispiel 2:

$$\begin{aligned} xy' + y &= x^2 + 3x + 2 \\ y' + \frac{1}{x}y &= x + 3 + \frac{2}{x} \end{aligned}$$

homogen: $y' + \frac{1}{x}y = 0$

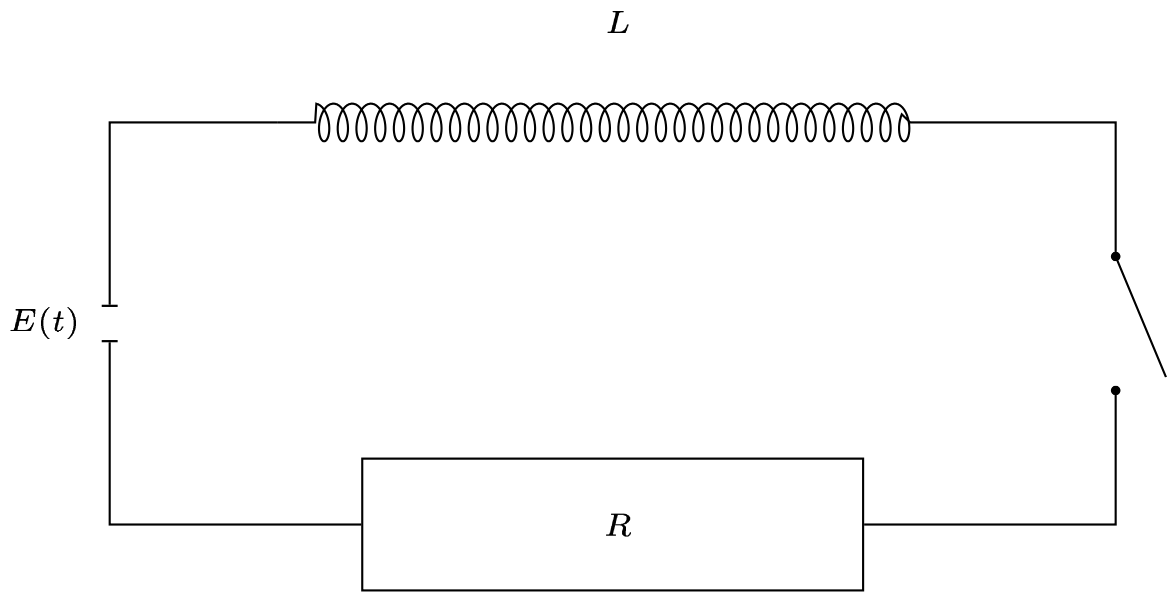
$$\begin{aligned} y' &= -\frac{y}{x} \\ \int \frac{dy}{y} &= -\int \frac{dx}{x} + C_1 \\ \ln|y| &= -\ln|x| + C_1 \\ y &= \frac{C}{x} \end{aligned}$$

inhomogen: $y = \frac{C(x)}{x} \quad y' = \frac{C'(x) \cdot x - C(x)}{x^2}$

$$\begin{aligned} \frac{x \cdot C'(x) - C(x)}{x^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{C(x)}{x} &= x + 3 + \frac{2}{x} \\ \frac{C'(x)}{x} &= x + 3 + \frac{2}{x} \\ C'(x) &= x^2 + 3x + 2 \\ C &= \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + 2x + K \end{aligned}$$

$$\boxed{y = \frac{K}{x} + \frac{x^2}{3} + \frac{3}{2}x + 2 \qquad \text{Allg. Lösung der inhomogenen DGL}}$$

Beispiel 3:
Einschaltvorgang



$I(t) \sim$ fließender Strom z. Zt. t

$I(0) = 0$

$E(t) \sim$ Spannung

$R \sim$ Ohmscher Widerstand

$L \sim$ Induktionskoeffizient

DGL:

$$\begin{aligned} L \cdot \frac{dI}{dt} + R \cdot I &= E(t) \\ \frac{dI}{dt} + \underbrace{\frac{R}{L}}_{p(t)} I &= \underbrace{\frac{E(t)}{L}}_{q(t)} \end{aligned}$$

a) homogen

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = 0 \rightarrow \int \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} \int dt$$

$$\underline{\underline{I = Ce^{-\frac{R}{L}t}}}$$

allgemeine Lösung homogen

b) inhomogen
Variation der Konstanten

$$\begin{aligned} I &= C(t)e^{-\frac{R}{L}t} \\ \dot{C}e^{-\frac{R}{L}t} + C\left(-\frac{R}{L}e^{-\frac{R}{L}t}\right) &+ \frac{R}{L} \cdot Ce^{-\frac{R}{L}t} = \frac{E(t)}{L} \\ \dot{C}e^{-\frac{R}{L}t} &= \frac{E(t)}{L} \\ \dot{C} &= \frac{1}{L}E(t)e^{\frac{R}{L}t} \\ C &= \frac{1}{L}\int E(t)e^{\frac{R}{L}t}dt + K \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{I(t) = Ke^{-\frac{R}{L}t} + \frac{1}{L}e^{-\frac{R}{L}t}\int E(t)e^{\frac{R}{L}t}dt}}$$

allgemeine Lösung inhomogen

<u>1. Fall:</u> $E(t) = E = \text{const.}$ (Gleichspannung)

Aus der allgemeinen Lösung ergibt sich:

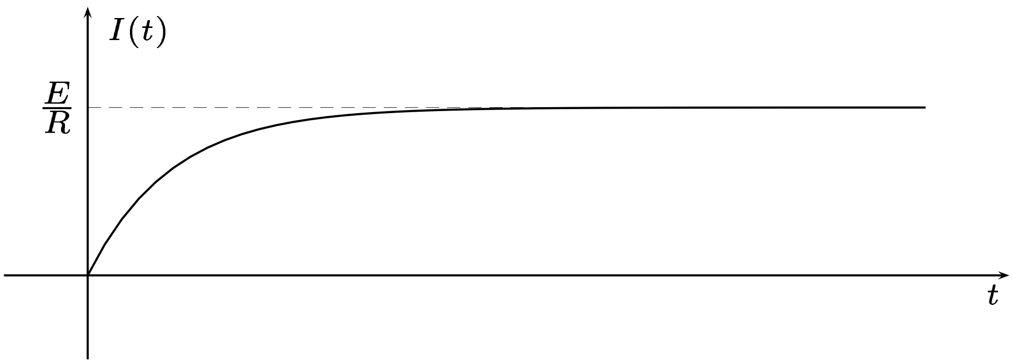
$$\int E(t) e^{\frac{R}{L}t} dt = E\,\frac{e^{\frac{R}{L}t}}{R} \cdot L$$

folglich

$$\begin{aligned} I(t) &= Ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{1}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \int E(t) e^{\frac{R}{L}t} dt \\ I(t) &= Ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R} \end{aligned}$$

$$I(0) = 0 \to 0 = C + \frac{E}{R} \to C = -\frac{E}{R}$$

$$\underline{\underline{I(t) = \frac{E}{R}\,(1 - e^{-\frac{R}{L}t})}}$$



für $t \gg 1 \to I(t) \approx \dfrac{E}{R}$

($\widehat{=}$ Ohmsches Gesetz, Einfluß der Spule klingt für wachsende t exponentiell ab)

2. Fall: $E(t) = U_0 \sin wt$ (Wechselspannung)

Gemäß $I(t) = \underbrace{Ce^{-\frac{R}{L}t}}_{\text{allg. homog. Lösg.}} + \underbrace{\frac{e^{-\frac{R}{L}t}}{L}\int E(t)e^{\frac{R}{L}t}dt}_{\text{spez. inhomog. Lösg.}}$

ist für $E(t) = U_0 \sin wt$ zu lösen:

$$W := \int e^{\frac{R}{L}t} \sin wt\, dt$$

integrierbar durch zweimalige partielle Integration.

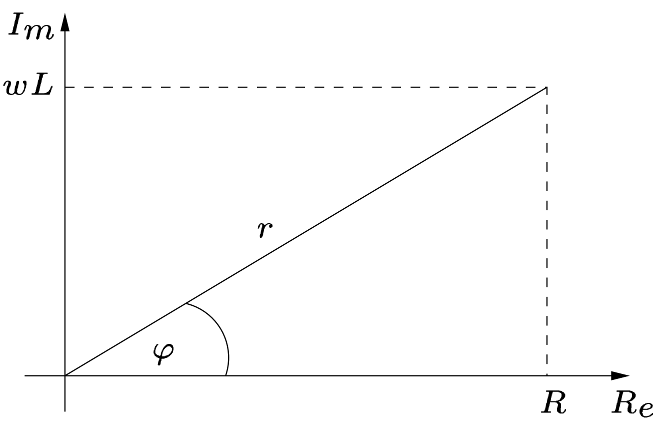
kürzer: $e^{\frac{R}{L}t}\sin wt = Im\left(e^{\left(\frac{R}{L}+iw\right)t}\right)$ Imaginärteil

$$\int e^{\left(\frac{R}{L}+iw\right)t}dt$$

$$= \frac{1}{\frac{R}{L}+iw}\, e^{\left(\frac{R}{L}+iw\right)t} = \frac{L}{R+iwL}\, e^{\left(\frac{R}{L}+iw\right)t}$$

$$= \frac{L}{re^{i\varphi}}\, e^{\left(\frac{R}{L}+iw\right)t} \text{ mit } r = \sqrt{R^2+w^2L^2}, \quad \tan\varphi = \frac{wL}{R}$$

$$= \frac{L}{r}\, e^{\frac{R}{L}t} e^{i(wt-\varphi)}$$



$$\rightarrow \underline{\underline{W = \frac{L}{r}\, e^{\frac{R}{L}t}\sin(wt-\varphi)}}$$

damit ergibt sich aus der allgemeinen Lösung:

$$I(t) = Ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U_0}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \cdot \frac{L}{\sqrt{R^2 + w^2L^2}} e^{\frac{R}{L}t} \sin(wt - \varphi)$$

$$\underline{\underline{I(t) = Ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + w^2L^2}} \sin(wt - \varphi)}}$$

Anfangswertproblem:

$$I(0) = 0 \rightarrow \qquad C + \frac{U_0 \sin(-\varphi)}{\sqrt{R^2 + w^2L^2}} = 0$$

$$\underline{\underline{C = \frac{U_0 \sin\varphi}{\sqrt{R^2 + w^2L^2}} = \frac{U_0wL}{R^2 + w^2L^2}}}$$

$$\left(\text{wegen } \sin\varphi = \frac{wL}{\sqrt{R^2 + w^2L^2}}\right)$$

endgültige Lösung des Einschaltvorgangs:

$$\underline{\underline{I(t) = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + w^2L^2}} \left[e^{-\frac{R}{L}t} \sin\varphi + \sin(wt - \varphi)\right]}}$$

abklingender Anteil: $\quad I_a = \dfrac{U_0}{\sqrt{R^2 + w^2 L^2}}\, e^{-\frac{R}{L}\,t} \sin\varphi$

stationärer Anteil:

$$I_s = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + w^2 L^2}} \sin(wt - \varphi)$$

$$\Downarrow$$

Ist wieder ein rein sinusförmiger Wechselstrom mit gleicher Kreisfrequenz w wie die angelegte Wechselspannung, der jedoch in seinem Schwingungsverlauf um den "Phasenwinkel" φ gegenüber der Spannung verschoben ist.

$\sqrt{R^2 + w^2 L^2} \quad \sim \quad$ "Scheinwiderstand"
$wL \quad \sim \quad$ "Blindwiderstand" $\quad$ des Stromkreises

speziell:

$L \to 0 \Rightarrow \varphi \to 0 \Rightarrow$ stationärer Anteil strebt gegen

$$I_s \to \frac{U_0 \sin wt}{\sqrt{R^2}} = \frac{U}{R} \text{ (Ohm!)}$$

11.2.5 Bernoullische DGL

$y' + p(x)y = q(x) \cdot y^\alpha, \alpha \neq 1, \alpha \in \mathbb{R}$ nichtlin. DGL

$$\frac{y'}{y} + p(x)\, y^{1-\alpha} = q(x)$$

Subst.:
$$\begin{aligned} z &= y^{1-\alpha} \\ z' &= (1-\alpha) y^{-\alpha} \cdot y' \\ \frac{z'}{1-\alpha} &= \frac{y'}{y^\alpha} \end{aligned}$$

$$\frac{z'}{1-\alpha} + p(x) \cdot z = q(x)$$

$$\boxed{z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x)}$$
lineare DGL 1.O. für $z(x)$

Beispiel:

$$y' + \frac{y}{x} = x^2 y^2 \quad | : y^2$$

$\dfrac{y'}{y^2} + \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{y} = x^2$ Subst.: $z = \dfrac{1}{y},\ z' = -\dfrac{1}{y^2} \cdot y'$

$-z' + \dfrac{1}{x} z = x^2$ lineare DGL für z

(a) hom.: $-z'+\dfrac{z}{x}=0,$
$$\begin{aligned}\int\frac{dz}{z} &= \int\frac{dx}{x}+C_1\\ \ln|z| &= \ln|x|+C_1\\ z &= Cx \quad \text{allg. Lösung hom.}\end{aligned}$$

(b) inhom.:
Variation der Konst.

$z=C(x)\cdot x,\ z'=C'x+C$

$$\begin{aligned}\text{DGL}\rightarrow\qquad -(C'x+C)+C &= x^2\\ C' &= -x,\ C=-\frac{x^2}{2}\end{aligned}$$

$$\underline{\underline{z=-\frac{x^3}{2}}}\quad \text{spez. Lösung inhom.}$$

$$z=Cx-\frac{x^3}{2}\quad \text{allg. Lösung der DGL für } z$$

Rücksubstitution

$$\underline{\underline{y=\frac{1}{z}=\frac{1}{Cx-\frac{x^3}{2}}=\frac{2}{Kx-x^3}}},\qquad K=2C$$

allgemeine Lösung der Ausgangs-DGL

11.3 Gewöhnliche Differentialgleichungen 2. Ordnung, elementar lösbare Fälle

$$\begin{aligned} F(x, y, y', y'') &= 0 && \text{implizite DGL 2.0.} \\ y'' &= f(x, y, y') && \text{explizite DGL 2.0.} \end{aligned}$$

Regel 1:
Kommt in der DGL $y'' = f(x, y, y')$ nur eine der Größen x, y, y' vor, so lässt sie sich integrieren.

1. Fall

$$\begin{aligned} y'' &= f(x) \\ y' &= \int f(x)\,dx + C_1 = F(x) + C_1,\ F \text{ Stammfkt. zu } f \\ y &= \int F(x)\,dx + C_1 x + C_2 \quad \text{allg. Lösung} \end{aligned}$$

2. Fall $\quad y'' = f(y) \qquad$ man multipliziere mit y'

$$\begin{aligned} y'y'' &= y'f(y) \qquad\qquad \frac{d}{dx}\left[y'\right]^2 = 2y'y'' \\ \frac{1}{2}(y'^2)' &= y'f(y) \\ y'^2 &= 2\int f(y)y'\,dx + C_1 \end{aligned}$$

Subst. mit der (noch unbekannten) Lösungsfkt. $y(x) = y,\ y'(x)dx = dy$

$$\begin{aligned} &= 2\int f(y)\,dy + C_1 \\ &= 2F(y) + C_1, \quad F \text{ Stammfkt. zu } f \\ y' &= \pm\sqrt{2F(y) + C_1} \end{aligned}$$

zwei DGL 1.O., Trennung der Veränderlichen

$$\pm\int \frac{dy}{\sqrt{2F(y)+C_1}} = x + C_2 \qquad \text{allgemeine Lösung}$$

3. Fall $\quad y'' = f(y') \qquad$ Subst.: $y' = z$

$z' = f(z)$ DGL 1.O. für z, $\displaystyle\int \frac{dz}{f(z)} = \int dx + C_1$

$$\underline{\underline{F(z) = x + C_1}} \qquad F \sim \text{Stammfunktion zu } \frac{1}{f}$$

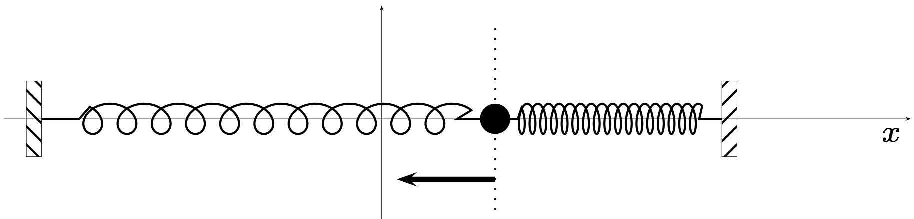
z eliminieren $\qquad \Rightarrow z = \varphi(x, C_1)$

Rücksubst. $\rightarrow y' = \varphi \Rightarrow \underline{\underline{y = \int \varphi(x, C_1)dx + C_2}}$

allgemeine Lösung

Beispiel 1: [zu $y'' = f(y)$]:

Ungedämpfte harmonische Schwingung



$F = -\alpha x$
$m \sim$ Masse
$\alpha \sim$ Federkonstante

Rücktreibende Kraft $F = m\ddot{x} = -\alpha x$
Multiplikation mit $\dot{x}$ ergibt:

$$\begin{aligned}
m\dot{x}\ddot{x} &= -\alpha x\dot{x} \\
\frac{m}{2}\frac{d}{dt}\left(\dot{x}^2\right) &= -\alpha x\dot{x} \\
\frac{m}{2}\dot{x}^2 &= \int -\alpha x\dot{x}dt \\
&= -\alpha\frac{x^2}{2} + C_1
\end{aligned}$$

$$\text{Subst.:} \quad \begin{aligned} x &= x(t) \\ dx &= \dot{x}\,dt \end{aligned}$$

$$\underbrace{\frac{m}{2}\dot{x}^2}_{Kinetische\ Energie} + \underbrace{\alpha\frac{x^2}{2}}_{Potentielle\ Energie} = C_1 \qquad [\text{Energiesatz,} \quad C_1 \geq 0]$$

Potentielle Energie = Arbeit, die <u>gegen</u> die Feldkräfte geleistet werden muss,
$$= -\int F(x)dx = -\int -\alpha x\,dx = \alpha\,\frac{x^2}{2}$$

Weiter mittels Trennung der Veränderlichen:

$$\dot{x}^2 = \frac{2C_1}{m} - \frac{\alpha}{m}x^2 = \frac{2C_1}{m}\left(1 - \frac{\alpha}{2C_1}x^2\right)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{\alpha}{2C_1}x^2}} = \pm\sqrt{\frac{2C_1}{m}}\int dt + C_2$$

Subst.: $\sqrt{\frac{\alpha}{2C_1}}x = u,\; dx = \sqrt{\frac{2C_1}{\alpha}}du$

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{2C_1}{\alpha}}\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} &= \pm\sqrt{\frac{2C_1}{m}}t + C_2 \\
\arcsin u &= \pm\underbrace{\sqrt{\frac{\alpha}{m}}}_{=:w}t + \sqrt{\frac{\alpha}{2C_1}}\cdot C_2 \\
&= \pm\left(wt \underbrace{\pm\sqrt{\frac{\alpha}{2C_1}}C_2}_{=:\varphi}\right) \\
u = \sqrt{\frac{\alpha}{2C_1}}x &= \sin(\pm[wt+\varphi]) = \pm\sin(wt+\varphi) \\
x &= \underbrace{\pm\sqrt{\frac{2C_1}{\alpha}}}_{=:A}\sin(wt+\varphi)
\end{aligned}$$

$\underline{\underline{x(t) = A\sin(wt+\varphi)}}$ Allgemeine Lösung

$A, \varphi \sim$ beliebig wählbar, $\quad w = \sqrt{\frac{\alpha}{m}}$ "Kreisfrequenz"

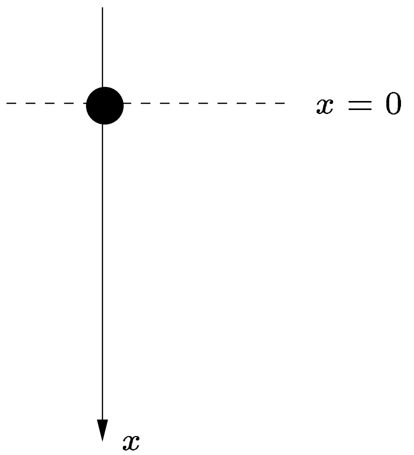
Beispiel 2: (zu $y'' = f(y')$):

Freier Fall mit Luftwiderstand:

Experimentelle Beobachtung:
Ein Körper der Masse m erfährt beim freien Fall infolge des Luftwiderstandes eine Verzögerung (= negative Beschleunigung), die proportional ist zum Quadrat der Fallgeschwindigkeit und zu $1/m$.

$$\Downarrow$$

$$\ddot{x}(t) = g - \frac{r}{m}\,\dot{x}^2(t)$$



$r \sim$ Proportionalitätsfaktor
$g = 9,80665 m/s^2$ Erdbeschleunigung
$x(t) \sim$ Fallstrecke zur Zeit t

AWP: $x(0) = \dot{x}(0) = 0$

Substitution: $\dot{x}(t) = z(t)$

$$\dot{z} = \frac{dz}{dt} = g - \frac{r}{m}\,z^2$$

$$\frac{dz}{g - \frac{r}{m}\,z^2} = dt$$

$$\int \frac{dz}{1-\frac{r}{gm}\,z^2} = g\int dt,$$

Subst.:
$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{r}{gm}}z &= az =: u\\ dz &= \frac{1}{a}\,du\end{aligned}$$

Abkürzung: $\sqrt{\frac{r}{gm}} =: a$ (= const.)

$$\frac{1}{a}\int \frac{du}{1-u^2} = g\int dt$$

Man hat:

$$\begin{aligned}\int \frac{du}{1-u^2} &= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1+u}+\frac{1}{1-u}\right)\,du\\ &= \frac{1}{2}\left(\ln|1+u|-\ln|1-u|\right)\\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|\\ &= \text{artanh}\,u \quad \text{für} \quad |u|\le 1\end{aligned}$$

(Gemäß Koordinatenwahl gilt

$\ddot{x} = \dot{z} \geq 0,$ also

$$\begin{aligned}\dot{z} = g - \frac{r}{m}z^2 &\geq 0\\ z^2 &\leq \frac{gm}{r}\\ |z| &\leq \sqrt{\frac{gm}{r}},\end{aligned}$$

so dass $|u| = \left|\sqrt{\frac{r}{gm}}\,z\right| \leq 1)$

$$= \text{artanh}\,(az)$$

Als Lösung der DGL für z ergibt sich mithin

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a}\,\mathsf{artanh}\,(az) &= gt + C_0 \\
\mathsf{artanh}\,(az) &= agt + aC_0 \\
z &= \frac{1}{a}\,\tanh(agt + aC_0) \\
z = \dot{x} \to z(0) = \dot{x}(0) = 0 \Rightarrow 0 &= \frac{1}{a}\,\tanh\,(aC_0) \\
\Rightarrow C_0 &= 0
\end{aligned}$$

$$z = \dot{x} \quad \Rightarrow \qquad \boxed{\dot{x} = \frac{1}{a}\,\tanh\,(agt)}$$

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1}{a}\int \tanh\,(agt)\,dt \\
&= \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{ag}\,\ln\cosh\,(agt) + C_1
\end{aligned}$$

$$x(0) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{1}{a^2 g}\underbrace{\ln\underbrace{\cosh 0}_{1}}_{0} + C_1 \Rightarrow C_1 = 0$$

insgesamt:

$$x(t) = \frac{1}{a^2 g}\,\ln\cosh\,(agt), \qquad a^2 g = \frac{r}{gm}\cdot g = \frac{r}{m}$$

$$ag = \sqrt{\frac{r}{gm}\cdot g} = \sqrt{\frac{rg}{m}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x(t) = \dfrac{m}{r}\ln\cosh\left(\sqrt{\dfrac{rg}{m}}\,t\right) \qquad \text{Lösung des AWP} \\ \text{Weg-Zeit-Gesetz des freien Falls mit Luftwiderstand} \end{array}}$$

Für große t gilt näherungsweise:

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{a}\tanh\, agt = \frac{1}{a}\,\frac{e^{agt} - e^{-agt}}{e^{agt} + e^{-agt}} \approx \frac{1}{a}\cdot 1 = \sqrt{\frac{gm}{r}}$$

$\Rightarrow$ nach hinreichend langer Fallzeit ist die Fallgeschwindigkeit nahezu konstant (nähert sich asymptotisch von unten der konstanten Grenzgeschwindigkeit $\sqrt{\frac{gm}{r}}$ an)

$$\begin{aligned} x(t) = \frac{m}{r}\ln\left(\frac{e^{agt} + e^{-agt}}{2}\right) \quad &\approx \quad \frac{m}{r}\ln\frac{e^{agt}}{2} \quad \text{für } t \gg 1 \\ &= \quad \frac{m}{r}\,(agt - \ln 2) \\ &= \quad \frac{m}{r}\left(\sqrt{\frac{rg}{m}}\,t - \ln 2\right) \\ &= \quad \sqrt{\frac{mg}{r}}\,t - \frac{m}{r}\ln 2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) \approx \underbrace{\sqrt{\frac{gm}{r}}}_{Grenzgeschwindigkeit}\,t - \frac{m}{r}\ln 2 \quad \text{für} \quad t \gg 1}$$

Das allgemeine AWP
$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0$$

besitzt die Lösung

$$\boxed{x(t) = x_0 + \frac{m}{r}\,\ln\left[\cosh\left(\sqrt{\frac{rg}{m}}\,t\right) + \sqrt{\frac{r}{gm}}\,v_0 \sinh\left(\sqrt{\frac{rg}{m}}\,t\right)\right]}$$

Für $t \gg 1$ ergibt sich aus

$$\cosh\sqrt{\frac{rg}{m}}\,t \approx \frac{1}{2}e^{\sqrt{\frac{rg}{m}}\,t}, \quad \sinh\sqrt{\frac{rg}{m}}\,t \approx \frac{1}{2}e^{\sqrt{\frac{rg}{m}}\,t}$$

die Näherung:

$$\begin{aligned}
x(t) &\approx x_0 + \frac{m}{r}\,\ln\left[e^{\sqrt{\frac{rg}{m}}\,t}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{gm}}\,v_0\right)\right] \\
&= x_0 + \frac{m}{r}\sqrt{\frac{rg}{m}}\,t + \frac{m}{r}\,\ln\frac{1 + \sqrt{\frac{r}{gm}}\,v_0}{2} \\
x(t) &\approx x_0 + \underbrace{\sqrt{\frac{mg}{r}}}_{Grenzgeschwindigkeit}\,t + \frac{m}{r}\left(\ln\left(1 + \sqrt{\frac{r}{gm}}\,v_0\right) - \ln 2\right)
\end{aligned}$$

Beispiel 3: DGL der Kettenlinie (vgl. Vorlesung)

$$y'' = \lambda\sqrt{1 + y'^2}, \quad \lambda > 0$$

$y = \dfrac{1}{\lambda}\cosh(\lambda x + C_1) + C_2$ allgemeine Lösung

Regel 2
Kommt in der DGL $F(x, y, y', y'') = 0$ entweder x oder y nicht vor, so lässt sie sich durch die Subst. $y' = p$ auf eine DGL 1. Ordnung für p zurückführen.

(Wenn y' nicht vorkommt, kann nichts Allgemeines ausgesagt werden.)

1. Fall: $F(y, y', y'') = 0$

$$\begin{aligned} y' &= p \; (= p(y)) \\ y'' &= \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p \end{aligned}$$

$$\boxed{F\left(y, p(y), p \cdot \frac{dp}{dy}\right) = 0}$$ DGL 1.0. für $p(y)$

Beispiel 4: $yy'' = 1 + y'^2$

Subst.: $y' = p(y)$, $y'' = p \cdot p'(y)$

$$\begin{aligned} ypp' &= 1 + p^2 \quad \text{DGL 1.0. für } p \\ \frac{p}{1+p^2}\, dp &= \frac{dy}{y} \\ \int \frac{2p}{1+p^2}\, dp &= 2 \int \frac{dy}{y} \\ \ln(1+p^2) &= 2 \ln |y| + C_0 \\ &= \ln y^2 + C_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1+p^2 &= e^{\ln y^2 + C_0} \\
&= e^{\ln y^2} \cdot e^{C_0} \\
&= e^{C_0} y^2 \quad e^{C_0} =: \frac{1}{C^2} \\
1+p^2 &= \left(\frac{y}{C}\right)^2 \quad \text{Allgemeine Lösung der DGL für } p
\end{aligned}$$

$$\frac{dy}{dx} = p = \pm\sqrt{\left(\frac{y}{C}\right)^2 - 1}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{dy}{\pm\sqrt{\left(\frac{y}{C}\right)^2 - 1}} &= \int dx \qquad \text{Subst.: } \frac{y}{C} = t \\
\pm C \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} &= \int dx \\
\pm C \operatorname{arcosh} t &= x + K \qquad \text{(siehe unten, Erinnerung)} \\
t &= \cosh\left(\frac{x+K}{\pm C}\right) \\
\frac{y}{C} &= \cosh\frac{x+K}{C} \\
y &= C\cosh\frac{x+K}{C} \quad \text{allgemeine Lösung der Ausgangs-DGL}
\end{aligned}$$

Erinnerung:

$$I = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} \quad \text{Subst.: } z = \text{ arcosh } t$$

$$\begin{aligned} \cosh z &= t \\ \sinh z\, dz &= dt \end{aligned}$$

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$$

$$\begin{aligned} \sinh^2 z &= \cosh^2 z - 1 \\ &= t^2 - 1 \end{aligned}$$

$$I = \int \frac{\sinh z \cdot dz}{|\underbrace{\sinh z}_{\geq 0, \text{ da } z = \text{arcosh } t \geq 0 \quad \text{(Hauptwert!)}}|} = \int dz = z + C$$

also

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} &&= \text{arcosh } t + C \\ & &&[= \ln(t + \sqrt{t^2-1}) + C] \end{aligned}$$

Beispiel 5: $yy'' - y'^2 = 0$ Typ $F(y, y', y'') = 0$

Subst.: $y' = p(y)$: $y'' = \dfrac{dp}{dx} = \dfrac{dp}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dp}{dy} \cdot y' = \dfrac{dp}{dy} \cdot p$

$$y \cdot \frac{dp}{dy} p - p^2 = 0$$

Fall (a): $p = 0$, d. h. $y' \equiv 0 \to y = const.$ ist Lösung

Fall (b): $p \neq 0$

$$\begin{aligned}
p\left[y\frac{dp}{dy} - p\right] &= 0 \\
y\frac{dp}{dy} - p &= 0 \\
\int \frac{dp}{p} &= \int \frac{dy}{y} + C_0 \\
\ln|p| &= \ln|y| + C_0 \\
|p| &= e^{C_0} e^{\ln|y|} = e^{C_0}|y| \\
p &= \pm e^{C_0} y = C_1 y, \qquad C_1 := \pm e^{C_0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p = y' &= C_1 y \\
\int \frac{dy}{y} &= C_1 \int dx \\
\ln|y| &= C_1 x + K_0 \\
|y| &= e^{K_0} e^{C_1 x}, \qquad \pm e^{K_0} =: C_2 \\
y &= C_2 e^{C_1 x} \quad \text{Allgemeine Lösung}
\end{aligned}$$

(enthält auch die Lösung $y = const.$ für $C_1 = 0$)

2. Fall $\quad F(x, y', y'') = 0$

$$\downarrow \qquad \text{Subst.:} \quad \begin{array}{rcl} y' & = & p(x) \\ y'' & = & p'(x) \end{array}$$

$\boxed{F(x, p(x), p'(x)) = 0}$ DGL 1.0. für $p(x)$

Beispiel 6:

$$\begin{aligned}
(x^2+1)y'' + y'^2 + 1 &= 0 \qquad y' = p(x) \\
(x^2+1)p' + p^2 + 1 &= 0 \\
\int \frac{dp}{p^2+1} &= -\int \frac{dx}{x^2+1} + C_0 \\
\arctan p &= -\underbrace{\arctan x}_{=\varphi,} + C_0 = C_0 - \varphi
\end{aligned}$$

$$\tan\varphi = x$$

$$p = \tan(C_0 - \varphi)$$

$$\begin{aligned}
p &= \frac{\tan C_0 - \tan\varphi}{1 + \tan\varphi \tan C_0} \\
p = y' &= \frac{1 - \frac{x}{\tan C_0}}{\frac{1}{\tan C_0} + x} \\
&= \frac{1 + C_1 x}{x - C_1} \qquad \left(\text{setze } C_1 = -\frac{1}{\tan C_0}\right) \\
y' &= C_1 + \frac{1 + C_1^2}{x - C_1} \\
y &= C_1 x + (1 + C_1^2)\ln|x - C_1| + C_2
\end{aligned}$$

Allgemeine Lösung

Regel 3
Ist die DGL $F(x, y, y', y'') = 0$ homogen in y, y', y'' d. h. es gilt $F(x, \lambda y, \lambda y', \lambda y'') \equiv \lambda^p F(x, y, y', y'')$, maW: Lässt sich die DGL in der Form $G\left(x, \frac{y'}{y}, \frac{y''}{y}\right) = 0$ darstellen, so führt die Substitution $u(x) = \frac{y'}{y}$ auf eine DGL 1.0. in u.

denn:

$$\begin{aligned}
\frac{y'}{y} = u \quad \rightarrow \quad y' &= y \cdot u \\
y'' = y'u + yu' &= yu^2 + yu' \\
\rightarrow \frac{y''}{y} &= u^2 + u'
\end{aligned}$$

$\rightarrow \quad G(x, u, u^2 + u') = 0 \quad$ DGL 1. Ordnung für $u = u(x)$

Ergänzung:
Ist die DGL n-ter Ordnung $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ homogen in $y, y', \ldots, y^{(n)}$, d. h. lässt sie sich in der Form

$$G\left(x, \frac{y'}{y'}, \ldots, \frac{y^{(n)}}{y}\right) = 0$$

darstellen, so führt die Substitution $u(x) = \frac{y'}{y}$ auf eine DGL der Ordnung $(n-1)$ für $u(x)$.

Beispiel 7:

$$\begin{aligned} F(x,y,y',y'') \quad \equiv \quad yy'' - y'^2 - 6xy^2 &= 0 \\ \frac{y''}{y} - \left(\frac{y'}{y}\right)^2 - 6x &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{y'}{y} =: u \qquad \Rightarrow \frac{y''}{y} = u^2 + u'$$

$$\begin{aligned} u' + u^2 - u^2 - 6x &= 0 \\ u' &= 6x \\ u &= 3x^2 + C_1 \\ \text{also} \qquad \frac{y'}{y} &= 3x^2 + C_1 \\ \int \frac{dy}{y} &= \int (3x^2 + C_1)dx + C_0 \\ \ln|y| &= x^3 + C_1 x + C_0 \\ y &= C_2 e^{x^3 + C_1 x} \quad \text{allgemeine Lösung} \\ & \qquad (C_2 := \pm e^{C_0}) \end{aligned}$$

Beispiel 8:

$$\begin{aligned} y''y - y'^2 + y'y\tan x &= 0 \\ \frac{y''}{y} - \left(\frac{y'}{y}\right)^2 + \frac{y'}{y}\tan x &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{y'}{y} = u, \to \frac{y''}{y} = u' + u^2$$

$$\begin{aligned} u' + u^2 - u^2 + u\tan x &= 0 \\ \frac{du}{u} &= -\tan x\,dx \\ \int \frac{du}{u} &= \int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx + C_0 \\ \ln|u| &= \ln|\cos x| + C_0 \\ u &= C_1 \cos x, \quad C_1 := \pm e^{C_0} \\ \frac{y'}{y} &= C_1 \cos x \\ \int \frac{dy}{y} &= C_1 \int \cos x\,dx \\ \ln|y| &= C_1 \sin x + K_0 \\ y &= C_2 e^{C_1 \sin x} \quad \text{allgemeine Lösung} \end{aligned}$$

$$(C_2 := \pm e^{K_0})$$

Beispiel 9: $2yy'' = y'^2 \qquad 2\frac{y''}{y} - \left(\frac{y'}{y}\right)^2 = 0$

Subst.: $\frac{y'}{y} = u,$

$$\begin{aligned} y' &= yu \\ y'' &= y'u + yu' = yu^2 + yu' \\ \frac{y''}{y} &= u^2 + u' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2(u^2 + u') - u^2 &= 0 \\ 2u' + u^2 &= 0 \\ 2\frac{du}{dx} &= -u^2 \end{aligned}$$

Fall (a): $u \equiv 0 \quad \Rightarrow y' = 0, \quad y = const.$, ist Lösung.

Fall (b): $u \neq 0$

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{u^2} &= -\frac{1}{2} \int dx \\ -\frac{1}{u} &= -\frac{1}{2}(x + C_1) \\ u = \frac{y'}{y} &= \frac{2}{x + C_1} \\ \int \frac{dy}{y} &= 2 \int \frac{dx}{x + C_1} \\ \ln|y| &= 2 \ln|x + C_1| + C_0 \\ &= \ln(x + C_1)^2 + C_0 \\ y &= \pm e^{C_0} e^{\ln(x+C_1)^2} \\ y &= C_2(x + C_1)^2 \end{aligned}$$

Allgemeine Lösung
$y = C_1(x + C_2)^2$ und $y = const.$

Zweiparametrige Schar von Parabeln, deren Scheitel auf der x-Achse liegen (bei $x = -C_2$) und deren Achsen orthogonal zur x-Achse sind mit beliebigem Hauptkoeffizienten; hinzu kommt die Schar paralleler Horizontalgeraden $y = K$, die bei der speziellen Wahl von $C_2 := a > 0,\ C_1 := \dfrac{K}{a^2}$ für $a \to \infty$ in der Parabelschar enthalten ist:

$$
\begin{aligned}
y = C_1(x + C_2)^2 &= \frac{K}{a^2}\,(x + a)^2 \\
&= K\left(\frac{x}{a} + 1\right)^2 \longrightarrow K \text{ für } a \to \infty.
\end{aligned}
$$

11.4 Gewöhnliche Differentialgleichungen höherer Ordnung, Allgemeines

$$\begin{array}{rcll} F(x,y,y',\dots,y^{(n)}) & = & 0 & \text{impl. DGL } n\text{-ter Ord.} \\ y^{(n)} & = & f(x,y,y',\dots,y^{(n-1)}) & \text{expl. DGL } n\text{-ter Ord.} \end{array}$$

Anfangswertproblem (AWP) für DGL n-ter Ordnung:
Es ist eine Lösung $y = \varphi(x)$ zu bestimmen, die durch einen vorgegebenen Punkt (x_0, y_0) verläuft und dort vorgeschriebene Werte für die $1., 2., \dots, (n-1)$-te Ableitung annimmt:

$$\begin{array}{rcl} \varphi(x_0) & = & y_0 \\ \varphi'(x_0) & = & y_0^1 \\ & \vdots & \\ \varphi^{(n-1)}(x_0) & = & y_0^{n-1} \end{array}$$

Eng verwandt mit der DGL n-ter Ordnung ist ein **System von Differentialgleichungen** erster Ordnung für n gesuchte Funktionen $y_1(x), \dots, y_n(x)$:

$$\begin{array}{rcl} y_1' & = & f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ & \vdots & \\ y_n' & = & f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{array} \qquad (1)$$

Lösung von (1) im Intervall $I = [a, b]$:
n Funktionen $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, die für $a \leq x \leq b$ das System (1) identisch bzgl. x erfüllen;

$\widehat{=}$ Lösungskurve $y(x) := \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$ im $\mathbb{R}^n$, $a \leq x \leq b$.

Anfangswertproblem für DGL-System:
Es ist eine Lösungskurve $(y_1(x), \ldots, y_n(x))^T \in \mathbb{R}^n$ von (1) zu bestimmen, die für ein vorgegebenes $x = x_0$ durch den vorgeschriebenen Punkt $(y_1^\circ, \ldots, y_n^\circ)^T \in \mathbb{R}^n$ verläuft:

$$\begin{array}{rcl} y_1(x_0) & = & y_1^\circ \\ & \vdots & \\ y_n(x_0) & = & y_n^\circ \end{array}$$

Jede explizite DGL n-ter Ordnung lässt sich in ein System von DGL 1. Ordnung für n Funktionen überführen:

$$\begin{array}{lcl} y_1(x) & := & y(x) \\ y_2(x) & := & y'(x) \\ y_3(x) & := & y''(x) \\ & \vdots & \\ y_{n-1}(x) & := & y^{(n-2)}(x) \\ y_n(x) & := & y^{(n-1)}(x) \end{array}$$

Zugehöriges System:

$$\boxed{\begin{array}{lcl} y_1' & = & y_2 \\ y_2' & = & \quad y_3 \\ y_3' & = & \qquad y_4 \\ & \vdots & \qquad\quad \ddots \\ y_{n-1}' & = & \qquad\qquad y_n \\ y_n' & = & f(x, y_1, \ldots, y_n) \end{array}}$$

Umgekehrt kann auch ein System (1) in eine DGL n-ter Ordnung überführt werden (unter gewissen zusätzlichen Auflösbarkeitsvoraussetzungen):

$(n = 2)$:

$$y_1' = f_1(x, y_1, y_2) \tag{2}$$

$$y_2' = f_2(x, y_1, y_2) \tag{3}$$

Ist $\dfrac{\partial f_1}{\partial y_2} \neq 0$, so ist (2) auflösbar nach y_2:

$$y_2 = \varphi(x, y_1, y_1')$$

Zusammen mit (3) ergibt das (Kettenregel!)

$$y_2' = \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} y_1' + \frac{\partial \varphi}{\partial y_1'} y_1'' = f_2(x, y_1, \varphi(x, y_1, y_1'))}_{\text{DGL 2. Ordnung für } y_1(x)}$$

Existenz- und Eindeutigkeitssatz für die explizite DGL n-ter Ordnung $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$:
Die Funktion f sei in einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ stetig und beschränkt und erfülle in jedem inneren Punkt u von G eine LIPSCHITZ-Bedingung, d. h. für alle Punkte $(x, y_0, \ldots, y_{n-1}), (x, \overline{y}_0, \ldots, \overline{y}_{n-1})$ aus einer Umgebung von u gilt

$$\left|f(x, \overline{y}_0, \ldots, \overline{y}_{n-1}) - f(x, y_0, \ldots, y_{n-1})\right| \leq M \sum_{i=1}^{n} |\overline{y}_i - y_i|$$

mit einer gewissen (von u abhängigen) LIPSCHITZ-Konstante M.
Dann existiert zu jedem vorgegebenen inneren Punkt $(x_0, y_0, y_0^1, \ldots, y_0^{n-1})$ von G genau eine Lösung $y = \varphi(x)$ mit

$$\begin{array}{lcl} \varphi(x_0) & = & y_0 \\ \varphi'(x_0) & = & y_0^1 \\ & \vdots & \\ \varphi^{(n-1)}(x_0) & = & y_0^{n-1} \end{array}$$

d. h. jedes AWP in G ist eindeutig lösbar.

Existenz- und Eindeutigkeitssatz für das DGL-System

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ &\vdots \\ y_n &= f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{aligned}$$

Voraussetzung:
Die Funktionen $f_1, \ldots, f_n$ sind in einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ stetig und beschränkt und erfüllen dort in jedem inneren Punkt $u = (u_0, u_1, \ldots, u_n)^T$ von G eine LIPSCHITZ-Bedingung, d. h. es gibt eine (von u abhängige) LIPSCHITZ-Konstante $M > 0$ derart, dass

$$|f_k(x, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n) - f_k(x, y_1, \ldots, y_n)| \leq M \sum_{i=1}^{n} |\overline{y}_i - y_i|$$

gilt für alle Punkte $(x, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n), (x, y_1, \ldots, y_n)$ einer Umgebung von u, $\quad k = 1, \ldots, n$.
Dann verläuft durch jeden inneren Punkt $(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ von G genau eine Lösungskurve $(y_1(x), \ldots, y_n(x))$, d. h. jedes AWP in G ist eindeutig lösbar.

11.5 Lineare DGL'n n-ter Ordnung

11.5.1 Allgemeines

Lineare DGL n-ter Ordnung:

$$\underbrace{y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y}_{=:L[y]} = f(x)$$

"linearer Differentialoperator"

$L[y] = 0 \quad \sim \quad$ homogene DGL
$L[y] = f(x) \quad \sim \quad$ inhomogene DGL

Voraussetzung: $p_1 \ldots p_n,\ f$ stetig in $a < x < b$

$\Rightarrow$ Jedes AWP ist eindeutig lösbar

zugehöriges System: $y_1 = y, y_2 = y', y_3 = y'' \ldots$
$y_n = y^{(n-1)}$

$$\begin{aligned}
y_1' &= y_2 \\
y_2' &= \quad y_3 \\
\vdots & \qquad\quad \ddots \\
y_{n-1}' &= \qquad\quad y_n \\
y_n' &= f(x) - p_n y_1 - p_{n-1} y_2 - \ldots - p_2 y_{n-1} - p_1 y_n
\end{aligned}$$

Jede rechte Seite ist stetig in $x,\ y_1 \ldots y_n$ und sogar bzgl. $y_1 \ldots y_n$ stetig partiell differenzierbar
$\Rightarrow$ Lipschitz-Bedingung ist erfüllt.

Eigenschaften von $L[y]$:

1. $L[Cy] = CL[y]$ für jede n-mal differenzierbare Funktion y

   Beweis:
$$\begin{aligned} L[Cy] &= (Cy)^{(n)} + p_1(Cy)^{(n-1)} + \ldots + p_n(Cy) \\ &= C\left\{y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_n y\right\} = CL[y] \end{aligned}$$

2. $L[y_1(x) + y_2(x)] = L[y_1(x)] + L[y_2(x)]$
   da Ableitung einer Summe = Summe der Ableitungen
   $\Downarrow$

3. $\mathbf{L[C_1 y_1 + \ldots + C_k y_k] = C_1 L[y_1] + \ldots + C_k L[y_k]}$
   für beliebige n-mal differenzierbare Funktionen $y_1 \ldots y_k$ und beliebige Konstanten $C_1 \ldots C_k$.

Daraus ergeben sich folgende Eigenschaften der DGL $L[y] = f(x)$:

(a) Mit $y_1(x), \ldots, y_k(x)$ ist auch $C_1 y_1 + \ldots + C_k y_k$ Lösung von $L[y] = 0$, für beliebige Konstanten $C_1 \ldots C_k$. (Eigenschaft 3. von $L[y]$)

(b) Sind y_1 und y_2 Lösungen der inhomogenen Gleichung $L[y] = f$, so ist $y = y_1 - y_2$ Lösung der homogenen Gleichung $L[y] = 0$.
Beweis: $L[y_1 - y_2] = L[y_1] - L[y_2] = f - f = 0$

(c) Ist y_h eine Lösung der homogenen Gleichung $L[y] = 0$ und y_i eine Lösung der inhomogenen Gleichung $L[y] = f$, so ist auch $y = y_h + y_i$ Lösung der inhomogenen Gleichung.
Beweis: $L[y_h + y_i] = L[y_h] + L[y_i] = 0 + f = f$

(d) **Satz 1: Überlagerungssatz**
("Hauptsatz", **"Superpositionsprinzip"**)
Ist $y_i(x)$ irgendeine Lösung der inhomogenen Gleichung $L[y] = f$, so liefert $y_i(x) + y_h(x)$ genau die sämtlichen Lösungen der inhomogenen Gleichung $L[y] = f$, wenn $y_h(x)$ alle Lösungen der homogenen Gleichung $L[y] = 0$ durchläuft.

$$\left\{\begin{matrix}\textbf{Allg. Lösg.}\\ \textbf{inhomogen}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\textbf{Allg. Lösg.}\\ \textbf{homogen}\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\textbf{Spezielle Lösg.}\\ \textbf{inhomogen}\end{matrix}\right\}$$

(e) **Satz 2: Reduktionssatz**
(Jean-Baptist le Rond **d'Alembert**, 1717 - 1783, Paris)
Die Ordnung der DGL $L[y] = f$ lässt sich um 1 reduzieren, wenn man eine spezielle nicht identisch verschwindende Lösung $y_1(x)$ der homogenen Gleichung $L[y] = 0$ kennt.

Ansatz $y = y_1(x) \displaystyle\int u(x)\, dx$

Ermittlung von $L[y]$:

$$
\begin{array}{lll}
y & = y_1 \int u dx & \cdot p_n \\
y' & = y_1' \int u dx + y_1 u & \cdot p_{n-1} \\
y'' & = y_1'' \int u dx + 2y_1' u + y_1 u' & \cdot p_{n-2} \\
y''' & = y_1''' \int u dx + 3y_1'' u + 3y_1' u' + y_1 u'' & \cdot p_{n-3} \\
 & \vdots & \\
y^{(n)} & = y_1^{(n)} \int u dx + \binom{n}{1} y_1^{(n-1)} u + \binom{n}{2} y_1^{(n-2)} u' + \ldots + \binom{n}{n} y_1 u^{(n-1)} & \cdot 1
\end{array}
$$

$$
L[y] = \underbrace{L[y_1]}_{\downarrow \atop =0} \int u\, dx + u \left\{ p_{n-1} y_1 + 2p_{n-2} y_1' + 3p_{n-3} y_1'' + \ldots + \binom{n}{1} y_1^{(n-1)} \right\}
$$

$$
+ u' \left\{ p_{n-2} y_1 + 3p_{n-3} y_1' + \ldots + \binom{n}{2} y_1^{(n-2)} \right\} + \ldots + \binom{n}{n} y_1 u^{(n-1)}
$$

$$
= f(x)
$$

Es entsteht also eine lineare DGL $(n-1)$ter Ordnung für $u(x)$ qed.

Erinnerung: Leibnizsche Regel

$$
(u \cdot v)^{(k)} = \sum_{\lambda=0}^{k} \binom{k}{\lambda} u^{(k-\lambda)} v^{(\lambda)} \qquad (\widehat{=} \text{ Binomi})
$$

Bemerkungen:

1. liegt speziell DGL 1.0. vor, so entspricht der Reduktionssatz der Variation der Konstanten.

2. Eine lineare DGL 2.0. ist vollständig lösbar, wenn man eine spezielle Lösung der zugehörigen homogenen DGL kennt.

Beispiel zum Reduktionssatz:

$x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = x^3$
$y = x$ spezielle Lösung der homogenen Gleichung $L[y] = 0$

$$\text{Ansatz:} \quad \begin{aligned} y &= x \cdot \textstyle\int u(x)\,dx \qquad \Rightarrow \\ y' &= \textstyle\int u\,dx + x \cdot u \\ y'' &= u + xu' + u = 2u + xu' \end{aligned}$$

$$x^2(2u+xu') - x(x+2)[\textstyle\int u\,dx + xu] + (x+2)\,x \textstyle\int u\,dx = x^3$$

$$x^3u' + \underbrace{\left\{2x^2 - x^2(x+2)\right\}}_{-x^3} u + \underbrace{\{-x(x+2) + (x+2)x\}}_{0} \textstyle\int u dx = x^3$$

$\underline{\underline{u' - u = 1}}$ $\quad \sim$ "reduzierte DGL"

homogen:
$$\begin{aligned} u' - u &= 0 \\ \int \frac{du}{u} &= \int dx \\ \ln|u| &= x + K \\ u &= \pm\, e^K e^x = C_1 e^x \end{aligned}$$

inhomogen:
$$\begin{aligned} u(x) &= C_1(x)e^x \\ u' &= e^x(C_1 + C_1') \\ [C_1e^x + C_1'e^x] - C_1e^x &= 1 \\ C_1' &= e^{-x},\ C_1 = -e^{-x} \\ u &= -1 \end{aligned}$$

allgemeine Lösung der reduzierten DGL: $\underline{\underline{u(x) = C_1e^x - 1}}$

$y = x \int u\,dx = x \int (C_1e^x - 1)\,dx = \underline{\underline{C_1xe^x + C_2x - x^2}}$

allgemeine Lösung der Ausgangs-DGL

11.5.2 Lineare Abhängigkeit von Funktionen, Wronski-Determinante, Fundamentalsystem

Gegeben: $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x)$

Definition:
Gilt $C_1\varphi_1 + \ldots + C_k\varphi_k(x) \equiv 0$ im Intervall (a,b) mit $(C_1, \ldots, C_k) \neq (0, \ldots, 0)$, so heißen $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ **linear abhängig** im Intervall (a,b).

Folgt aus $C_1\varphi_1 + \ldots + C_k\varphi_k \equiv 0$ in (a,b), dass $C_1 = C_2 = \ldots = C_k = 0$, so heißen $\varphi_1 \ldots \varphi_k$ **linear unabhängig** in (a,b).

Beispiele:

1. $1, \sin^2 x, \cos^2 x; \quad 1 - \sin^2 x - \cos^2 x \equiv 0 \quad \forall x$
   $C_1 = 1 \quad C_2 = -1 \quad C_3 = -1$
   $\Rightarrow$ die Funktionen $1, \sin^2 x, \cos^2 x$ sind linear abhängig in $(-\infty, \infty)$

2. $1, x, x^2, \ldots x^m$ linear unabh. in jedem Intervall (a,b)
   denn: $C_1 + C_2x + C_3x^2 + \ldots + C_{m+1}x^m \equiv 0$ in (a,b)
   $\Rightarrow$ Polynom mit ∞ vielen Nullstellen in (a,b), Fundamentalsatz der Algebra $\Rightarrow C_1 = \ldots = C_{m-1} = 0$.

3. $1, \cos 2x, \sin^2 x$ linear abhängig:
   $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$

4. $1, \sin x, \cos x$ linear unabhängig in $[0, 2\pi)$:
   Sei $C_1 + C_2 \sin x + C_3 \cos x = 0, \quad 0 \leq x < 2\pi$

$$\left.\begin{array}{lcl} x = 0 & \Rightarrow & C_1 + C_3 = 0 \\ x = \pi & \Rightarrow & C_1 - C_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow C_1 = C_3 = 0 \Rightarrow C_2 = 0.$$

Wie lässt sich lineare Abhängigkeit/Unabhängigkeit feststellen?

Die Funktionen $\varphi_1(x) \ldots \varphi_n(x)$ seien $(n-1)$-mal differenzierbar und es gelte

$$\begin{array}{ccccccccc} C_1\varphi_1 & + & \ldots & & \ldots & + & C_n\varphi_n & = & 0 \end{array}$$

Durch Differenzieren erhält man:

$$\begin{array}{ccccccccc} C_1\varphi_1' & + & C_2\varphi_2' & + & \ldots & + & C_n\varphi_n' & = & 0 \\ C_1\varphi_1'' & + & C_2\varphi_2'' & + & \ldots & + & C_n\varphi_n' & = & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \\ C_1\varphi_1^{(n-1)} & + & C_2\varphi_2^{(n-1)} & + & \ldots & + & C_n\varphi_n^{(n-1)} & = & 0 \end{array}$$

Homogenes lineares Gleichungssystem

Koeffizientendeterminante:

$$\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \ldots & \varphi_n \\ \varphi_1' & \varphi_2' & \ldots & \varphi_n' \\ \vdots & & & \\ \varphi_1^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & \ldots & \varphi_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = W\{\varphi_1 \ldots \varphi_n\} = W(x)$$

Wronskische Determinante

(Josef Maria Wronski 1775 - 1853,
polnischer Artillerieoffizier, Privatgelehrter)

Sind nun $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ linear abhängig in $(a,b) \Rightarrow$ Es gibt eine nichttriviale Lösung $C_1, \ldots, C_n \Rightarrow W \equiv 0$ in (a,b). Gilt andererseits $W(x_0) \neq 0$ für ein $x_0 \in (a,b)$, so folgt $C_1 = C_2 = \ldots = C_n = 0$ und $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ sind linear unabhängig.

Fazit:

1. Notwendige Bedingungen für lineare Abhängigkeit:
   $W(x) \equiv 0$ für alle $x \in (a,b)$

2. Hinreichende Bedingungen für lineare Unabhängigkeit:
   $W(x_0) \neq 0$ für eine x_0 aus (a,b)

Sind nun $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ nicht irgendwelche differenzierbare Funktionen, sondern Lösungen von $L[y] = 0$, so ist jede dieser Bedingungen sogar notwendig und hinreichend, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 3:
Die Funktionen $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ seien stetig im Intervall (a,b). Sind $y_1(x) \ldots y_n(x)$ Lösungen von

$L[y] = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0$

so gilt

$$W\{y_1 \ldots y_n\} = W(x) = W(x_0)e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p_1(t)\,dt}$$

wobei $x_0 \in (a,b)$ beliebig gewählt werden kann.

Folgerung:

$y_1(x) \dots y_n(x)$ lin. abh. $\Leftrightarrow$ Für alle $x \in (a, b)$ gilt $W(x) \equiv 0$

$y_1 \dots y_n$ lin. unabh. $\Leftrightarrow$ Es gibt ein $x_0 \in (a, b)$ mit $W(x_0) \neq 0$

Definition:

Ein System von n linear unabhängigen Lösungen der DGL $L[y] = 0$ heißt **Fundamentalsystem** von $L[y] = 0$.

Satz 4:

1. Es gibt stets ein Fundamentalsystem der homogenen DGL $L[y] = 0$.
2. Ist $y_1(x), \dots, y_n(x)$ ein Fundamentalsystem und $y = \varphi(x)$ irgendeine Lösung von $L[y] = 0$, so gilt $\varphi(x) \equiv K_1 y_1(x) + \dots + K_n y_n(x)$ mit gewissen Konstanten $K_1, \dots, K_n$.

Folgerung 1:

Ist $y_1, \dots, y_n$ ein Fundamentalsystem, so ist

$$y = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n$$

die allgemeine Lösung von $L[y] = 0$.

Folgerung 2:

Die Lösungen der homogenen DGL $L[y] = 0$ bilden einen (reellen) Vektorraum der Dimension n. Jedes Fundamentalsystem ist eine Basis dieses Vektorraumes.

Beispiel 1: $y'' - y = 0$

Wir interessieren uns für ein Fundamentalsystem.

$$\begin{aligned} y'' &= y \quad | \cdot 2y' \\ 2y''y' &= 2yy' \\ (y'^2)' &= (y^2)' \\ y'^2 &= y^2 + C_1 \qquad C_1 = 0 \text{ gesetzt, wir interessieren} \\ y'^2 &= y^2 \qquad\qquad \text{uns für spez. Lsg. von } L[y] = 0 \end{aligned}$$

$$\swarrow \qquad\qquad\qquad \searrow$$

$$\begin{aligned} y' &= y & y' &= -y \\ \int \frac{dy}{y} &= \int dx & \int \frac{dy}{y} &= -\int dx \\ \ln|y| &= x + C_2 & \ln y &= -x + C_3 \\ y &= K_2 e^x & y &= K_3 e^{-x}, K_i = \pm e^{C_i}, i = 1, 2 \end{aligned}$$

Speziell: $y_1 = e^x, y_2 = e^{-x}$ sind Lösungen der Ausgangsgleichung (Probe!).

Bilden y_1, y_2 ein Fundamentalsystem?

$$W\{y_1, y_2\} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = e^x \cdot e^{-x} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \equiv -2 \neq 0$$

$\Rightarrow$ y_1, y_2 linear unabhängig, also $\{y_1, y_2\}$ ist Fundamentalsystem

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}}}$ allgemeine Lösung

Beispiel 2:

Wir hatten (beim Reduktionssatz)

$$x^2y'' - x(x+2)\,y' + (x+2)\,y = x^3, \qquad 0 < x < \infty$$

mit der Lösung: $y = C_1 x e^x + C_2 x - x^2$

Nachweis, dass die Funktionen

$$y_1 = xe^x, y_2 = x$$

ein Fundamentalsystem bilden:

$$\begin{aligned} W\{y_1, y_2\} &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} xe^x & x \\ e^x + xe^x & 1 \end{vmatrix} \\ &= xe^x - x(e^x + xe^x) \\ &= -x^2 e^x \neq 0 \text{ für } x \neq 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow y_1, y_2$ linear unabhängig

Beispiel 3:

$$y'' + \frac{2-x^2}{x(x-2)}\,y' + \frac{2(x-1)}{x(x-2)}\,y = 0 \qquad (x \neq 0,\ x \neq 2)$$

$y_1 = x^2, \quad y_2 = e^x$ sind Lösungen

y_1: $\quad 2 + \frac{2-x^2}{x-2} \cdot 2 + \frac{2(x-1)\cdot x}{x-2} = \frac{1}{x-2}\,(2x - 4 + 4 - 2x^2 + 2x^2 - 2x) \equiv 0$

y_2: $\quad \frac{e^x}{x(x-2)}[x(x-2) + 2 - x^2 + 2x - 2] \equiv 0$

Wronski-Determinante von y_1, y_2:

$$\begin{aligned} W\{y_1, y_2\} &= W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & e^x \\ 2x & e^x \end{vmatrix} \\ &= xe^x \begin{vmatrix} x & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = x(x-2)e^x \neq 0 \end{aligned}$$

für $x \neq 0, x \neq 2$

$\Rightarrow \quad y_1, y_2$ linear unabhängig

$\underline{\underline{y = C_1 x^2 + C_2 e^x}}$ allgemeine Lösung

11.5.3 Homogene lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Gegeben:
$L\{y\} = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = 0$

$a_1, \ldots, a_n$ konstant

Beispiel: Schwingungsgleichung $\ddot{x} + \dfrac{\alpha}{m}x = 0$

Ziel: Bestimmung eines Fundamentalsystems

Ansatz: $y = e^{\lambda x}$,
λ soll so bestimmt werden, dass evtl. $L[e^{\lambda x}] = 0$.
λ zunächst unbestimmte Konstante.

$$L[e^{\lambda x}]: \qquad \begin{array}{rcl} y &=& e^{\lambda x} \\ y' &=& \lambda e^{\lambda x} \\ y'' &=& \lambda^2 e^{\lambda x} \\ &\vdots& \\ y^{(n)} &=& \lambda^n e^{\lambda x} \end{array}$$

$$\begin{aligned} L[e^{\lambda x}] &= \lambda^n e^{\lambda x} + a_1\lambda^{n-1}e^{\lambda x} + a_2\lambda^{n-2}e^{\lambda x} + \ldots + \lambda a_{n-1}e^{\lambda x} + a_n e^{\lambda x} \\ &\equiv e^{\lambda x} \cdot g_n(\lambda) = 0 \end{aligned}$$

wobei

$$g_n(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

$\mathbf{g_n}(\lambda) \sim$ Charakteristisches Polynom

der homogenen DGL $L[y] = 0$

$e^{\lambda x} \neq 0 \quad \forall x \quad \Rightarrow \quad g_n(\lambda) = 0$
algebraische Gleichung n-ten Grades

Fundamentalsatz der Algebra $\Rightarrow \exists$ Zahlen $\lambda_1 \ldots \lambda_k$ mit
$g_n(\lambda) \equiv (\lambda - \lambda_1)^{\mu_1}(\lambda - \lambda_2)^{\mu_2} \ldots (\lambda - \lambda_k)^{\mu_k}$

λ_i Nullstelle mit Vielfachheit $\mu_i \quad \left(\sum_{i=1}^{k} \mu_i = n\right)$

$\Rightarrow e^{\lambda_i x}$ ist eine spezielle Lösung von
$L[y] = 0,\ i = 1, \ldots, k.$

1. Fall: $g_n(\lambda)$ besitzt n einfache Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$

$\Rightarrow y_1 := e^{\lambda_1 x}, y_2 := e^{\lambda_2 x}, \ldots, y_n := e^{\lambda_n x}$ sind n verschiedene Lösungen

Es gilt: $\quad W\left\{e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}\right\} \neq 0, \quad$ denn:

$$W\left\{e^{\lambda_1 x} \ldots e^{\lambda_n x}\right\} = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \ldots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \ldots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^2 e^{\lambda_2 x} & \ldots & \lambda_n^2 e^{\lambda_n x} \\ \vdots & & & \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & \ldots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix}$$

$$= e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ddots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= e^{-a_1 x} \prod_{\substack{i,k=1 \\ i>k}}^{n} (\lambda_i - \lambda_k)$$ **(Vandermonde-Determinante)**

$(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = -a_1, \qquad$ Vieta)

also $W\left\{e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}\right\} \neq 0$
$\Rightarrow \{y_1, \ldots, y_n\}$ ist Fundamentalsystem

$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n e^{\lambda_n x}$ allgemeine Lösung

Alle λ_v reell $\quad \Rightarrow \quad y$ reell

Wenn komplexe Nullstellen auftreten, so immer in konjugiert komplexen Paaren, da $g_n(\lambda)$ reelle Koeffizienten hat:

$$g_n(\lambda) = \sum_{v=0}^{n} a_{n-v}\lambda^v, \quad a_0 = 1$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad g_n(\lambda) = 0 \Rightarrow \overline{g_n(\lambda)} = 0 \ &= \ \overline{\sum a_{n-v}\lambda^v} = \sum \overline{a_{a-v}\lambda^v} \\
&= \ \sum \overline{a_{n-v}}\,\overline{\lambda}^v \\
&= \ \sum a_{n-v}\overline{\lambda}^v = g_n(\overline{\lambda})
\end{aligned}$$

also: mit λ ist auch $\overline{\lambda}$ Nullstelle von g_n

Sei etwa $\begin{aligned} \lambda_1 &= \alpha + i\beta \\ \lambda_2 &= \alpha - i\beta \end{aligned}$

Es gilt:

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}\cos\beta x + i e^{\alpha x}\sin\beta x =: z_1 + i z_2$$

$$y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}\cos\beta x - i e^{\alpha x}\sin\beta x =: z_1 - i z_2$$

$$z_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2), z_2 = \frac{1}{2i}(y_1 - y_2)$$

- $z_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ und $z_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$ sind Lösungen von $L[y] = 0$:

$$L[z_1] = L\left[\frac{1}{2}\,y_1 + \frac{1}{2}\,y_2\right] \quad = \frac{1}{2}\,\underbrace{L[y_1]}_{=0} + \frac{1}{2}\,\underbrace{L[y_2]}_{=0} = 0$$

$$L[z_2] = L\left[\frac{1}{2i}\,y_1 - \frac{1}{2i}\,y_2\right] \quad = \frac{1}{2i}\,L[y_1] - \frac{1}{2i}\,L[y_2] = 0$$

- $\{z_1, z_2, y_3, \ldots, y_n\}$ ist Fundamentalsystem:

$W\{y_1, \ldots, y_n\}$

$= W\{z_1 + iz_2, z_1 - iz_2, y_3, \ldots, y_n\}$ addiere Sp2 zu Sp1

$= W\{2z_1, z_1 - iz_2, y_3, \ldots, y_n\}$ klammere Faktor 2 aus

$= 2W\{z_1, z_1 - iz_2, y_3, \ldots, y_n\}$ subtrahiere Sp1 von Sp2

$= 2W\{z_1, -iz_2, y_3, \ldots, y_n\}$ klammere Faktor $(-i)$ aus

$= \underbrace{-2i}_{\neq 0}\,W\{z_1, z_2, y_3, \ldots, y_n\}$

Mit $W\{y_1, \ldots, y_n\} \neq 0$ gilt also auch
$W\{z_1, z_2, y_3, \ldots, y_n\} \neq 0$.

Das ergibt folgendes Rezept:
Bei komplexen Nullstellen $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ kann man die beiden komplexwertigen Funktionen $e^{(\alpha+i\beta)x}$, $e^{(\alpha-i\beta)x}$ durch die Funktionen $e^{\alpha x}\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$ ersetzen und bleibt so im Reellen.

Beispiel 1: $y'' - y = 0$ (vgl. Beispiel 1 von 14.5.2 ↑)

Ansatz: $\begin{array}{ll} y = e^{\lambda x}, & y' = \lambda e^{\lambda x} \\ y'' = \lambda^2 e^{\lambda x} & \end{array}$

$e^{\lambda x}[\lambda^2 - 1] = 0$

Charakt. Polynom $g(\lambda) = \lambda^2 - 1 = 0$ $\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \end{array}\right\}$ Nst.

$$\left.\begin{array}{ccccc} y_1 & = & e^{\lambda_1 x} & = & e^x \\ y_2 & = & e^{\lambda_2 x} & = & e^{-x} \end{array}\right\} \text{ Fundamentalsystem}$$

$\underline{\underline{y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}}}$ allgemeine Lösung

Beispiel 2: $y'' + \omega^2 y = 0$ (Schwingungs-DGL), $w > 0$

$y = e^{\lambda x} \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 + \omega^2 = 0$

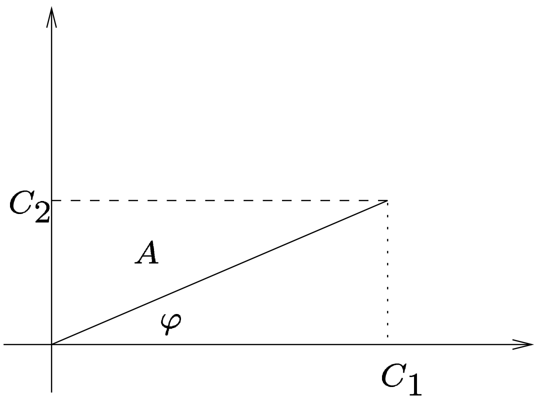
$\lambda_1 = i\omega, \lambda_2 = -i\omega$

$$\left.\begin{array}{ll} y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{i\omega x} & = \cos\omega x + i\sin\omega x \\ y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{-i\omega x} & = \cos\omega x - i\sin\omega x \end{array}\right\} \text{ Fundamentalsystem}$$

bzw. (Übergang zu reellem FS):

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = \cos \omega x \\ z_2 = \sin \omega x \end{array}\right\} \text{Fundamentalsystem}$$

$$\boxed{y = C_1 \sin \omega + C_2 \cos \omega x \quad \text{allgemeine Lösung}}$$



oder:

$$\begin{array}{c} A := \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \\ \tan \varphi = \dfrac{C_2}{C_1} \end{array} \Longleftrightarrow \begin{array}{c} C_1 = A \cos \varphi \\ C_2 = A \sin \varphi \end{array}$$

$$y = (A \cos \varphi) \sin \omega x + (A \sin \varphi) \cos \omega x$$

$$\boxed{y = A \sin(\omega x + \varphi) \quad \text{allgemeine Lösung}}$$

$A, \varphi \sim$ willkürliche Konstante ($A \geq 0$) (vgl. 14.3)

Beispiel 3: $y'' + 3y' - 10y = 0$

$y = e^{\lambda x} \Rightarrow \quad \lambda^2 + 3\lambda - 10 = 0$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 10}$$

$$= -\frac{3}{2} \pm \frac{7}{2} = \begin{cases} 2 \\ -5 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{lcl} y_1 & = & e^{2x} \\ y_2 & = & e^{-5x} \end{array}\right\} \quad \text{Fundamentalsystem}$$

$\underline{\underline{y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-5x}}}$ allgemeine Lösung

Beispiel 4: $y''' - 7y' + 6y = 0$

$y = e^{\lambda x} \Rightarrow \lambda^3 - 7\lambda + 6 \equiv (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 3) = 0$

$\underline{\underline{y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-3x}}}$ allgemeine Lösung

Beispiel 5: $y''' - 5y'' + 17y' - 13y = 0$

$y = e^{\lambda x} \Rightarrow \lambda^3 - 5\lambda^2 + 17\lambda - 13 = 0$

$\lambda_1 = 1$ ist eine Nullstelle

Horner: $\lambda_1 = 1$

$$\begin{array}{cccc} 1 & -5 & 17 & -13 \\ \mathbf{0} & 1 & -4 & 13 \\ \hline 1 & -4 & 13 & 0 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \end{array}$$

$(\nearrow \cdot\lambda_1, \quad \downarrow +)$

Koeff. des Restpolynoms

d. h. $(\lambda^3 - 5\lambda^2 + 17\lambda - 13) = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 13)$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0 \rightarrow \quad \begin{array}{lcl} \lambda_{2/3} & = & 2 \pm \sqrt{4 - 13} \\ \lambda_2 & = & 2 + 3i \\ \lambda_3 & = & 2 - 3i \end{array}$$

$\Rightarrow \quad e^x,\ e^{(2+3i)x},\ e^{(2-3i)x}$ Lösungen/Fundamentalsystem

oder $e^x,\ e^{2x}\cos 3x,\ e^{2x}\sin 3x$

$\underline{\underline{y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}\cos 3x + C_3 e^{2x}\sin 3x}}$ allgemeine Lösung

2. Fall: Das charakteristische Polynom $g(\lambda)$ besitzt mehrfache Nullstellen

$$g(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\mu_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_k)^{\mu_k}, \quad \sum_{i=1}^{k} \mu_i = n, \quad k < n$$

Sei etwa λ_1 eine μ-fache Nullstelle mit $\mu > 1$

$$\Rightarrow g(\lambda_1) = g'(\lambda_1) = \ldots = g^{(\mu-1)}(\lambda_1) = 0$$

(denn:

$$\begin{aligned} g(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1)^{\mu} h(\lambda) \\ g'(\lambda) &= \mu(\lambda - \lambda_1)^{\mu-1} h(\lambda) + (\lambda - \lambda_1)^{\mu} h'(\lambda) \\ &= (\lambda - \lambda_1)^{\mu-1}[\mu h(\lambda) + (\lambda - \lambda_1) h'(\lambda)] \\ &= 0 \text{ für } \lambda = \lambda_1) \end{aligned}$$

Dann sind $e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, x^2 e^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{\mu-1} e^{\lambda_1 x}$

μ verschiedene Lösungen von $L[y] = 0$

da:

$$\begin{aligned}
L[x^m e^{\lambda x}] &= L\left[\frac{\partial^m}{\partial\lambda^m}\, e^{\lambda x}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}\frac{\partial^k}{\partial x^k}\left[\frac{\partial^m}{\partial\lambda^m}\, e^{\lambda x}\right], \qquad a_0 = 1 \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}\frac{\partial^m}{\partial\lambda^m}\left(\frac{\partial^k}{\partial x^k}\, e^{\lambda x}\right) \qquad \text{(Satz von Schwarz)} \\
&= \frac{\partial^m}{\partial\lambda^m}\left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}\frac{\partial^k}{\partial x^k}\, e^{\lambda x}\right) \\
&= \frac{\partial^m}{\partial\lambda^m}\left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}\lambda^k e^{\lambda x}\right) \\
&= \frac{\partial^m}{\partial\lambda^m}\left(e^{\lambda x} g(\lambda)\right) \\
&= \sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\frac{\partial^{m-j}}{\partial\lambda^{m-j}}\, e^{\lambda x} \quad \underbrace{\frac{\partial^j}{\partial\lambda^j}\, g(\lambda)}_{g^{(j)}(\lambda)=0, \quad j\le\mu-1} \qquad \text{(Leibniz)} \\
&= 0 \qquad \text{für } m \le \mu - 1
\end{aligned}$$

Erinnerung (Leibniz): $(uv)^{(m)} = \sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j} u^{(m-j)} v^{(j)}$

Bilanz:
Für die Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ mit den Vielfachheiten $\mu_1, \ldots, \mu_k$ ergeben sich als Lösungen:

$$\underbrace{e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{\mu_1 - 1}e^{\lambda_1 x}}_{\mu_1 \text{ Funktion}}, \ldots, \underbrace{e^{\lambda_k x}, xe^{\lambda_k x}, \ldots, x^{\mu_k - 1}e^{\lambda_k x}}_{\mu_k \text{ Funktion}}$$

Das sind insgesamt $\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_k = n$ Lösungen.

Beweisbar:
Diese n Lösungen bilden ein Fundamentalsystem.

Ist $\lambda = \alpha + i\beta$ eine komplexe Nullstelle ($\beta \neq 0$) von $g(\lambda)$, so ist auch $\alpha - i\beta$ Nullstelle von g.

Die beiden komplexen Lösungen

$$x^r e^{(\alpha+i\beta)x}, \quad x^r e^{(\alpha-i\beta)x}$$

sind dann duch die reellen Lösungen

$$x^r e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad x^r e^{\alpha x} \sin \beta x$$

ersetzbar.

$\Downarrow$

Die lineare homogene Differentialgleichung $L[y] = 0$ mit konstanten Koeffizienten besitzt stets ein elementar angebbares Fundamentalsystem.

Beispiel 6: $y^{(4)} + y''' - 3y'' - 5y' - 2y = 0$

$y = e^{\lambda x} \Rightarrow \lambda^4 + \lambda^3 - 3\lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0$

Horner

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 1 & -3 & -5 & -2 \\
\lambda = -1 & & -1 & 0 & 3 & 2 \\
\hline
 & 1 & 0 & -3 & -2 & \underline{\underline{0}} \\
\lambda = -1 & & -1 & 1 & 2 & \\
\hline
 & 1 & -1 & -2 & \underline{\underline{0}} & \\
\lambda = -1 & & -1 & 2 & & \\
\hline
 & 1 & -2 & \underline{\underline{0}} & &
\end{array}$$

also $(\lambda^4 + \lambda^3 - 3\lambda^2 - 5\lambda - 2) \equiv (\lambda + 1)^3(\lambda - 2)$

Fundamentalsystem: $e^{-x},\ xe^{-x},\ x^2e^{-x},\ e^{2x}$

$$\boxed{y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + C_3x^2e^{-x} + C_4e^{2x}}$$

Allgemeine Lösung

Beispiel 7: $y^{(5)} - 2y^{(4)} + 2y''' - 4y'' + y' - 2y = 0$

$y = e^{\lambda x} \Rightarrow$ Charakteristisches Polynom $g(\lambda)$,

$g(\lambda) = \lambda^5 - 2\lambda^4 + 2\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda^2 + 1)^2$

Nullstellen: $2, i, i, -i, -i$

Fundamentalsystem: $e^{2x}, e^{ix}, xe^{ix}, e^{-ix}, xe^{-ix}$

oder $e^{2x}, \cos x, \sin x, x\cos x, x\sin x$

$$\boxed{y = C_1 e^{2x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x + C_4 x \cos x + C_5 x \sin x}$$

Allgemeine Lösung

11.5.4 Allgemeine inhomogene lineare DGL $n-$ter Ordnung

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x) \quad (1)$$

$p_1, \ldots, p_n, f \sim$ stetig für $x \in (a, b)$.

$y_1(x), \ldots, y_n(x)$ sei ein Fundamentalsystem von $L[y] = 0$.

Ziel:
Es ist eine spezielle Lösung $\varphi(x)$ von $L[y] = f(x)$ zu finden;
gemäß **Überlagerungssatz** ("**Superpositionsprinzip**") ist dann die allgemeine Lösung von (1) gegeben durch
$y = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x) + \varphi(x)$

A) Variation der Konstanten

Ansatz:
$\varphi(x) = C_1(x)y_1(x) + \ldots + C_n(x)y_n(x)$

$L[\varphi] = f$ liefert nur eine Gleichung für $C_1, \ldots, C_n \Rightarrow$ Es gibt Freiheitsgrade; wir fügen $(n-1)$ Zusatzgleichungen hinzu:

$$\varphi' = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k' + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} C_k' y_k}$$

1. Zusatzgleichung: $\underbrace{\sum_{k=1}^{n} C_k' y_k} = 0$

$$\varphi'' = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k'' + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} C_k' y_k'}$$

2. Zusatzgleichung: $\underbrace{\sum_{k=1}^{n} C_k' y_k'} = 0$

$$\varphi''' = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k''' + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} C_k' y_k''}$$

3. Zusatzgleichung: $\underbrace{\sum_{k=1}^{n} C_k' y_k''} = 0$

$\vdots$ $\vdots$

$$\varphi^{(n-2)} = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k^{(n-2)} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} C_k' y_k^{(n-3)}}$$

$(n-2)-$te Zusatzgleichung: $\underbrace{\sum_{k=1}^{n} C_u' y_k^{(n-3)}} = 0$

$$\varphi^{(n-1)} = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k^{(n-1)} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} C_k' y_k^{(n-2)}}$$

$$(n-1)\text{–te Zusatzgleichung: } \underbrace{\sum_{k=1}^{n} C_k' y_k^{(n-2)}} = 0$$

$$\varphi^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k^{(n)} + \sum_{k=1}^{n} C_k' y_k^{(n-1)}$$

Das ergibt

$$\begin{aligned}
L[\varphi] &= \varphi^{(n)} + p_1\varphi^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}\varphi' + p_n\varphi = f(x) \\
&= \sum_{k=1}^{n} C_k y_k^{(n)} + \sum_{k=1}^{n} C_k' y_k^{(n-1)} \\
&+ p_1 \sum_{k=1}^{n} C_k y_k^{(n-1)} \\
&\vdots \\
&+ p_{n-1} \sum_{k=1}^{n} C_k y_k' \\
&+ p_n \sum_{k=1}^{n} C_k y_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} C_k \underbrace{\left\{ y_k^{(n)} + p_1 y_k^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} y_k' + p_n y_k \right\}}_{=0} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n} C_k' y_k^{(n-1)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} C_k' y_k^{(n-1)} = f(x)
\end{aligned}$$

Zur Bestimmung von $C_1(x), \ldots, C_u(x)$ ergibt das zusammen mit den Zusatzgleichungen insgesamt das folgende **lineare** Gleichungssystem für $C_1', \ldots, C_n'$:

$$\begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \\ \vdots \\ C_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix} \quad (V)$$

Die zugehörige Koeffizientendeterminante ist gerade die WRONSKI- Determinante

$$W(x) = W\left\{y_1, \ldots, y_n\right\}, \qquad \neq 0 \text{ für alle } x \in (a,b)$$

Lösung von (V) (CRAMER):

$$C_i' = \frac{D_i(x)}{W(x)} \qquad i = 1, \ldots, n$$

mit

$$D_i(x) := \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_{i-1} & 0 & y_{i+1} & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_{i-1}' & 0 & y_{i+1} & \cdots & y_n' \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & \cdots & y_{i-1}^{(n-2)} & 0 & y_{i+1}^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_{i-1}^{(n-1)} & f(x) & y_{i+1}^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n+i} f(x) \cdot W\left\{y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n\right\}$$

Setzt man

$$W_i(x) := (-1)^{n+i} \underbrace{W\{y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n\}}_{\text{Wronskideterminante } (n-1)-\text{ter Ordnung}}$$

so wird

$$C_i(x) = \int \frac{W_i(x)}{W(x)} f(x)dx, \quad i = 1, \ldots, n$$

und

$$\boxed{\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k(x) \int \frac{W_k(x)}{W(x)} f(x)dx}$$

spezielle Lösung von $L[y] = f$

Fazit:
Ist ein Fundamentalsystem von $L[y] = 0$ bekannt, so läßt sich grundsätzlich eine spezielle Lösung von $L[y] = f$ durch Quadraturen (=Integrationen) ermitteln.

Beispiele:
vgl. Vorlesung
u.a.: Erzwungene gedämpfte harmonische Schwingung (mechanischer Federschwinger/elektrischer Schwingkreis)

B) Ansatzverfahren (zur Bestimmung einer speziellen Lösung von $L[y] = f$)

Variation der Konstanten kann sehr mühsam sein. Oft führen spezielle Ansatzverfahren schneller zum Ziel. Die Art des Ansatzes richtet sich nach dem speziellen Funktionstyp der "Störungsfunktion" f.

Vorgehensweise:
Man bilde $L[f]$, stelle die Funktionenklasse dieses Ausdrucks fest (, falls es eine solche endliche Funktionenklasse gibt) und mache mit allen Elementen $g_1, \ldots, g_k$ dieser Klasse den Ansatz

$$\varphi(x) = A_1 g_1(x) + \ldots + A_k g_k(x). \tag{2}$$

Gelingt es, die konstanten Koeffizienten $A_1, \ldots, A_k$ so zu bestimmen, dass $L[\varphi] = f$ erfüllt ist, dann war der Ansatz erfolgreich und φ ist eine spezielle Lösung von $L[y] = f$.

Ein Ansatz kann erfolgreich sein, muss es aber nicht.

Beispiele:
vgl. Vorlesung

Bemerkung:
Gilt $L[f] = 0$ oder $L[f_1] = 0$ bei $f = f_1 + \ldots + f_r$, so führt die angegebene Vorgehensweise nicht zum Ziel ("Resonanz").

Ist $\varphi(x) = A_1 g_1(x) + \ldots + A_k g_k(x)$ der gemäß (2) konstruierte ("alte") Ansatz, so führe man
$y_0(x) = (c_0 + c_1 x + \ldots + c_m x^m) \cdot \varphi(x)$ als neuen Ansatz ein (mit genügend groß gewähltem m) und versuche, die Koeffizienten $c_0, \ldots, c_m, A_1, \ldots, A_k$ aus $L[y_0] = f$ zu ermitteln.

Beispiel:
vgl. Vorlesung

11.6 Eulersche Differentialgleichung

$$L[y] = a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x) \quad (1)$$

$a_0, \ldots, a_n$ reelle Konstanten, $a_0 \neq 0$; $x > 0$

$\sim$ lineare DGL mit den Koeffizientenfunktionen

$$p_i(x) = \frac{a_i}{a_0 x^i} \quad i = 1, \ldots, n, \quad x > 0$$

A) Homogene DGL

Die Substitution $x = e^t$ überführt $L[y] = 0$ in eine lineare DGL mit **konstanten** Koeffizienten für $y(e^t)$ gemäß des folgenden Lemmas:

$$x = e^t \Longrightarrow t = \ln x, \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} = e^{-t}$$

$$\dot{x} := \frac{dx}{dt} = e^t = x$$

Lemma:
Es gilt

$$y^{(k)} = \frac{d^k y}{dx^k} = e^{-kt} T_k[y]$$

wobei $T_k[y] := b_k \dfrac{d^k y}{dt} + \ldots + b_1 \dfrac{dy}{dt} + b_0 y$
d. h. T_k ist **linearer** Differentialoperator $k-$ter Ordnung bzgl. der unabhängigen Veränderlichen t mit **konstanten** Koeffizienten $(b_0, b_1, \ldots, b_k)$.

Nachweis mit vollst. Induktion nach k:

Im folgenden werden die Ableitungen nach x mit einem Strich, die Ableitungen nach t mit einem Punkt bezeichnet.

$$k=0: x^0\,\frac{d^0 y}{dx^0} = 1\cdot y, \Rightarrow T_0[y] = y$$

$$k=1: y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \dot{y}\cdot\frac{1}{x} = e^{-t}\dot{y}$$

$$\Rightarrow T_1[y] = \dot{y}$$

$$\begin{aligned} k=2: y'' &= \frac{d}{dx}\,y' = \frac{d}{dt}\,y'\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}\,(e^{-t}\dot{y})\cdot\frac{dt}{dx} \\ &= (-e^{-t}\dot{y} + e^{-t}\ddot{y})\cdot e^{-t} \\ &= e^{-2t}(\ddot{y}-\dot{y}) \Rightarrow T_2[y] = \ddot{y}-\dot{y} \end{aligned}$$

$k \to k+1$:

$$\begin{aligned} y^{(k+1)} &= \frac{d^{k+1}y}{dx^{k+1}} = \frac{d}{dx}\,y^{(k)} = \frac{d}{dt}\,y^{(k)}\cdot\frac{dt}{dx} \\ &= \frac{d}{dt}\,(e^{-kt}T_k[y])\cdot\frac{dt}{dx} \qquad \text{nach Ind. vor.} \\ &= \left(-ke^{-kt}T_k[y] + e^{-kt}\left(\frac{d}{dt}\,T_k[y]\right)\right)\cdot e^{-t} \\ &= e^{-(k+1)t}\underbrace{(-kT_k[y] + T_k[\dot{y}])}_{=:T_{k+1}[y]} \end{aligned}$$

Dabei ist T_{k+1} ein **linearer** Differentialoperator der Ordnung $k+1$ mit konstanten Koeffizienten, qed.

Es gilt daher

$$\begin{aligned} x^k y^{(k)} &= x^k e^{-kt} T_k[y] \\ &= e^{kt} e^{-kt} T_k[y] \\ &= T_k[y], \end{aligned}$$

so dass $\quad L[y] = \sum\limits_{k=0}^{n} a_{n-k} x^k y^{(k)}$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} T_k[z] = 0}_{} \tag{2}$$

Lineare DGL $n-$ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten für $y(e^t) =: z(t)$.

(2) hat die Form

$$\sum_{k=0}^{n} c_k \frac{d^k z}{dt^k} = 0. \tag{3}$$

Der übliche Lösungsansatz

$$z(t) = e^{\lambda t}$$

führt auf

$$e^{\lambda t} \left(\sum_{k=0}^{n} c_k \lambda^k \right) = 0.$$

Das charakteristische Polynom

$$Q_n(\lambda) := \sum_{j=0}^{n} c_j \lambda^j$$

besitze die Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ mit den Vielfachheiten $\mu_1, \ldots, \mu_k, \quad \sum\limits_{j=1}^{k} \mu_j = n,$ also

$$Q_n(\lambda) = c_n(\lambda - \lambda_1)^{\mu_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_k)^{\mu_k}.$$

Daraus ergibt sich als ein Fundamentalsystem für (3)

$$\begin{array}{lll} e^{\lambda_1 t}, & te^{\lambda_1 t}, \ldots, & t^{\mu_1 - 1} e^{\lambda_1 t} \\ \vdots & & \vdots \\ e^{\lambda_k t}, & te^{\lambda_k t}, \ldots, & t^{\mu_k - 1} e^{\lambda_k t}. \end{array} \tag{4}$$

Die Rücksubstitution $x = e^t, t = \ln x, e^{\lambda_i t} = (e^t)^{\lambda_i} = x^{\lambda_i}$ liefert

$$\begin{array}{ll} x^{\lambda_1}, & (\ln x) x^{\lambda_1}, \ldots, (\ln x)^{\mu_1 - 1} x^{\lambda_1} \\ \vdots & \\ x^{\lambda_k}, & (\ln x) x^{\lambda_k}, \ldots, (\ln x)^{\mu_k - 1} x^{\lambda_k} \end{array} \tag{5}$$

als Fundamentalsystem für die homogene Ausgangs-DGL $L[y] = 0$.

Wie bei der allgemeinen linearen homogenen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten gilt:

Wenn komplexe Nullstellen λ_i des charakteristischen Polynoms $Q_n(\lambda)$ auftreten, dann stets in konjugiert komplexen Paaren.

Gilt etwa $\lambda_1 = \alpha + i\beta,\ \lambda_2 = \alpha - i\beta$, so lassen sich im Fundamentalsystem (4) jeweils die beiden komplexwertigen Funktionen

$$t^m e^{\lambda_1 t} = t^m e^{(\alpha+i\beta)t} = t^m e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t)$$
$$t^m e^{\lambda_2 t} = t^m e^{(\alpha-i\beta)t} = t^m e^{\alpha t}(\cos\beta t - i\sin\beta t)$$

ersetzen durch die beiden reellwertigen Funktionen

$$t^m e^{\alpha t}\cos\beta t$$
$$t^m e^{\alpha t}\sin\beta t.$$

Im Fundamentalsystem (5) lassen sich entsprechend jeweils die beiden komplexwertigen Funktionen

$$(\ln x)^m x^{\alpha\pm i\beta} = (\ln x)^m x^\alpha x^{\pm i\beta} = (\ln x)^m x^\alpha\left[\cos(\beta\ln x) \pm i\sin(\beta\ln x)\right]$$

ersetzen durch die beiden reellwertigen Funktionen

$$(\ln x)^m x^\alpha \cos(\beta\ln x)$$
$$(\ln x)^m x^\alpha \sin(\beta\ln x),$$

so dass stets ein reelles Fundamentalsystem angebbar ist.

(Beachte: $\quad x^{i\beta} = e^{i\beta\ln x} = \cos(\beta\ln x) + i\sin(\beta\ln x)$)

Wichtiger Hinweis für die Praxis:
Die Substitution $x = e^t$ und die Ermittlung der linearen DGL (3) mit konstanten Koeffizienten braucht nicht explizit vorgenommen zu werden.

Man mache bereits in der zu (1) gehörenden homogenen DGL

$$L[y] = 0$$

den Ansatz

$$y = x^\lambda \quad (\equiv e^{\lambda t})$$

und erhält sofort das charakteristische Polynom $Q(\lambda)$, dessen Nullstellen das Fundamentalsystem bestimmen.

B) Inhomogene DGL

$$L[y] = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} x^k y^{(k)} = f(x)$$

Eine spezielle Lösung lässt sich (- wie im Allgemeinen linearen Fall -) ermitteln durch Variation der Konstanten oder durch Ansatzverfahren.

Beispiel: vgl. Vorlesung

11.7 Lineare Differentialgleichungssysteme

11.7.1 Allgemeines

Gegeben: DGL-System 1. Ordnung für n gesuchte Funktionen $y_1, \ldots, y_n$

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= f_1(t, y_1, \ldots, y_n) \\ &\vdots \\ \dot{y}_n(t) &= f_n(t, y_1, \ldots, y_n) \end{aligned} \tag{1}$$

(1) heißt **lineares** System, wenn $f_1, \ldots, f_n$ lineare Funktionen von $y_1, \ldots, y_n$ sind:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= a_{11}(t)y_1 + \ldots + a_{1n}(t)y_n + g_1(t) \\ &\vdots \\ \dot{y}_i(t) &= a_{i1}(t)y_1 + \ldots + a_{in}(t)y_n + g_i(t) \\ &\vdots \\ \dot{y}_n(t) &= a_{n1}(t)y_1 + \ldots + a_{nn}(t)y_n + g_n(t) \end{aligned} \tag{2}$$

bzw. in Matrizenschreibweise:

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + g(t) \tag{3}$$

wobei

$$y(t) := \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}, \; \dot{y}(t) := \begin{pmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{y}_n(t) \end{pmatrix}, \; g(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix}$$

$$A = A(t) := ((a_{ik}(t)))_{(n,n)}$$

Im Folgenden werden die Koeffizientenfunktionen $a_{ik}(t)$ und $g_i(t)$ als stetig für $a < t < b$ vorausgesetzt; $i, k = 1, \ldots, n$.

Dann sind die Funktionen $f_1, \ldots, f_n$ in (1) LIPSCHITZ-stetig (trivial, da f_k linear bzgl. $y_1 \ldots y_n$), so dass jedes AWP $y(t_0) = \begin{pmatrix} y_1^0 \\ \vdots \\ y_n^0 \end{pmatrix} =: y^0$ bei beliebiger Vorgabe von $t_0 \in (a, b)$ und $y^0 \in \mathbb{R}^n$ eindeutig lösbar ist (gemäß Existenz- und Eindeutigkeitssatz).

(3) heißt **inhomogenes System**, wenn $g(t) \not\equiv 0$. Das System

$$\dot{y}(t) = Ay(t) \tag{4}$$

heißt das zu (3) gehörige **homogene System**.

Satz 1:
Reduktionssatz (d'Alambert)
Sei $\dot{y} = Ay + g$ ein lineares (n, n)-DGL-System

$$\left(A = ((a_{ik}(t)))_{(n,n)}, a < t < b\right),$$

und $\varphi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_n(t) \end{pmatrix}$ sei eine Lösung des homogenen Systems (d. h. $\dot{\varphi} = A\varphi$), bei der eine Komponente in (a, b) durchweg von 0 verschieden ist, etwa $\varphi_1(t) \neq 0$ für $a < t < b$. Dann lässt sich das (n, n)-System $\dot{y} = Ay + g$ zurückführen auf ein lineares DGL-System der Ordnung $(n - 1, n - 1)$.

Beweis:

Ansatz: Wir führen einen neuen Funktionenvektor

$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix}$ ein durch die folgende

Substitution:

$$\begin{aligned} y_1 &= \varphi_1 u_1 \\ y_2 &= \varphi_2 u_1 + u_2 \\ y_3 &= \varphi_3 u_1 + u_3 \\ &\vdots \\ y_n &= \varphi_n u_1 + u_n \end{aligned} \qquad (5)$$

$$\downarrow$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \dot{\varphi}_1 u_1 + \varphi_1 \dot{u}_1 \\ \dot{y}_2 &= \dot{\varphi}_2 u_1 + \varphi_2 \dot{u}_1 + \dot{u}_2 \\ \dot{y}_3 &= \dot{\varphi}_3 u_1 + \varphi_3 \dot{u}_1 + \dot{u}_3 \\ &\vdots \\ \dot{y}_n &= \dot{\varphi}_n u_1 + \varphi_n \dot{u}_1 + \dot{u}_n \end{aligned}$$

kurz (vektorielle Schreibweise):

$y = u_1 \varphi + \binom{0}{u}$

$\dot{y} = u_1 \dot{\varphi} + \dot{u}_1 \varphi + \binom{0}{\dot{u}}$, wobei $u := \begin{pmatrix} u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$

In das DGL-System $\dot{y} = Ay + g$ eingesetzt, ergibt das:

$$\downarrow$$

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} u_1 + \varphi \dot{u}_1 + \binom{0}{\dot{u}} &= A\left(u_1\varphi + \binom{0}{u}\right) + g \\ &= u_1 \underbrace{A\varphi}_{\dot{\varphi}} + A\binom{0}{u} + g \end{aligned}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\varphi \dot{u}_1 + \binom{0}{\dot{u}} = A\binom{0}{u} + g}$$

$$\swarrow$$

Dieses System heißt ausführlicher mit $A =: \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} \varphi_1 \dot{u}_1 \quad &= \quad a^1 \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix} + g_1 \\ \varphi_2 \dot{u}_1 + \dot{u}_2 \quad &= \quad a^2 \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix} + g_2 \\ &\vdots \\ \varphi_n \dot{u}_1 + \dot{u}_n \quad &= \quad a^n \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix} + g_n \end{aligned} \tag{6}$$

Multipliziere die 1. Gleichung von (6) mit $\left(-\frac{\varphi_k}{\varphi_1}\right)$ und addiere sie zur k-ten Gleichung, $k = 2, \ldots, n$.

Das ergibt:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot u_2 &= \left(a^2 - \frac{\varphi_2}{\varphi_1}a^1\right)\begin{pmatrix}0\\u_2\\\vdots\\u_n\end{pmatrix} + g_2 - \frac{\varphi_2}{\varphi_1}g_1 \\ &\vdots \\ \dot u_n &= \left(a^n - \frac{\varphi_n}{\varphi_1}a^1\right)\begin{pmatrix}0\\u_2\\\vdots\\u_n\end{pmatrix} + g_n - \frac{\varphi_n}{\varphi_1}g_1 \end{aligned} \quad (7)}$$

lin. DGL-System für $u_2, \ldots, u_n$
"Reduziertes" System

Ist $\begin{pmatrix}u_2\\\vdots\\u_n\end{pmatrix}$ die allgemeine Lösung dieses $(n-1, n-1)$-Systems (7), so liefert die ursprüngliche erste Gleichung von (6):

$$\underbrace{\varphi_1}_{\substack{bekannt\\ und \neq 0\, in\, (a,b)}}\dot u_1 = a^1 \underbrace{\begin{pmatrix}0\\u\end{pmatrix}}_{\substack{allg.\, Lsg.\\ von\,(7)}} + g_1 \Rightarrow \dot u_1 = \underbrace{\frac{1}{\varphi_1}a^1\begin{pmatrix}0\\u_2\\\vdots\\u_n\end{pmatrix} + \frac{g_1}{\varphi_1}}_{bekannt}.$$

Durch eine nochmalige Quadratur ergibt sich die Funktion u_1, woraus dann gemäß Ansatz (5) die Funktionen $y_1 \ldots y_n$ erhältlich sind. qed.

Beispiel (zum Reduktionssatz):

$$\binom{\dot y_1}{\dot y_2} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2t} & \dfrac{1}{2t^2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2t} \end{pmatrix}}_{A} \binom{y_1}{y_2} \quad (t \neq 0)$$

$\varphi(t) = \binom{\varphi_1(t)}{\varphi_2(t)} = \binom{1}{t}$ ist eine Lösung von $\dot y = Ay$, denn

$$\dot\varphi = \binom{0}{1} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2t} & \dfrac{1}{2t^2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2t} \end{pmatrix} \binom{1}{t} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2t} + \dfrac{1}{2t} \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \end{pmatrix} = \binom{0}{1}$$

$$\Downarrow$$

Reduktionsansatz:

$$y = \binom{y_1}{y_2} = u_1\varphi + \binom{0}{u_2} = u_1\binom{1}{t} + \binom{0}{u_2} = \binom{u_1}{u_1 t + u_2}$$

$$\dot y = \binom{\dot y_1}{\dot y_2} = \binom{\dot u_1}{\dot u_1 t + u_1 + \dot u_2}$$

$\dot y = Ay$ liefert:

$$\dot y = \begin{pmatrix} \dot u_1 \\ \dot u_1 t + u_1 + \dot u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2t} & \dfrac{1}{2t^2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_1 t + u_2 \end{pmatrix}$$

also

$$\dot{u}_1 = -\frac{1}{2t}\,u_1 + \frac{1}{2t^2}\,(u_1 t + u_2) = \frac{1}{2t^2}\,u_2 \tag{8}$$

$$\dot{u}_1 t + u_1 + \dot{u}_2 = \frac{1}{2}\,u_1 + \frac{1}{2t}\,(u_1 t + u_2) = u_1 + \frac{u_2}{2t}$$

$$\dot{u}_1 t + \dot{u}_2 = \frac{u_2}{2t} \tag{9}$$

Setze (8) in (9) ein $\Rightarrow \left(\frac{1}{2t^2}\,u_2\right) t + \dot{u}_2 = \frac{u_2}{2t}$

Als verbleibendes Restsystem ergibt sich somit $\boxed{\dot{u}_2 = 0}$

Allgemeine Lösung des Restsystems: $u_2 = C$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \qquad \dot{u}_1 &= \frac{u_2}{2t^2} = \frac{C}{2t^2} \\ u_1 &= \frac{C}{2}\int \frac{dt}{t^2} = -\frac{C}{2}\,\frac{1}{t} + K \end{aligned}$$

Das liefert die Lösung des ursprünglichen DGL-Systems gemäß Ansatz:

$$\begin{aligned} y_1 = u_1 \qquad &= \quad -\frac{C}{2t} + K \\ y_2 = u_1 t + u_2 \quad &= \quad -\frac{C}{2} + Kt + C = \frac{C}{2} + Kt \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{\Rightarrow y = \binom{y_1}{y_2} = K_1 \binom{1}{t} + K_2 \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{t} \\ 1 \end{pmatrix}}} \qquad \begin{aligned} K_1 &:= K \\ K_2 &:= \frac{C}{2} \end{aligned}$$

Allgemeine Lösung

11.7.2 Homogene Systeme

Seien $y^1 := \begin{pmatrix} y_1^1(t) \\ \vdots \\ y_n^1(t) \end{pmatrix}, \ldots, y^m := \begin{pmatrix} y_1^m(t) \\ \vdots \\ y_n^m(t) \end{pmatrix}$

m Lösungen ("Lösungskurven" im $\mathbb{R}^n$) des homogenen Systems $\dot{y} = Ay$.

Dann ist auch $y = C_1 y^1 + \ldots + C_m y^m$ eine Lösung des homogenen Systems bei beliebiger Wahl von Konstanten $C_1, \ldots, C_m$.
(da $Ay = A(\sum\limits_{k=1}^{m} C_k y^k) = \sum\limits_{k=1}^{m} C_k A y^k = \sum\limits_{k=1}^{m} C_k \dot{y}^k = \dot{y}$)

Erinnerung:
$y^1, \ldots, y^m$ sind **linear unabhängig** in (a, b).

$$\Updownarrow \ def$$

Aus

$$\sum_{i=1}^{m} C_i y^i(t) = 0 \quad \text{in} \quad (a, b) \tag{1}$$

folgt zwingend $C_1 = C_2 = \ldots = C_m = 0$.

Sei $m = n$. Dann ist (1) ist ein lineares homogenes (n, n)-Gleichungssystem für $C_1, \ldots C_n$ mit der Koeffizientendeterminante

$$D(t) := \left| y^1 \ldots y^n \right| = \begin{vmatrix} y_1^1 & \ldots & y_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ y_n^1 & \ldots & y_n^n \end{vmatrix}$$

Das zeigt:
$D(t_0) \neq 0$ für ein $t_0 \in (a,b)$
$\Rightarrow$ (5) ist nur trivial lösbar mit $C_1 = \ldots = C_n = 0$
$\Rightarrow y^1, \ldots, y^n$ sind linear unabhängig

Diese hinreichende Bedingung für lineare Unabhängigkeit von n Lösungskurven ist auch notwendig gemäß

Lemma (Liouville, Joseph, 1809 - 1882)
Sind $y^1(t), \ldots, y^n(t) \in \mathbb{R}^n$ Lösungen des homogenen linearen DGL-System

$$\dot{y}(t) = A(t) \cdot y(t), \quad a < t < b$$

so gilt für deren Determinante

$$D(t) := |y^1 \ldots y^n|$$

die Beziehung

$$D(t) = D(t_0) e^{\int\limits_{t_0}^{t} trA(\tau)d\tau} \tag{2}$$

mit beliebig wählbaren $t_0 \in (a,b)$;
$trA(t) := a_{11}(t) + a_{22}(t) + \ldots + a_{nn}(t) \sim$ **Spur** von A ("**trace**")

Beweis:

(Der Übersichtlichkeit halber wird $n = 3$ gewählt, der allgemeine Fall verläuft völlig analog)

Man hat (für $k = 1, 2, 3$)

$$\begin{array}{ccccccc} \dot{y}_1^k & = & a_{11}y_1^k & + & a_{12}y_2^k & + & a_{13}y_3^k \\ \dot{y}_2^k & = & a_{21}y_1^k & + & a_{22}y_2^k & + & a_{23}y_3^k \\ \dot{y}_3^k & = & a_{31}y_1^k & + & a_{32}y_2^k & + & a_{33}y_3^k \quad ; \end{array}$$

$$\frac{d}{dt}D = \underbrace{\begin{vmatrix} \dot{y}_1^1 & \dot{y}_1^2 & y_1^3 \\ y_2^1 & y_2^2 & y_2^3 \\ y_3^1 & y_3^2 & y_3^3 \end{vmatrix}}_{=:\triangle_1} + \underbrace{\begin{vmatrix} y_1^1 & y_1^2 & y_1^3 \\ \dot{y}_2^1 & \dot{y}_2^2 & \dot{y}_2^3 \\ y_3^1 & y_3^2 & y_3^3 \end{vmatrix}}_{=:\triangle_2} + \underbrace{\begin{vmatrix} y_1^1 & y_1^2 & y_1^3 \\ y_2^1 & y_2^2 & y_2^3 \\ \dot{y}_3^1 & \dot{y}_3^2 & \dot{y}_3^3 \end{vmatrix}}_{=:\triangle_3}$$

$$\triangle_1 = \begin{vmatrix} a_{11}y_1^1 + a_{12}y_2^1 + a_{13}y_3^1 & a_{11}y_1^2 + a_{12}y_2^2 + a_{13}y_3^2 & a_{11}y_1^3 + a_{12}y_2^3 + a_{13}y_3^3 \\ y_2^1 & y_2^2 & y_2^3 \\ y_3^1 & y_3^2 & y_3^3 \end{vmatrix}$$

Subtrahiere das a_{12}-fache der Zeile 2 von Zeile 1
Subtrahiere das a_{13}-fache der Zeile 3 von Zeile 1

$$= \begin{vmatrix} a_{11}y_1^1 & a_{11}y_1^2 & a_{11}y_1^3 \\ y_2^1 & y_2^2 & y_2^3 \\ y_3^1 & y_3^2 & y_3^3 \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \cdot D$$

Ebenso ergibt sich

$$\triangle_2 = \begin{vmatrix} y_1^1 & y_1^2 & y_1^3 \\ a_{21}y_1^1 + a_{22}y_2^1 + a_{23}y_3^1 & a_{21}y_1^2 + a_{22}y_2^2 + a_{23}y_3^2 & a_{21}y_1^3 + a_{22}y_2^3 + a_{23}y_3^3 \\ y_3^1 & y_3^2 & y_3^3 \end{vmatrix}$$

Subtrahiere das a_{21}-fache der Zeile 1 von Zeile 2
Subtrahiere das a_{23}-fache der Zeile 3 von Zeile 2

$$= \begin{vmatrix} y_1^1 & y_1^2 & y_1^3 \\ a_{22}y_2^1 & a_{22}y_2^2 & a_{22}y_2^3 \\ y_3^1 & y_3^2 & y_3^3 \end{vmatrix}$$

$$= a_{22} \cdot D.$$

Analog gilt $\triangle_3 = a_{33}D$, so dass

$$\frac{d}{dt}D = (a_{11} + a_{22} + a_{33})\,D = (trA) \cdot D$$

trennbare DGL 1.0. für $D(t)$

$$\int \frac{dD}{D} = \int tr\, A(t)\, dt$$

$$\ln|D| = \underbrace{\int_{t_0}^{t} tr\, A(\xi)\, d\xi}_{\substack{\text{Stammfunktion von } tr\, A(t) \\ \text{für beliebiges } t_0 \in (a,b)}} + C_1$$

$$D(t) = C_0\, e^{\int_{t_0}^{t} tr\, A(\xi) d\xi}, \quad C_0 = \pm e^{C_1}$$

$$t = t_0 \Rightarrow D(t_0) = C_0$$

also $\quad D(t) = D(t_0)\, e^{\int_{t_0}^{t} tr\, A(\xi) d\xi}, \qquad qed.$

Das Lemma zeigt:
Entweder gilt $D(t) \equiv 0$ für $a < t < b$ oder $D(t)$ besitzt überhaupt keine Nullstelle in (a, b).

Daher gilt:

Die Lösungen $y^1(t), \ldots, y^n(t)$ von $\dot{y} = Ay$ sind linear unabhängig
$\Updownarrow$ (3)
$D(t) = \lvert y_1(t) \ldots y_n(t) \rvert \neq 0$ für ein $t = t_0 \in (a, b)$

Definition:
Ein Funktionensystem $\{y^1, \ldots, y^n\}$ von n linear unabhängigen Lösungen des homogenen Systems $\dot{y} = Ay$ heißt **Fundamentalsystem** (FS) oder auch **Lösungsbasis**.

Satz 2:
Sind die Elemente $a_{ik}(t)$ der Matrix A stetige Funktionen auf (a,b), dann besitzt $\dot{y} = Ay$ stets ein Fundamentalsystem auf (a,b).

Beweis:
Nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz ist jedes AWP $\{\dot{y} = Ay,\ y(t_0) = y^0\}$ eindeutig lösbar.
(bei beliebiger Vorgabe von $t_0 \in (a,b), y^0 \in \mathbb{R}^n$)

$$\Downarrow$$

Die n verschiedenen AWP:

$$y(t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = e_1,\ y(t_0) = e_2, \ldots, y(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_n$$

besitzen eindeutig bestimmte Lösungen $y^1(t), \ldots y^n(t)$ von $\dot{y} = Ay$.

Für diese n Lösungskurven gilt

$$D(t_0) = \begin{vmatrix} y_1^1(t_0) & \dots & y_1^n(t_0) \\ \vdots & & \vdots \\ y_n^1(t_0) & \dots & y_n^n(t_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Daher sind $y^1(t), \dots, y^n(t)$ linear unabhängig, bilden also ein Fundamentalsystem, qed.

Satz 3:
Sei $\{y^1, \dots, y^n\}$ ein Fundamentalsystem von $\dot{y} = Ay$, $A = (a_{ik}(t))_{(n,n)}$, $a_{ik}(t)$ stetig für $t \in (a, b)$.
Jede Lösung $\varphi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_n(t) \end{pmatrix}$ des homogenen Systems $\dot{y} = Ay$ lässt sich darstellen als Linearkombination des Fundamentalsystems, d. h. es existieren Konstante $d_1, \dots, d_n$ derart, dass $\varphi(t) \equiv d_1 y^1(t) + \dots + d_n y^n(t)$.

$\left\{ \sum\limits_{i=1}^{n} C_i y^2(t) \,\middle|\, C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R} \right\} \sim$ **allgemeine Lösung** des homogenen Systems

Beweis:
Sei $t_0 \in (a,b)$ beliebig (fest) gewählt. Gemäß (3) gilt dann

$$D(t_0) = \left| y^1(t_0) \ldots y^n(t_0) \right| \neq 0, \tag{4}$$

da $y^1, \ldots, y^n$ linear unabhängig sind.

Betrachte:

$$K_0 \varphi(t_0) + K_1 y^1(t_0) + \ldots + K_n y^n(t_0) = 0 \tag{5}$$

n homogene lineare Gleichungen
$n+1$ Variable $K_0, \ldots, K_n$

$\Downarrow$

$\exists$ nichttriviale Lösung $(K_0, \ldots, K_n) \neq (0, \ldots, 0)$.

Wäre $K_0 = 0$ in dieser Lösung, so erhielte man aus (5) das homogene lineare (n,n)-(Rest-)System

$$y^1(t_0)K_1 + \ldots + y^n(t_0)K_n = 0 \tag{6}$$

mit der nichttrivialen Lösung $(K_1, \ldots, K_n) \neq (0, \ldots, 0)$. Die Koeffizientendeterminante von (6) ist gerade $D(t_0) = \left| y^1(t_0) \ldots y^n(t_0) \right|$; wegen (4) gilt $D(t_0) \neq 0$, so dass (6) nur trivial lösbar sein könnte, $\underset{\circ}{\bigtriangledown}$.

Daher gilt $K_0 \neq 0$.

Mit diesen Konstanten $K_0, \ldots, K_1$ bilden wir

$$\psi(t) := K_0\varphi(t) + K_1 y^1(t) + \ldots + K_n y^n(t) \qquad (7)$$

$\to$ $\psi(t)$ ist Lösung von $\dot{y} = Ay$ (als LK von Lösungen)
$\to$ $\psi(t)$ löst das AWP $\psi(t_0) = 0 \in \mathbb{R}^n$

[Das ist gerade Inhalt von (5)]

Dieses AWP wird auch von der (trivialen) Lösung $y(t) \equiv 0$ gelöst

$\Downarrow$ Ex. - u. Eindeutigkeitssatz

$\psi(t) \equiv 0$

$\Downarrow$ (7), $K_0 \neq 0$

$$\varphi(t) \equiv \left(-\frac{K_1}{K_0}\right) y^1(t) + \ldots + \left(-\frac{K_n}{K_0}\right) y^n(t)$$

Das ist die Behauptung, qed.

Folgerung
Die Menge aller Lösungen von $\dot{y} = Ay$ ist ein $n-$dimensionaler Vektorraum.
Jedes FS von $\dot{y} = Ay$ ist eine Basis dieses Vektorraums.
Je $n + 1$ Lösungen von $\dot{y} = Ay$ sind linear abhängig.

11.7.3 Inhomogene Systeme

Satz (Überlagerungssatz, Superposition)
Sei y^0 irgendeine spezielle Lösung des inhomogenen Systems $\dot{y}(t) = Ay(t) + g(t), t \in (a,b)$. Dann gilt:

$$\begin{bmatrix} \overline{y} \text{ ist Lösung des} \\ \text{inhomogenen Systems} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow [\overline{y} = y_H + y_0]$$

wobei y_H eine Lösung des homogenen Systems ist.

$$\left\{\begin{matrix}\textbf{Allg. Lösg.} \\ \textbf{inhomogen}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\textbf{Allg. Lösg.} \\ \textbf{homogen}\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\textbf{Spezielle Lösg.} \\ \textbf{inhomogen}\end{matrix}\right\}$$

Beweis:

$\Rightarrow$: Gelte $\dot{\overline{y}} = A\overline{y} + g$, setze $\varphi := \overline{y} - y^0$

$$\rightarrow \dot{\varphi} = \dot{\overline{y}} - \dot{y}^0 = A\overline{y} + g - (Ay^0 + g) = A(\overline{y} - y^0) = A\varphi$$

also: $y_H := \varphi$ ist Lösung des homogenen Systems und es gilt $\overline{y} = \varphi + y^0 = y_H + y^0$, qed. $\Rightarrow$.

$\Leftarrow$ Sei y_H eine Lösung des homogenen Systems, setze $\overline{y} := y_H + y^0$

$$\begin{aligned} \rightarrow \dot{\overline{y}} = \dot{y}_H + \dot{y}^0 = (Ay_H) + (Ay^0 + g) &= A(y_H + y^0) + g \\ &= A\overline{y} + g \end{aligned}$$

also: $\overline{y}$ ist Lösung des homogenen Systems, qed. $\Leftarrow$.

Der Überlagerungssatz zeigt:

Zur Lösung eines inhomogenen linearen DGL-Systems ist die Kenntnis eines Fundamentalsystems (FS) des zugehörigen homogenen Systems (- "allgemeine Lösung homogen" -) und einer (einzigen) speziellen Lösung des inhomogenen Systems erforderlich.

Liegt ein FS vor, so lässt sich eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems ermitteln durch

Variation der Konstanten:

Sei $\left\{y^1(t), \ldots, y^n(t)\right\}$ ein FS von $\dot{y} = Ay$

$$y = \sum_{k=1}^{n} C_k y^k(t) \sim \text{allgemeine Lösung homogen}$$

Ansatz
(zur Ermittlung einer speziellen Lösung inhomogen):

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{k=1}^{n} C_k(t) y^k(t) \qquad (1) \\ \dot{y} &= \sum_{k=1}^{n} \dot{C}_k y^k + \sum_{k=1}^{n} C_k \dot{y}^k \end{aligned}$$

Einsetzen in das System $\dot{y} = Ay + g$ liefert:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \dot{C}_k y^k + \sum_{k=1}^{n} C_k \dot{y}^k &= A\left(\sum_{k=1}^{n} C_k y^k\right) + g \\ &= \sum_{k=1}^{n} C_k \underbrace{Ay^k}_{\dot{y}^k} + g \end{aligned}$$

also $\qquad \sum \dot{C}_k y^k = g$

Dieses lineare Gleichungssystem für $\dot{C}_1, \ldots, \dot{C}_n$ heißt ausführlich

$$\begin{pmatrix} y_1^1 & \ldots & y_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ y_n^1 & \ldots & y_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{C}_1 \\ \vdots \\ \dot{C}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} \tag{2}$$

mit der Koeffizientendeterminante $D(t) = |y^1 \ldots y^n|$.

Es gilt $D(t) \neq 0$ für alle $t \in (a,b)$, da $\left\{y^1 \ldots y^n\right\}$ ein FS ist.

$$\Downarrow$$

(2) ist eindeutig lösbar mit der Lösung

$$\dot{C}_k(t) = \frac{D_k(t)}{D(t)},$$

wobei $D_k(t) := \left|y^1 \ldots y^{k-1}, g, y^{k+1} \ldots y^n\right|$, (CRAMER), so dass

$$C_k(t) = \int \frac{D_k(t)}{D(t)}\,dt, \quad k = 1, \ldots, n$$

$$\Downarrow$$

$y^0(t) := \sum_{k=1}^{n} \left(\int \frac{D_k(t)}{D(t)}\,dt \right) y^k(t) \sim$ spez. Lösg. inhomogen

und

$$\boxed{\begin{array}{r} y(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k y^k(t) + \sum_{k=1}^{n} y^k(t) \int \frac{D_k(t)}{D(t)}\,dt \\ \text{allgemeine Lösung des inhomgenen Systems} \end{array}}$$

Beispiel (zur Variation der Konstanten):

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2t} & \dfrac{1}{2t^2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2t} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}}_{g}, \quad t > 0$$

$y^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$, $y^2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{t} \\ 1 \end{pmatrix}$ $\sim$ Lösg. des hom. Systems

[vgl. Beispiel zum Reduktionssatz $\uparrow$]

$$D(t) = |y^1(t), y^2(t)| = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{t} \\ t & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

$\Rightarrow \left\{y^1, y^2\right\}$ ist Fundamentalsystem.

Ansatz
(zur Bestimmung einer speziellen Lösung inhomogen):

$$y(t) = C_1(t)y^1(t) + C_2(t)y^2(t)$$

$$\Downarrow (2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{t} \\ t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{C}_1 \\ \dot{C}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$$

das heißt:

$$t\dot{C}_1 - \dot{C}_2 = t^2$$

$$t\dot{C}_1 + \dot{C}_2 = t^2$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{C}_2 = 0,\ \dot{C}_1 = t$$

Integration liefert: $\quad C_1 = \frac{t^2}{2},\ C_2 = 0$

(Integrationskonstanten sind beliebig fixierbar, da nur <u>eine</u> spezielle Lösung inhomogen erforderlich ist.)

$$\Downarrow$$

$$\boxed{y^0(t) = C_1 y^1 + C_2 y^2 = \frac{t^2}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} \frac{-1}{t} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}}$$

spezielle Lösung inhomogen

Allgemeine Lösung:

$$\boxed{y(t) = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} \frac{-1}{t} \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}}$$

$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ beliebig wählbar

Ergänzung:

Analog zum Vorgehen bei einer linearen DGL $n-$ter Ordnung $L[y] = f$ lässt sich auch bei linearen DGL-Systemen $\dot{y} = Ay + g$ eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems u. U. durch einen "zugeschnittenen" Ansatz (mit nachfolgendem Koeffizientenvergleich) ermitteln.

Dabei ist der Aufwand oft geringer als bei der Variation der Kostanten.
Die Art des Ansatzes richtet sich nach der "Funktionenklasse" der Komponenten der Vektoren $g, \dot{g}, Ag$
(- falls es eine derartige endliche Funktionenklasse $\varphi_1, \ldots, \varphi_m : (a, b) \to \mathbb{R}^1$ gibt -).
Ein solcher Ansatz kann erfolgreich sein, muss es aber nicht.

Beispiel: (Ansatzverfahren zur Bestimmung einer speziellen Lösung inhomogen)

$$\dot{y} = Ay + g, \quad y = \binom{y_1}{y_2},\ A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},\ g = \binom{0}{2e^t}$$

also: $\dot{y}_1 = 4y_1 + y_2$

$\dot{y}_2 = -2y_1 + y_2 + 2e^t$

Ansatz: $y^0 = \binom{\alpha}{\beta} e^t$

$$\Downarrow \quad \dot{y} = Ay + g$$

$$\binom{\alpha}{\beta} e^t = A\binom{\alpha}{\beta} e^t + \binom{0}{2e^t} \qquad | : e^t$$

$$\binom{\alpha}{\beta} = A\binom{\alpha}{\beta} + \binom{0}{2}$$

also: $\alpha = 4\alpha + \beta$

$\beta = -2\alpha + \beta + 2$

bzw. $3\alpha + \beta = 0$

$2\alpha \qquad = 2$

$\Downarrow$

$\alpha = 1,\ \beta = -3$

$$\boxed{y^0 = \binom{1}{-3} e^t \text{ ist spezielle Lösung inhomogen}}$$

(Probe!)

11.7.4 Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten

$$\dot{y} = Ay + g, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$g = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix}, \; y = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$$

$a_{ik} \sim$ reelle Konstante

(A) Homogenes System

$\dot{y} = Ay$

Lösungsansatz: $y = v \cdot e^{\lambda t}$, wobei $v := \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ (1)

Frage:
Gibt es reelle (komplexe) Zahlen $\lambda, v_1, \dots, v_n$ derart, dass (1) eine Lösung von $\dot{y} = Ay$ ist?

$\dot{y} = \lambda v e^{\lambda t}$

$$\Big\downarrow \; \dot{y} = Ay$$

$\lambda v e^{\lambda t} = A(v e^{\lambda t}) \qquad | : e^{\lambda t} \neq 0$

$\lambda v = Av$

$$\boxed{(A - \lambda E)v = 0 \quad \text{Eigenwertproblem} \qquad (2)}$$

(2) besitzt genau dann eine nichttriviale Lösung $(v_1, \ldots, v_n) \neq (0, \ldots, 0)$, wenn $P_A(\lambda) := |A - \lambda E| = 0$.

$$P_A(t) := \begin{vmatrix} a_{11} - t & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - t & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - t \end{vmatrix} \qquad (3)$$

$$= c_n t^n + c_{n-1} t^{n-1} + \ldots + c_1 t + c_0$$

Charakteristisches Polynom

Koeffizienten von $P_A(t)$:

$c_n = (-1)^n$

$c_{n-1} = (-1)^{n-1} \underbrace{(a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn})}$

$\vdots$ $\qquad$ $trA \sim$ "Spur", "trace" von A

$c_0 = detA$

Das liefert:

Es gibt eine Lösung von $\dot{y} = Ay$ in der Form $y = ve^{\lambda t}$ mit $v \neq 0$

$$\Updownarrow$$

λ ist Nullstelle des charakteristischen Polynoms $P_A(t)$.

$P_A(t)$ besitzt - wie jedes Polynom $n-$ten Grades - genau n reelle oder komplexe Nullstellen (, wobei mehrfache Nullstellen auch mehrfach gezählt werden), d. h.

$$P_A(t) = (-1)^n (t-\lambda_1)^{\mu_1}(t-\lambda_2)^{\mu_2} \cdot \ldots \cdot (t-\lambda_r)^{\mu_r}$$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ paarweise verschieden, "**Eigenwerte**" von A
$\mu_1 + \ldots + \mu_r = n$

Ist allgemein λ eine $\mu-$fache Nullstelle von $P_A(t)$, so gibt es μ zugehörige linear unabhängige Lösungen von $\dot{y} = Ay$ der Form

$$y = \begin{pmatrix} Q_{k1}(t) \\ \vdots \\ Q_{kn}(t) \end{pmatrix} e^{\lambda t}, \quad k = 0, \ldots, \mu - 1, \qquad (4)$$

wobei $Q_{k1}, \ldots, Q_{kn}$ jeweils ein Polynom vom Höchstgrad k ist. Das gilt auch für nicht-reelles λ, wenn für $Q_{k1}, \ldots, Q_{kn}$ Polynome mit komplexen Koeffizienten zugelassen werden.
Ist die Nullstelle λ nicht reell, so ist auch die konjugiert komplexe Zahl $\overline{\lambda}$ eine Nullstelle von (3); die Aufspaltung von (4) in Real- und Imaginärteil liefert ein System von 2μ linear unabhängigen reellen Lösungen von $\dot{y} = Ay$.

Von den Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ seien

$$(\lambda_1, \overline{\lambda}), \ldots, (\lambda_s, \overline{\lambda}_s)$$

gerade alle Paare konjugiert-komplexer Nullstellen (d. h. $\overline{\lambda}_1 = \lambda_{s+1}, \ldots, \overline{\lambda}_s = \lambda_{2s}$ und $\mu_1 = \mu_{s+1}, \ldots, \mu_s = \mu_{2s}$) und $\lambda_{2s+1}, \ldots, \lambda_r$ seien die reellen Nullstellen.
Dann erhält man gemäß (4) insgesamt

$$2\mu_1 + \ldots, 2\mu_s + \mu_{2s+1} + \ldots + \mu_r = \mu_1 + \ldots + \mu_r = n$$

verschiedene Lösungen.
Diese n Lösungen bilden ein Fundamentalsystem.

Die Lösungen (4) findet man i. Allg. am einfachsten, indem man mit (4) als Ansatz in das System $\dot{y} = Ay$ hineingeht.

Insbesondere gilt:

Unter den Lösungen befinden sich (gemäß (4) für $k = 0$) stets Lösungen der Form $y^1 = v^1 e^{\lambda_1 t}, \ldots, y^r = v^r e^{\lambda_r t}$ wobei $v^1, \ldots, v^r$ Vektoren des $\mathbb{R}^n$ sind, deren Komponenten konstant (unabhängig von t) sind.

Sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sämtlich einfache Nullstellen (also $r = n$ und $\mu_1 = \ldots = \mu_n = 1$), so gibt es mithin ein Fundamentalsystem $\left\{y^1, \ldots, y^n\right\} = \left\{v^1 e^{\lambda_1 t}, \ldots, v^n e^{\lambda_n t}\right\}$ mit $v^1, \ldots, v^n \in \mathbb{R}^n$.

(B) Inhomogenes System

$\dot{y} = Ay + g(t), \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}; g(t), y(t) \in \mathbb{R}^n$

Die Ermittlung einer speziellen Lösung des inhomogenen Systems erfolgt wie im allgemeinen Fall linearer Systeme durch Variation der Konstanten (falls ein FS bekannt ist) oder durch geeignete Ansatzverfahren.

Hat etwa $g(t)$ die Form

$$g(t) = (b^0 + b^1 t + \ldots + b^s t^s)e^{\varrho t} \tag{5}$$

mit $b^0, b^1, \ldots, b^s \in \mathbb{R}^n, b^s \neq 0, \varrho$ reell, so führt der Ansatz

$$y^0(t) = (B^0 + B^1 t + \ldots + B^m t^m)e^{\varrho t} \tag{6}$$

zu einer speziellen Lösung $y^0(t)$ des inhomogenen Systems. $B^0, B^1, \ldots, B^m \in \mathbb{R}^n$ sind dabei aus $\dot{y}^0 = Ay^0 + g$ zu bestimmende Koeffizientenvektoren. Ist ϱ <u>keine</u> Nullstelle des charakteristischen Polynoms $P_A(t) = |A - tE|$, so ist $m = s$ wählbar. Ist ϱ eine Nullstelle von $P_A(t)$ mit der Vielfachheit $\mu \geq 1$, so ist $m = s + \mu$ anzusetzen.

(Der Ansatz (6) führt dann auf ein eindeutig lösbares Gleichungssystem für die Komponenten von $B^0, B^1, \ldots, B^m$; das liefert den "Erfolgsnachweis" dieses Ansatzes.)

Beispiel (Lineares DGL-System mit konstanten Koeffizienten)

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3t \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

(A) Homogenes System:

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} y = Ay$$

Ansatz:

$$\begin{array}{rcll} y & = & ve^{\lambda t}, \quad v = \binom{v_1}{v_2} & \\ & \Downarrow & \dot{y} = Ay & \\ \lambda v e^{\lambda t} & = & A v e^{\lambda t} & \mid : e^{\lambda t} \\ (A - \lambda E)v & = & 0 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} P_A(t) &= |A - tE| \\ &= \begin{vmatrix} 4-t & 1 \\ -2 & 1-t \end{vmatrix} \\ &= (4-t)(1-t) + 2 \\ &= t^2 - 5t + 6 \end{aligned}$$

Nullstellen von $P_A(t)$: $t = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6} = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3 \qquad \text{Eigenwerte von } A}$

Lösung y^1 bzgl. $\lambda_1 = 2$:

$$(A - \lambda_1 E)v = 0$$

$$\begin{pmatrix} 4-2 & 1 \\ -2 & 1-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$2v_1 + v_2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$ mit beliebig wählbarem $c \in \mathbb{R}$; etwa $c = 1$

$$y^1 = \begin{pmatrix} y_1^1(t) \\ y_2^1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{2t}$$

<u>Lösung y^2 bzgl. $\lambda_2 = 3$:</u>

$(A - \lambda_2 E)v = 0$

$$\begin{pmatrix} 4-3 & 1 \\ -2 & 1-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

$v_1 + v_2 = 0$

$$\Downarrow$$

$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit beliebig wählbarem $c \in \mathbb{R}$;
etwa $c = 1$

$$\underline{\underline{y^2 = \begin{pmatrix} y_1^2(t) \\ y_2^2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}}}$$

$\{y^1, y^2\}$ ist ein Fundamentalsystem.

$$\boxed{y = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}}$$

Allgemeine Lösung des homogenen Systems

(B) Inhomogenes System

Die vorgegebene "Störfunktion" $g(t) = \begin{pmatrix} 3t \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$ besitzt die in (5) angegebene Form mit $s = 1$. Der Koeffizient $\varrho = -1$ des Exponentialanteils (e^{-t}) ist <u>kein</u> Eigenwert von A, daher ist im Ansatz (6) $m = s = 1$ wählbar. $\Rightarrow$

Ansatz:

$$y^0(t) = \left(\binom{a}{\alpha} + \binom{b}{\beta} t\right) e^{-t} = \begin{pmatrix} (a+bt)e^{-t} \\ (\alpha + \beta t)e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\dot{y}^0(t) = \left(\binom{b}{\beta} - \binom{a}{\alpha} - \binom{b}{\beta} t\right) e^{-t}$$

$\dot{y}^0(t) = Ay^0(t) + g(t)$ liefert:

$$\begin{pmatrix} b - a - bt \\ \beta - \alpha - \beta t \end{pmatrix} e^{-t} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a + bt \\ \alpha + \beta t \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 3t \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} \qquad | : e^{-t}$$

$$\begin{pmatrix} b - a - bt \\ \beta - \alpha - \beta t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4(a+bt) + \alpha + \beta t + 3t \\ -2(a+bt) + \alpha + \beta t + 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (5b + \beta + 3)t + (5a - b + \alpha) &= 0 \\ (-2b + 2\beta)t + (-2a + 2\alpha - \beta + 1) &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

Koeffizientenvergleich in (7) liefert für a, b, α, β das lieare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 5b \quad\quad + \beta &= -3 && (8)\\ 5a \;\; - b + \alpha \quad\quad &= 0 && (9)\\ -2b \quad + 2\beta &= 0 && (10)\\ 2a \quad\quad - 2\alpha + \beta &= 1 && (11) \end{aligned}$$

Aus (10) folgt $\beta = b$, zusammen mit (8) ergibt das

$$\underline{\underline{b = \beta = -\frac{1}{2}}} \quad .$$

Das Restsystem (9), (11) lautet dann

$$5a \; + \alpha = -\frac{1}{2}$$

$$2a - 2\alpha = \frac{3}{2}$$

mit der Lösung $\underline{\underline{a = \frac{1}{24}, \; \alpha = -\frac{17}{24}}}$.

$\Downarrow$

$$y^0(t) = \begin{pmatrix} a + bt \\ \alpha + \beta t \end{pmatrix} e^{-t} = \begin{pmatrix} \frac{1}{24} & -\frac{t}{2} \\ & \\ -\frac{17}{24} & -\frac{t}{2} \end{pmatrix} e^{-t}$$

Spezielle Lösung y^0 des inhomogenen Systems

(Probe!)

$$y(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + \begin{pmatrix} \frac{1}{24} - \frac{t}{2} \\ -\frac{17}{24} - \frac{t}{2} \end{pmatrix} e^{t}$$

Allgemeine Lösung des inhomogenen Systems