Gewöhnliche Differentialgleichungen (DGL)

§1.Definition und Beispiele

1) Linearer ungedämpfter Federpendel

$$m\ddot{x} + cx = 0$$

$x(t)$ =Auslenkung zum Zeitpunkt t
m =Masse, c=Federkonstante

2) Gesetze von Faraday und Coulomb

$$L\frac{di_L}{dt} = v_L \quad , \quad C\frac{dv_C}{dt} = i_C$$

i=Strom, v=Spannung

3) Radioaktiver Zerfall

$$\frac{dn}{dt} = -\lambda n$$

$n(t)$ = Teilchenanzahl zum Zeitpunkt t
λ =radioaktive Zerfallskonstante

<u>Definition</u> DGL n-ter Ordnung

Eine Gleichung zwischen einer Funktion und ihren Ableitungen heißt gewöhnliche DGL. Die Ordnung n der DGL ist die Ordnung der höchsten Ableitung:

$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$, implizite DGL

$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$, explizite DGL

Eine Lösung $y(x)$ der DGL ist eine Funktion $y(x)$, die diese Gleichung erfüllt.

Beispiele

1) DGL: $y' - y = 0$
Lösung: $y = Ce^x, C \in \mathbb{R}$

2) DGL: $\ddot{x} + x = 0$
Lösung $x = C_1 \cdot \cos t + C_2 \cdot \sin t;\; C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Definition

a) Die Menge aller Lösungen bildet die allgemeine Lösung einer DGL.
b) Eine Lösung, die zusätzliche Bedingungen erfüllt, heißt partikuläre Lösung.
c) DGL und eine Bedingung = Anfangswertproblem (AWP)
DGL und mehrere Bedingungen = Randwertproblem (RWP).

Satz

Die allgemeine Lösung einer DGL n-ter Ordnung ist eine Kurvenschar mit n Parametern. Umgekehrt besitzt eine solche Schar eine zugehörige DGL n-ter Ordnung.

Übung 1

Finden Sie die partikuläre Lösung der DGL
a) aus Bsp 1 mit der Eigenschaft $y(0)=2$.
b) aus Bsp 2 mit $x(0)=1,\ \dot{x}(\pi)=-1$.

Übung 2

Finden Sie die zu der Kurvenschar
$y^2 = 2p\cdot x$ gehörige DGL.

§2. Differentialgleichungen 1. Ordnung

2.1. Geometrische Eigenschaften

A) Das Richtungsfeld der DGL

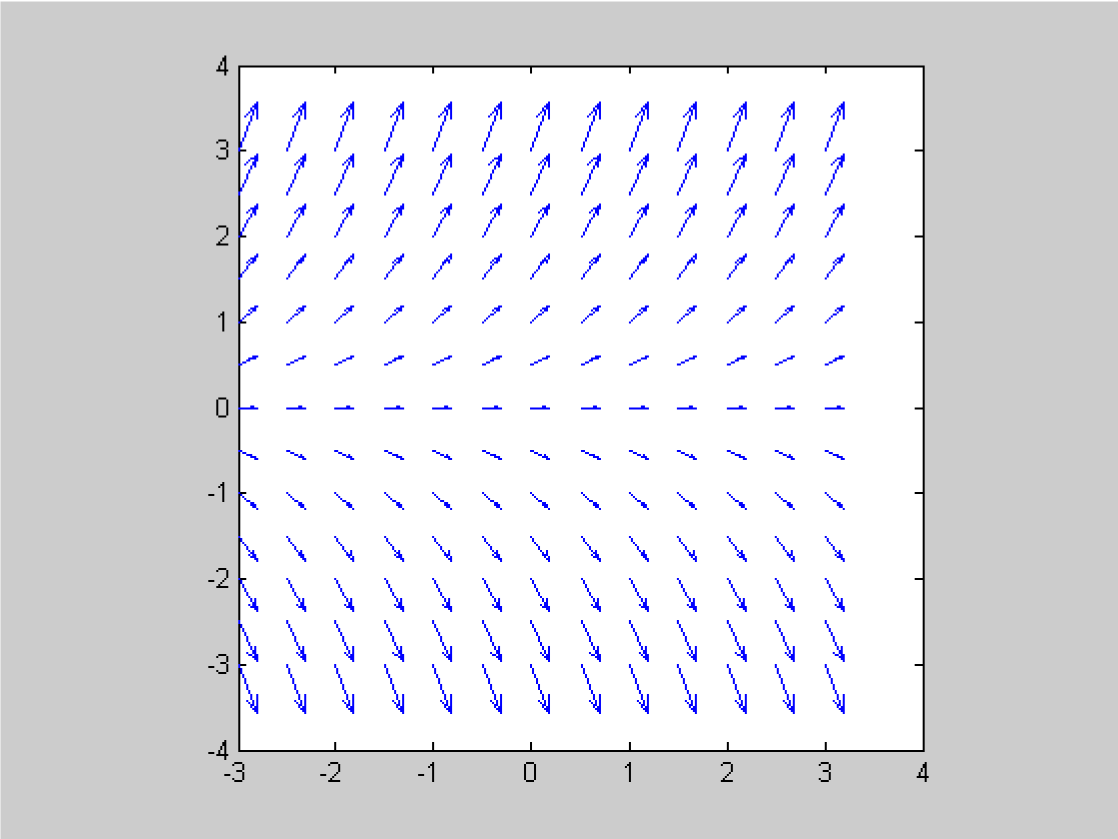
$$y' = f(x, y)$$

Die DGL gibt in jedem Punkt $P_0(x_0, y_0)$ die Steigung $m_0 = y'(x_0) = f(x_0, y_0)$ der Tangente an die Lösungskurve durch P_0.

Definition

a) Linienelement in P_0 = Ein kleiner Tangentenabschnitt an die Lösungskurve durch P_0.
b) Richtungsfeld der DGL=die Menge aller Linienelemente.

Beispiel $y' = y$



Übung

Skizzieren Sie das Richtungsfeld und die Lösungsschar der DGLs:

a) $xy' - y = 0$; b) $yy' + x = 0$.

Bemerkung: Der geometrische Verlauf der Lösungskurven läst sich im Richtungsfeld überblicken.

Satz (Existenz- und Eindeutigkeitssatz)
Durch jeden ’regulären’ Punkt P_0 verläuft genau eine Lösungskurve der DGL.

Folgesatz Lösungskurven einer DGL können sich in regulären Punkten nicht schneiden.

Bemerkung in ’singulären’ Punkten in denen $f(x, y)$ vom Typ $0/0$ ist, müssen die Aussagen der o.a. Sätze nicht stimmen

B) Orthogonaltrajektorien (OT)

Definition

Zwei Kurvenscharen $S_1,\ S_2$ sind orthogonal, wenn ihre Kurven sich jeweils unter einem rechten Winkel schneiden.

Ist S_1 gegeben, so erhält man S_2 so:

1) Wir ordnen S_1 ihre DGL zu.
2) Wir führen die Substitution

$$y' \to \frac{-1}{y'}$$

durch.
3) Wir lösen die neue DGL. Ihre allgemeine Lösung ist S_2.

Beispiel

Gegeben ist S_1 durch die Gleichung $y = C \cdot x$, $C \in \mathbb{R}$. Gesucht sind die OT.

Lösung

1) $\dfrac{y}{x} = C \Rightarrow \dfrac{xy' - y}{x^2} = 0 \Rightarrow xy' - y = 0$.

2) $xy' - y = 0 \to x\left(-\dfrac{1}{y'}\right) - y = 0$

3)

$$x\left(-\frac{1}{y'}\right)-y=0 \Rightarrow yy'+x=0 \Rightarrow y\frac{dy}{dx}+x=0$$

$$xdx+ydy=0 \Rightarrow x^2+y^2=R^2.$$

Ergebnis: Die Orthogonalschar der Ursprungsgeraden ist die Schar der 'Ursprungskreise'.

2.2. Einfach integrierbare Typen

Die separierbare DGL

Beispiel 1) $x \cdot y' = y$

Das Lösungsverfahren

formales Rechnen mit Differentialen

$$x \cdot y' = y \Leftrightarrow x \cdot \frac{dy}{dx} = y \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

$$\Leftrightarrow \ln|y| = \ln|x| + C \Leftrightarrow |y| = e^{\ln|x|+c}$$

$$= e^{\ln|x|} \cdot e^C = |x| \cdot e^C \Leftrightarrow |y| = |x| \cdot C, C > 0$$

$$\Leftrightarrow y = C \cdot x,\ C \in \mathbb{R}$$

Bemerkung

Die Konstanten werden ‚qualitativ' behandelt, d.h. Umformungen wie $e^C = C, \ln C = C$ usw. sind möglich und erwünscht um die Lösung der DGL möglichst einfach darzustellen.

(1) Die allgemeine separierbare DGL

$$y' = f(x) \cdot h(y)$$

* Tafel(aufschrieb): implizite Lösung

Beispiel 2) $y' = y$ Übung !

Ergebnis $y(x) = Ce^{x},\ C \in \mathbb{R}$

Beispiel 3) $y \cdot y' + x = 0$

* Tafel: Lösung

Ergebnis $x^2 + y^2 = C^2$, implizite Lösung.

Skizzen der Lösungsscharen 1-3 !

(2) Der Typ $y' = f(ax + by + c)$

Ansatz Substitution $u = ax + by + c$

Beispiel $y' = (x + y - 1)^2$

* Tafel: Lösung

Ergebnis $y(x) = \tan(x + C) - x + 1,\ C \in \mathbb{R}.$

(3) ÄhnlichkeitsDGL: $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

Ansatz Substitution $u = \frac{y}{x}$

Beispiel $xy' - y - x = 0$

* Tafel: Lösung

Ergebnis $y(x) = x \cdot \ln|x| + C \cdot x,\ C \in \mathbb{R}.$

$\boxed{\text{Hausaufgabe}}$ 1) Aufgaben BzM 6

2) $y' + 2xy = 2x$; 3) $xy' + \sqrt{x^2 + y^2} = y$.

Ergebnisse

$$y = Ce^{-x^2} + 1; \quad y = \frac{1}{2} \cdot \left(C^2 - \frac{x^2}{C^2} \right).$$

2.3. Die lineare DGL 1. Ordnung

Die Normalform:

$$f(x) \cdot y' + g(x) \cdot y = r(x)$$

Die Lösung:

1) Die Lösung der 'homogenen' DGL

$$f(x) \cdot y' + g(x) \cdot y = 0$$

als separierbare DGL.

2) Die Lösung der 'inhomogenen' DGL

$$f(x) \cdot y' + g(x) \cdot y = r(x)$$

durch 'Variation der Konstanten'.

<u>Beispiel</u> $xy' - y = \ln x$

Lösung:

1) Die homogene DGL

$$x\frac{dy}{dx} = y \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = \ln|x| + C$$

$$\Rightarrow y_h = C \cdot x \ , \ \ C \in \mathbb{R}.$$

2) Die Variation der Konstanten

$$x(C'(x)\cdot x + C(x)) - C(x)\cdot x = \ln x$$

$$\Rightarrow C'(x)\cdot x^2 + C(x)\cdot x - C(x)\cdot x = \ln x$$

$$\Rightarrow C'(x)\cdot x^2 = \ln x \Rightarrow C'(x) = \ln x / x^2$$

$$\Rightarrow C(x) = \int \frac{\ln x}{x^2}\,dx = -\frac{\ln x + 1}{x}$$

$$\Rightarrow y_p = C(x)\cdot x = -\ln x - 1.$$

3) Die allgemeine Lösung

$$y = y_h + y_p = C\cdot x - \ln x - 1$$

<u>Übung</u> $xy' + y = x^2 + 3x + 2$

Die lineare DGL 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Beispiel

Befindet sich ein Körper mit der Anfangstemperatur T_0 in einem Medium mit konstanter Temperatur T^* , so ist seine Temperaturänderung proportional zur Temperaturdifferenz, d.h. es gilt:

$$\frac{dT}{T} = -k(T - T^*) \text{ , } T(0) = T_0$$

Gesucht ist die Temperatur $T(t)$ des Körpers zum Zeitpunkt t.

Lösung:

$$\frac{dT}{T - T^*} = -k \cdot dt \Rightarrow \ln\left|T - T^*\right| = -kt + C$$

$$\Rightarrow T - T^* = Ce^{-kt} \Rightarrow T(t) = T^* + Ce^{-kt}$$

$$\Rightarrow T(0) = T^* + C = T_0 \Rightarrow C = T_0 - T^*$$

$$\Rightarrow T(t) = T^* + (T_0 - T^*) \cdot e^{-kt}.$$

<u>Übungen</u> BzM 6 , Bsp2.10 b, c Seite 45.

<u>2.4. Einfache Typen von DGL 2. Ordnung.</u>

1) Typ $y'' = f(x, y')$

Ansatz: Substitution $u = y'$

Beispiel: $xy'' - y' = \ln x$

2) Typ $y'' = f(y)$

Ansatz: Multiplikation mit dem integrierenden Faktor y'.

<u>Beispiel</u>: $y'' - 2y^3 = 0$, $y(0) = y'(0) = 1$

Lösung:

$$y'' - 2y^3 = 0 \Rightarrow 2y'y'' = 4y^3 y' \Rightarrow$$

$$\left(y'\right)^2 = y^4 + C_1 \; ; \; y(0) = y'(0) = 1 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$\Rightarrow \left(y'\right)^2 = y^4 \Rightarrow y' = +y^2 \Rightarrow \frac{dy}{y^2} = dx$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{y} = x + C_2 \Rightarrow y = -\frac{1}{x + C_2} ; y(0) = 1$$

$$\Rightarrow 1 = -\frac{1}{C_2} \Rightarrow C_2 = -1 \Rightarrow y = -\frac{1}{x-1} \; .$$

§3. Lineare DGLs höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten

3.1. Allgemeine Sätze und Bezeichnungen

Definitionen

1) Linearer Differentialoperator n-ter Ordnung

$$L_n[y] = a_n \cdot y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y$$

$$a_k = a_k(x),\ y^{(k)} = y^{(k)}(x),\ k = 0,1,\ldots,n$$

2) Lineare DGL n-ter Ordnung

$L_n[y] = 0$ homogene DGL (H-DGL)

$L_n[y] = r(x)$ inhomogene DGL mit Störfunktion $r(x)$

Sätze

1) Sind $y_1(x), y_2(x)$ Lösungen der H-DGL $L_n[y] = 0$, so ist auch die Linearkombination $C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x);\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ebenfalls eine Lösung.

2) Die allgemeine Lösung der H-DGL ist

$$y_h(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x) + ... + C_n(x) \cdot y_n(x)$$

wobei
$C_1, C_2, ..., C_n \in \mathbb{R}$ und $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ ein ‚Fundamentalsystem' von Lösungen der H-DGL bilden.

3) <u>Definition</u>: $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ bilden ein ‚Fundamentalsystem' wenn

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) & \dots & y'_n(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \dots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix} \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

4) Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL $L_n[y] = r(x)$ ist

$$\boxed{y(x) = y_p(x) + y_h(x)}$$

wobei $y_h(x)$ die Lösung der homogenen und $y_p(x)$ eine ‚partikuläre' Lösung der inhomogenen DGL ist.

3.2. Die lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

$$L_n[y] = a_n \cdot y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y$$
$$a_k \in \mathbb{R},\ y^{(k)} = y^{(k)}(x),\ k = 0,1,\ldots,n$$

I) Die Lösung der homogenen DGL

$$L_n[y] = 0$$

Ansatz $\boxed{y(x) = e^{\lambda \cdot x}, \lambda \in C}$

Damit wird die DGL zurückgeführt auf die Lösung der ‚charakteristischen Gleichung'

$$\boxed{P_n(\lambda) = a_n \cdot \lambda^n + a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot \lambda + a_0 = 0}$$

<u>Beispiel</u> $y''' - 7y' + 6y = 0$

<u>Ansatz</u> $\boxed{y(x) = e^{\lambda \cdot x}, \lambda \in C}$

wobei λ eine Lösung der charakteristischen Gleichung ist:

$$\lambda^3 - 7\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -3$$

Die Lösungen

$$y_1(x) = e^{1 \cdot x}, y_2(x) = e^{2 \cdot x}, y_3(x) = e^{-3 \cdot x}$$

bilden ein Fundamentalsystem der DGL und somit ist die allgemeine Lösung

$$y_h(x) = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{2x} + C_3 \cdot e^{-3x}$$

Die homogene DGL 2. Ordnung

$$L_2[y] = a_2 \cdot y'' + a1 \cdot y' + a0 \cdot y = 0$$

$$\Downarrow$$

$$P_2(\lambda) = a_2 \cdot \lambda^2 + a1 \cdot \lambda + a0 = 0$$

Fallunterscheidung für die char. Gleichung

(1) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2$

(2) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 = \lambda_2$

(3) $\lambda_1, \lambda_2 \in C$

Fallunterscheidung für die DGL

(1) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2$

$$\boxed{y_h = C_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot x} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot x}}$$

(2) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

$$\boxed{y_h = C_1 \cdot e^{\lambda \cdot x} + C_2 \cdot x \cdot e^{\lambda \cdot x}}$$

(3) $\lambda_1, \lambda_2 \in C \Rightarrow \lambda_{1,2} = a \pm j \cdot b$

$$\boxed{y_h = C_1 \cdot e^{ax} \cos(bx) + C_2 \cdot e^{ax} \sin(bx)}$$

Das asymptotische Verhalten der homogenen Lösung

(a) Wenn $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} < 0$
dann gilt $\lim\limits_{x\to\infty} y_h(x) = 0$ d.h. die Lösung y_h nähert sich asymptotisch dem 'Gleichgewicht' $y = 0$. Falls $\lambda \in \mathbb{C}$ ist y_h eine *gedämpfte harmonische Schwingung*.

(b) Wenn $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} = 0$
dann existiert $\lim\limits_{x\to\infty} y_h(x)$ nicht und die Lösung y_h ist eine *harmonische Schwingung*.

(c) Wenn $\operatorname{Re}\lambda_1 > 0$ oder $\operatorname{Re}\lambda_2 > 0$
dann existiert $\lim\limits_{x\to\infty} y_h(x)$ nicht und die Lösung y_h ist unbeschränkt.

Übungen

1) $y'' - 7y = 0$

2) $y'' - 2y' + y = 0$

3) $y'' - 4y' + 5y = 0$

4) $\ddot{x} + 2\dot{x} + ax = 0, a \in \mathbb{R}.$

5) $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega^2 x = 0;\ \delta > 0, \omega \in \mathbb{R}$

Homogene DGLs höherer Ordnung

Beispiele

1) $y''' - 6y'' + 2y' + 36y = 0$

2) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1;\ \lambda_4 = \lambda_5 = -1$

Gesucht ist die DGL und ihre Lösung.

Lösungsschema

$$\begin{array}{ccc} L_n[y]=0 & & y_h(\lambda,x) \\ \downarrow & & \uparrow \\ P_n(\lambda)=0 & \rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow & \lambda\in C \end{array}$$

II) Die Lösung der inhomogene DGLs mit konstanten Koeffizienten

Die Methode des 'Störansatzes'

Das Prinzip:
Die Lösung hat die 'gleiche' Bauart wie die Störfunktion

Beispiel 1 $\quad y' + y = e^x$

<u>Lösung</u> Ansatz $y = A \cdot e^x$, $A \in \mathbb{R}$

$$y = A \cdot e^x \Rightarrow y' = A \cdot e^x$$

Einsetzen in die DGL:

$$y' + y = e^x \Rightarrow A \cdot e^x + A \cdot e^x = e^x$$
$$\Rightarrow 2A \cdot e^x = e^x \Rightarrow A = 1/2$$
$$\Rightarrow y_p = \frac{1}{2} e^x$$

<u>Beispiel 2</u> $y' + y = e^{-x}$

<u>Lösung</u> Ansatz $y = A \cdot e^{-x}$, $A \in \mathbb{R}$

$$y = A \cdot e^{-x} \Rightarrow y' = -A \cdot e^{-x}$$

Einsetzen in die DGL:

$$y' + y = e^{-x} \Rightarrow A \cdot e^{-x} - A \cdot e^{-x} = e^{-x}$$

$\Rightarrow 0 = e^{-x}$. Es ergibt sich somit ein Widerspruch.

Beispiel 1 ist typisch für den sogenannten <u>Normalfall</u>, Beispiel2 für den <u>Resonanzfall</u>

<u>Resonanz</u> tritt auf, wenn eine Fundamentallösung der homogenen DGL ein ’Baustein’ der Störfunktion ist.
Folgenden Resonanzfälle sind möglich:
1) $\lambda = 0$ und $r(x)$ besitzt als ’Baustein’ ein Polynom.
2) $\lambda \in \mathbb{R}$ und $r(x)$ besitzt als ’Baustein’ die Funktion $e^{\lambda x}$.
3) $\lambda = a \pm j \cdot b$ und $r(x)$ besitzt als ’Baustein’ $e^{ax} \cdot \cos bx$ oder $e^{ax} \cdot \sin bx$.

Die Ansätze für eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGL sind in den folgenden zwei Tabellen für typische Störfunktionen aufgeführt.

Tabelle 1 (‚Normalfall‘)

Störfunktion $r(x)$	Ansatz y_p
$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$	$A_0 + A_1 x + \ldots + A_n x^n$
ae^{kx}	Ae^{kx}
$a\cos mx$ $a\sin mx$ $a\cos mx + b\sin mx$	$A\cos mx + B\sin mx$
$ae^{kx}\cos mx$ $ae^{kx}\sin mx$ $e^{kx}(a\cos mx + b\sin mx)$	$e^{kx}(A\cos mx + B\sin mx)$

Tabelle 2 (‚Resonanzfall')

Störfunktion $r(x)$	Ansatz y_p
$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$	$x^l (A_0 + A_1 x + \ldots + A_n x^n)$
ae^{kx}	$x^l A e^{kx}$
$a \cos mx$ $a \sin mx$ $a \cos mx + b \sin mx$	$x^l (A \cos mx + B \sin mx)$
$ae^{kx} \cos mx$ $ae^{kx} \sin mx$ $e^{kx}(a \cos mx + b \sin mx)$	$x^l e^{kx} (A \cos mx + B \sin mx)$

l ist die Vielfachkeit der Lösung λ der charakteristischen Gleichung, welche die Resonanz provoziert.

Beispiele zur Methode des Störansatzes

a) $y''' + y'' + 4y' + 4y = r(x)$

a1) $r(x) = x$; a2) $r(x) = \cos x$
a3) $r(x) = 3\cos 2x$; a4) $r(x) = e^{-x}$

b) $y'' - y = xe^{-x} + x$

Ansatz

Ergebnis: $y_p = -\frac{1}{4}x(x+1)e^{-x} - x$

c) $\ddot{x} - \dot{x} = t \cdot e^t$

Ansatz

Ergebnis: $x_p = t \cdot \left(\frac{1}{2}t - 1\right) \cdot e^t$

Komplexer Ansatz für die partikuläre Lösung

Anwendungsbereich:

$$r(x) = e^{kx}(a_1 \cos mx + a_2 \sin mx)$$

oder äquivalent

$$r(x) = e^{kx} \cos(mx + \varphi).$$

Vorgehensweise: 'komplexe Erweiterung'

Beispiel 1 $\quad y'' + y' + y = \cos x$

Lösung:

$$\begin{array}{l} y'' + y' + y = \cos x \\ \quad\downarrow \\ z'' + z' + z = \quad e^{jx} \ , \quad y = \mathrm{Re}(z) \end{array}$$

Ansatz: $z_p = Ae^{jx}, z' = Aje^{jx}, z'' = Aj^2 e^{jx}$

Einsetzen:

$$Ae^{jx}(1 + j + j^2) = e^{jx} \Rightarrow Aje^{jx} = e^{jx}$$

$$Aj = 1 \Rightarrow A = 1/j = -j \Rightarrow z_p = -je^{jx}$$
$$\Rightarrow z_p = -j(\cos x + j\sin x) = \sin x - j\cos x$$
$$\Rightarrow y_p = \mathrm{Re}(z_p) = \sin x\ .$$

<u>Beispiel 2</u>

$$y'' + 2ky' + y = e^{-kx}\sin x\ ,\ k \neq 0$$

Lösung:

$$y'' + 2ky' + y = e^{-kx}\cos(x - \pi/2)$$
$$\downarrow$$
$$z'' + 2k \cdot z' + z = e^{-kx}e^{j(x-\pi/2)}$$

Ansatz:

$$z_p = Ae^{-kx}e^{j(x-\varphi)} = Ae^{-j\varphi}e^{(j-k)x}$$
$$z' = Ae^{-j\varphi}(j-k)e^{(j-k)x},$$
$$z'' = Ae^{-j\varphi}(j-k)^2 e^{(j-k)x}$$

Einsetzen und durch e^{-kx} dividieren:

$$[(-k+j)^2+2k(-k+j)+1]\cdot Ae^{-j\varphi}=e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

Nach Berechnung der eckigen Klammer:

$$-k^2Ae^{-j\varphi}=e^{-j\pi/2}\Rightarrow k^2Ae^{-j\varphi}e^{j\pi}=e^{-j\pi/2}$$

Beträge und Winkel gleichsetzen:

$$Ak^2=1\ ,-\varphi+\pi=-\pi/2\Rightarrow$$

$$A=\frac{1}{k^2}\ ,\ \varphi=3\pi/2\Rightarrow z_p=\frac{1}{k^2}\cdot e^{-kx}\cdot e^{j(x-\frac{3\pi}{2})}$$

$$y_p=\mathrm{Re}(z_p)=\frac{1}{k^2}\cdot e^{-kx}\cdot\cos(x-\frac{3\pi}{2})\ .$$

<u>Übung</u> (Resonanzfall)

$$\dddot{x}+\ddot{x}+\dot{x}+x=2\cos t$$

§4. Die Schwingungsdifferentialgleichung (S-DGL)

4.1. Definition und Beispiele

Definition (DIN 1311):

$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = r(t)$; $a, c > 0$, $b \geq 0$

Beispiele (BzM 6, Seite 57)

Feder – Masse Schwinger, elektrischer Reihenschwingkreis.

4.2. Freie Schwingungen

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$$

Die charakteristische Gleichung:

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$$

Hergeleitete Größen:

$$\delta = \frac{b}{2a}\ ,\ \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{a}}\ ,\ \omega_d = \sqrt{{\omega_0}^2 - \delta^2}\ ,\ D = \frac{\delta}{\omega_0}$$

Dämpfung, Frequenz der ungedämpften beziehungsweise gedämpften Schwingung, Dämpfungsgrad.

Die DGL und die Lösungen $\lambda_{1,2}$:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + {\omega_0}^2 x = 0\ ;\ \lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - {\omega_0}^2}$$

Fallunterscheidung nach δ, ω_0

1) <u>Ungedämpfte Schwingung</u> $\delta = 0$:

$$\lambda_{1,2} = \pm j\omega_0 \Rightarrow x(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t$$

Die Lösung ist eine *harmonische Schwingung*.

2) Schwache Dämpfung $0 < \delta < \omega_0$

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm j\omega_d$$

$$\Rightarrow x(t) = e^{-\delta t}(C_1 \cos \omega_d t + C_2 \sin \omega_d t)$$

Die Lösung ist eine *gedämpfte harmonische Schwingung*.

3) Grenzfall $\delta = \omega_0$

$$\lambda_{1,2} = -\delta \Rightarrow x(t) = e^{-\delta t}(C_1 + C_2 t)$$

Die Lösung ist aperiodisch.

4) Starke Dämpfung $\delta > \omega_0$

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0{}^2} < 0$$

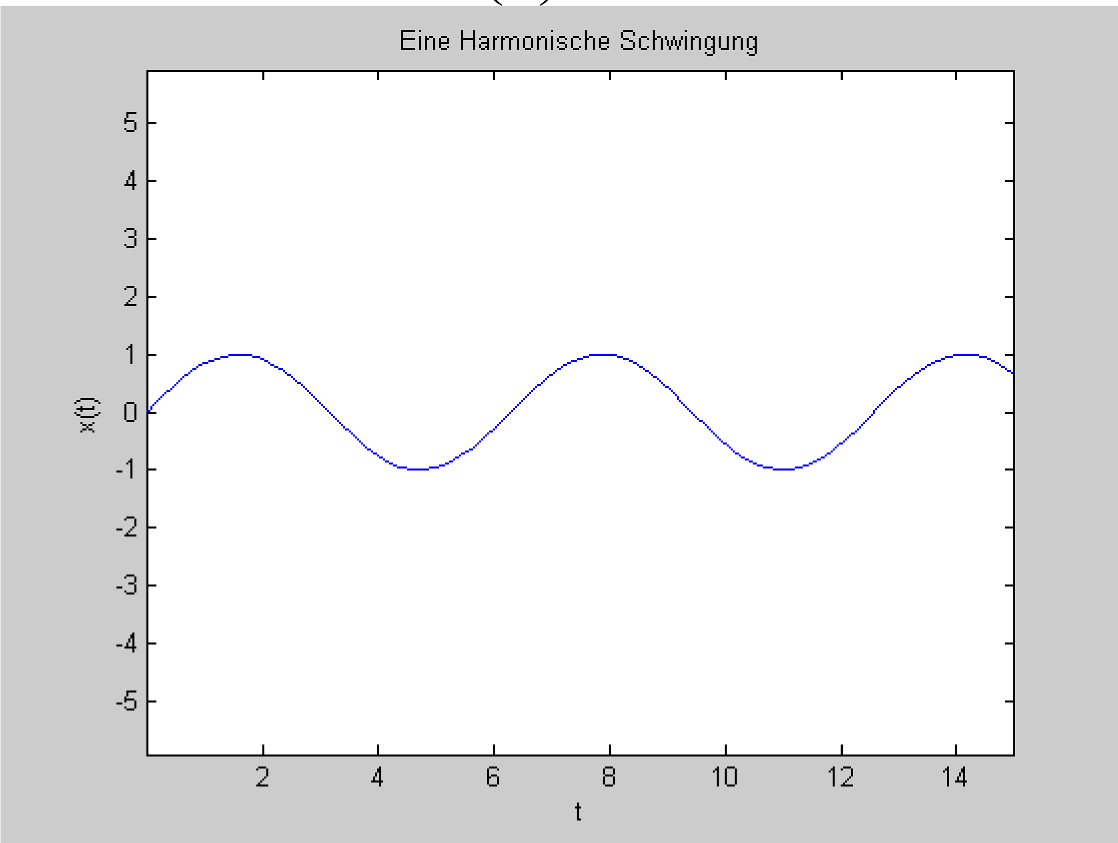
$$\Rightarrow x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

Die Lösung ist aperiodisch.

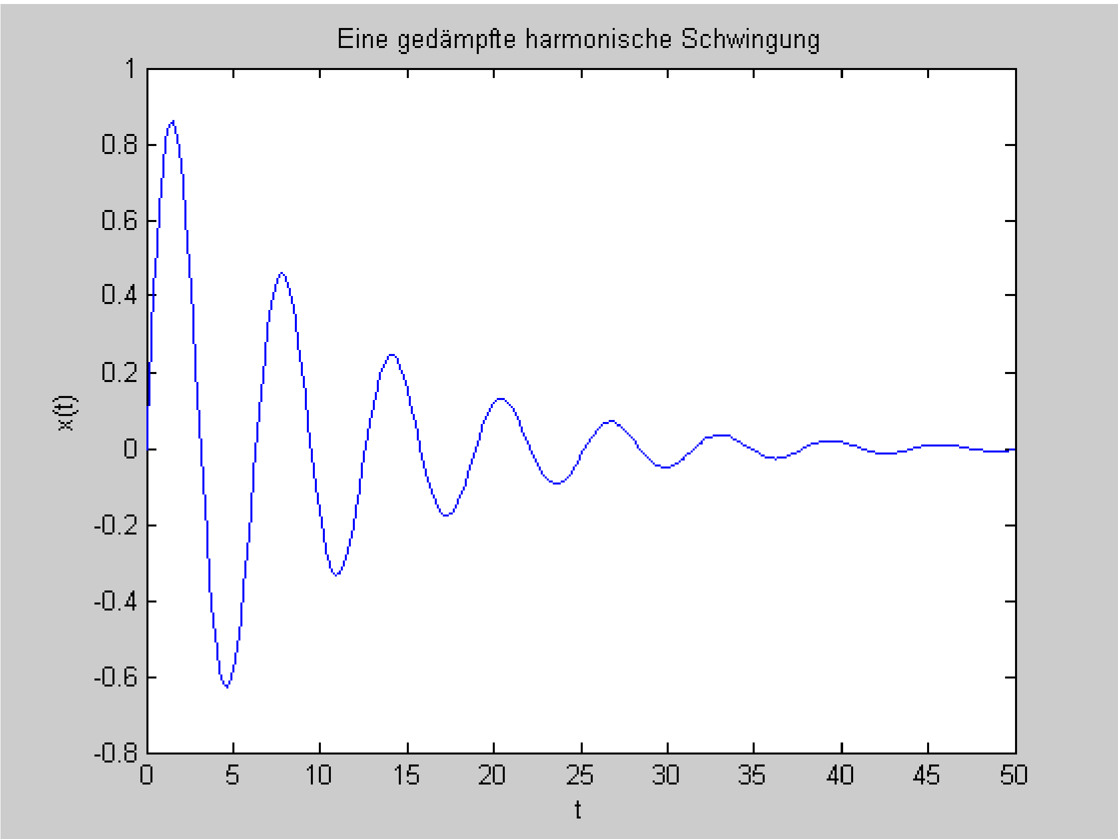
Die geometrische Veranschaulichung der Lösungen

A) Skizzen B) MatLab Simulation

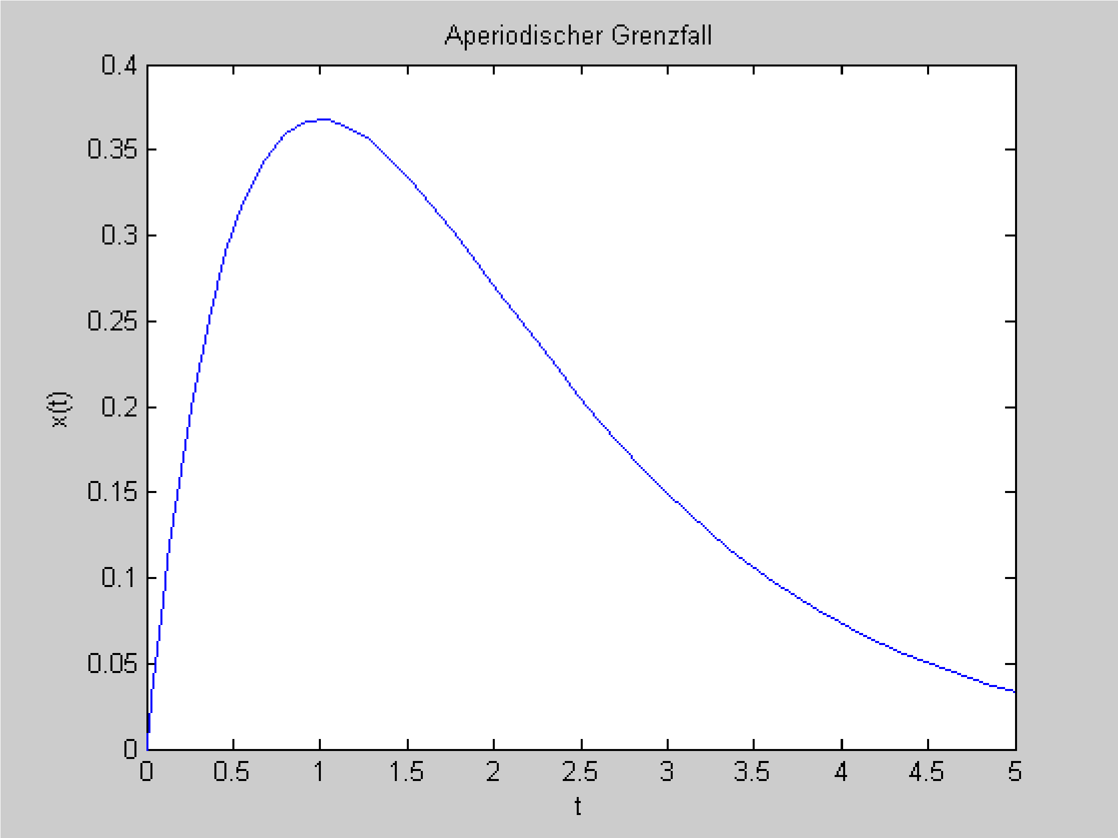
(1) $\delta = 0$



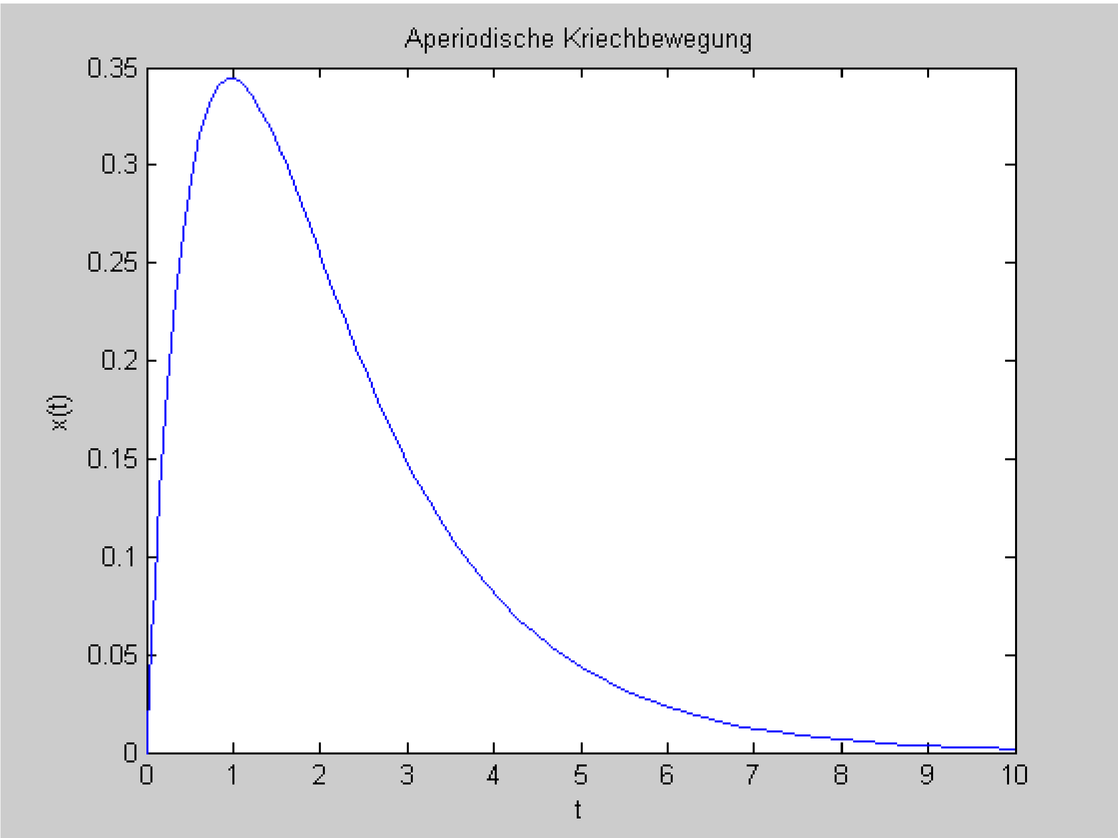
(2) $0 < \delta < \omega_0$



(3) $\delta = \omega_0$



(4) $\delta > \omega_0$



4.3. Erzwungene Schwingungen bei harmonischer Erregung

Die S-DGL ist

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + {\omega_0}^2 x = {\omega_0}^2 \cdot A_E \cos(\omega_E t)$$

wobei $A_E \cos(\omega_E t)$ die harmonische 'Erregung' darstellt (z.B. eine Feder oder Wechselstrom, s. BzM 6, Seite 60).

Die Lösung hat die allgemeine Bauart:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \ .$$

Die homogene Lösung wurde unter §2 vorgestellt. Eine partikuläre Lösung hat die Darstellung (komplexer Ansatz):

$$x_p(t) = A_p \cdot \cos(\omega_E t - \varphi).$$

Die Berechnung der partikulären Lösung erfolgt nach der Methode des komplexen Ansatzes. Für die qualitative Untersuchung der Abhängigkeit von Amplitude und Phase der partikulären Lösung von den Parametern δ, ω_0, A_E, ω_E sind die folgenden Größen wichtig:

$$u = \frac{\omega_E}{\omega_0},\ D = \frac{\delta}{\omega_0},\ V = \frac{A_p}{A_E}, \qquad \text{genannt}$$

dimensionslose Frequenz, Dämpfungsgrad und Verstärkungsfaktor.

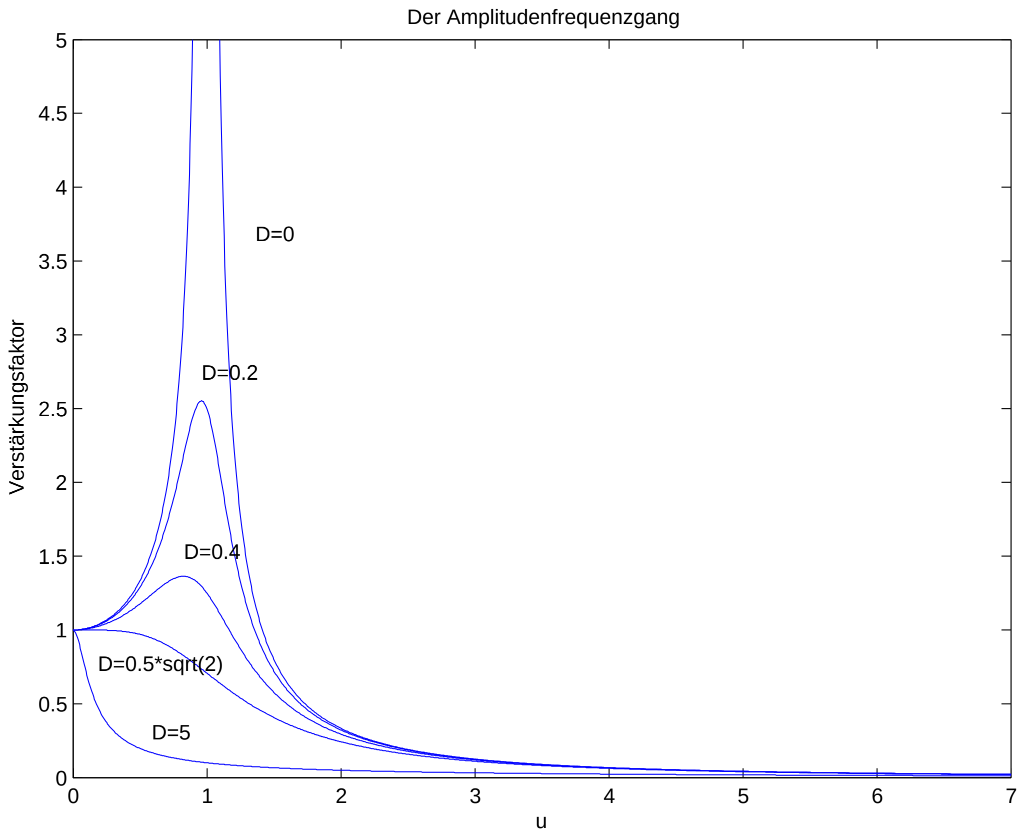
Berechnungsformeln
für Verstärkungsfaktor und Phase

$$V(u,D) = \frac{1}{\sqrt{(1-u^2)^2 + 4D^2u^2}},\ \tan\varphi = \frac{2Du}{1-u^2}$$

Die Abhängigkeit von A_p und φ von ω_E bei festen Werten von δ, ω_0, A_E wird <u>Amplituden</u>- bzw <u>Phasenfrequenzgang</u> genannt.

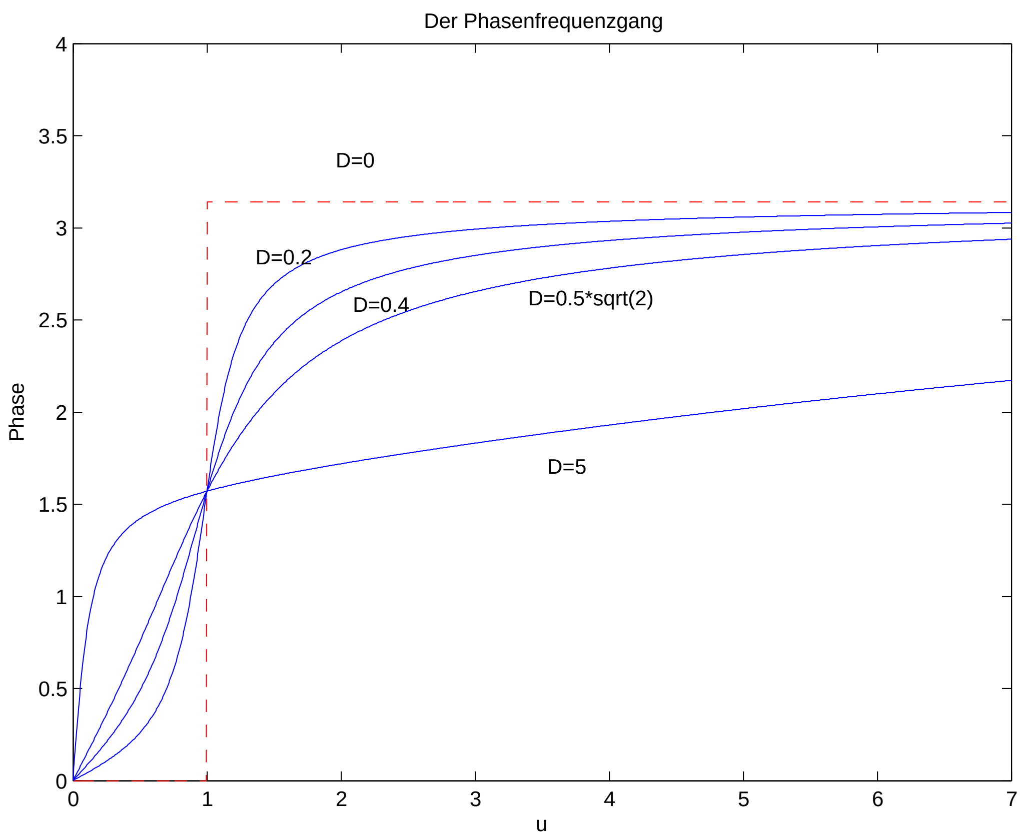
<u>Der Amplitudenfrequenzgang</u>

$$V(u,D) = \frac{1}{\sqrt{(1-u^2)^2 + 4D^2u^2}}$$



Der Phasenfrequenzgang

$$\tan\varphi = \frac{2Du}{1-u^2}$$



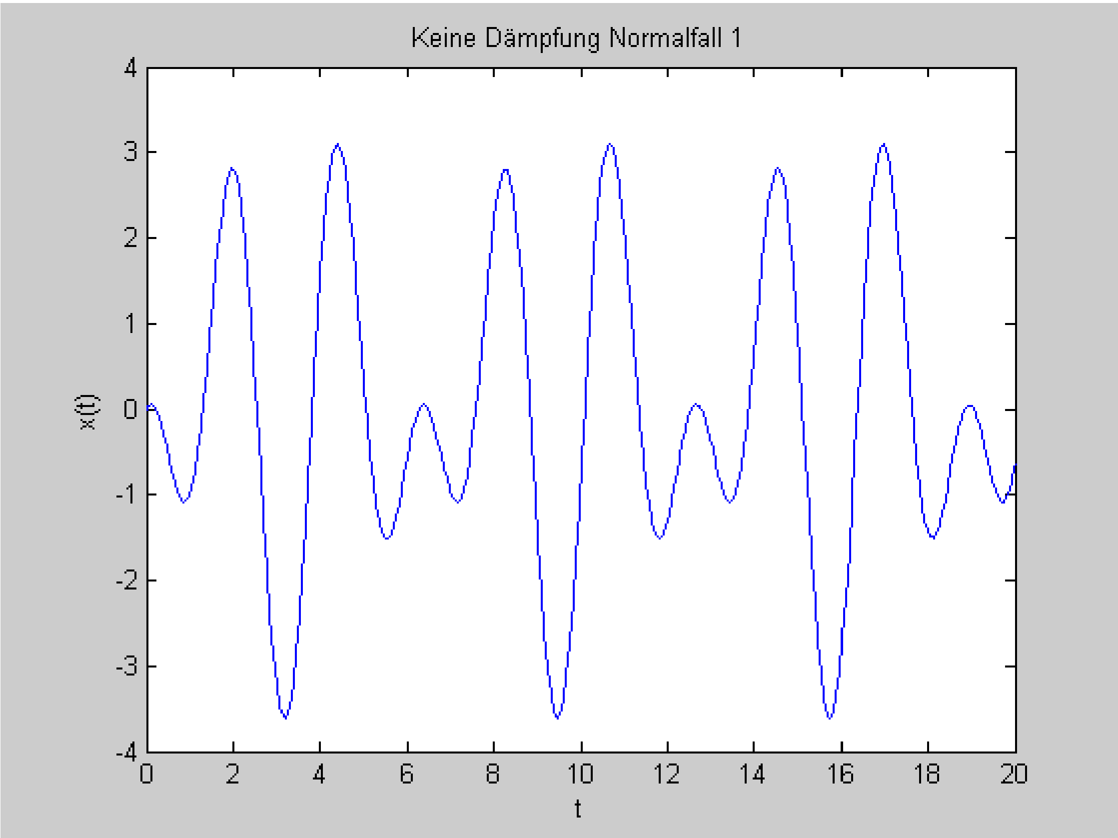
Zur Kurvendiskussion siehe auch Brücken zur Mathematik Band 6, Seiten 63-64.

Die allgemeine Lösung

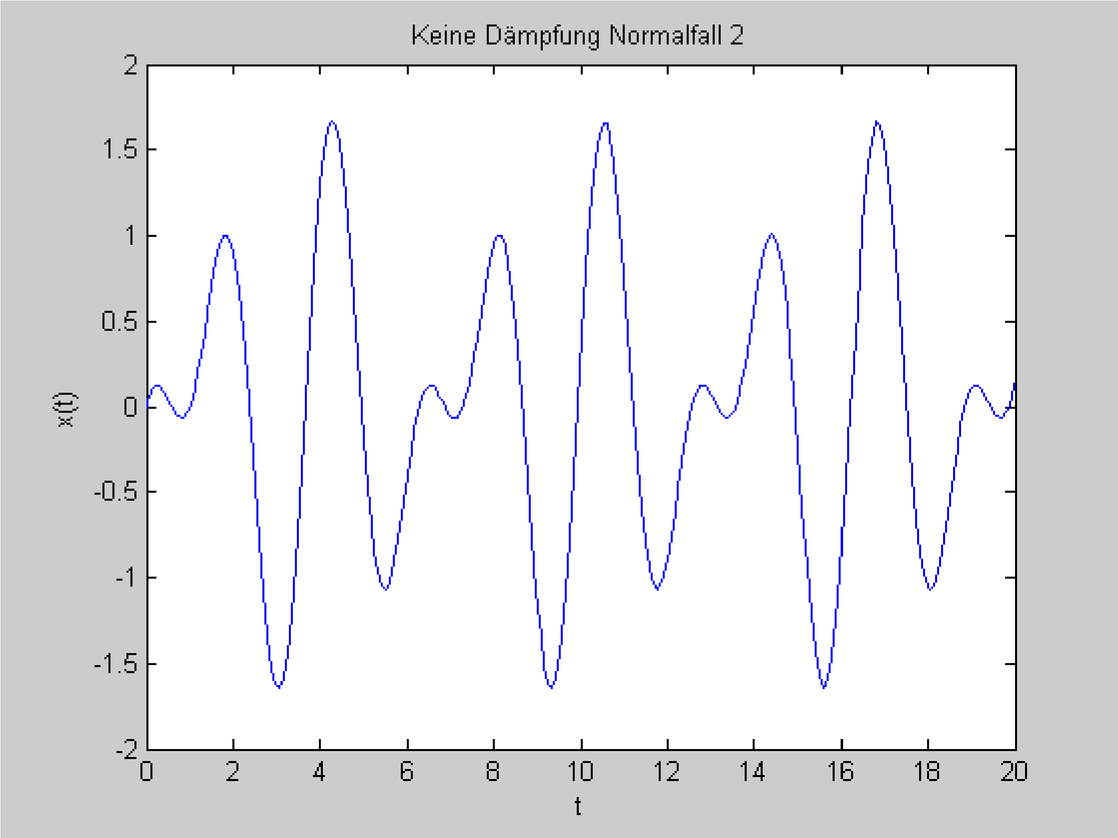
$$x = x_h + x_p$$

Die *Fallunterscheidung* nach δ, ω_0, ω_E:

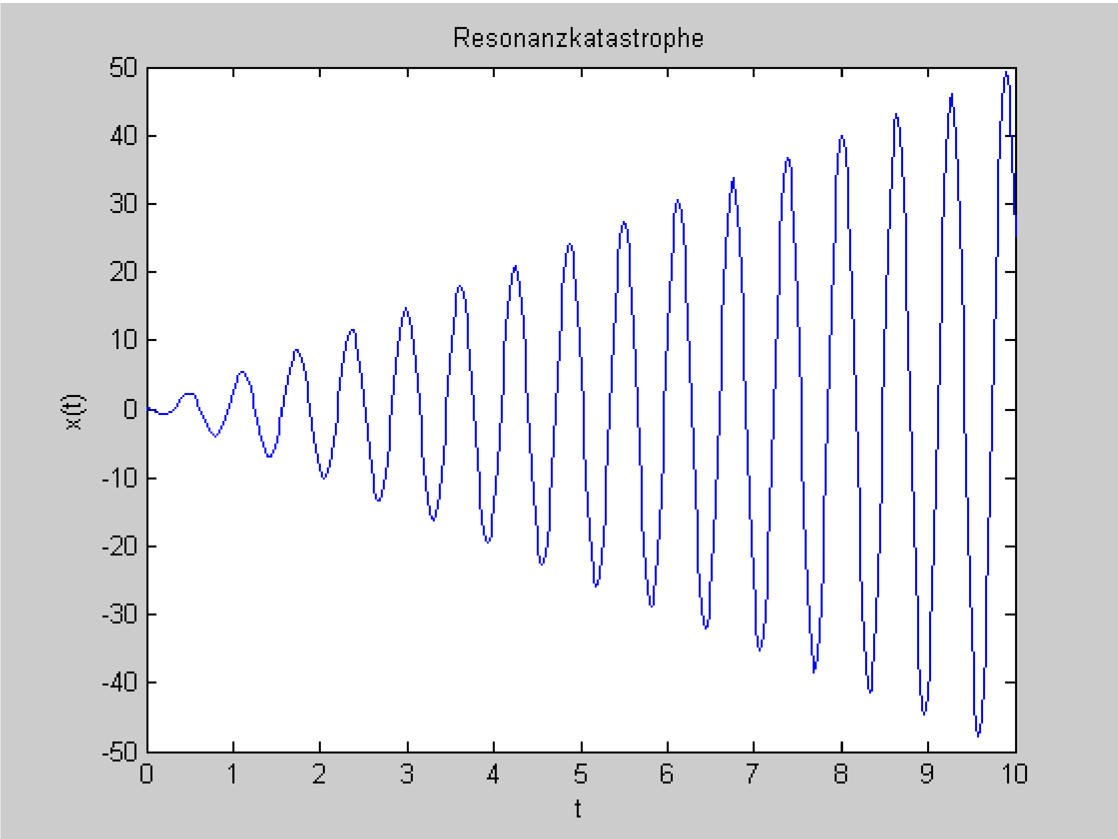
(5) $\delta = 0,\ \omega_E < \omega_0$



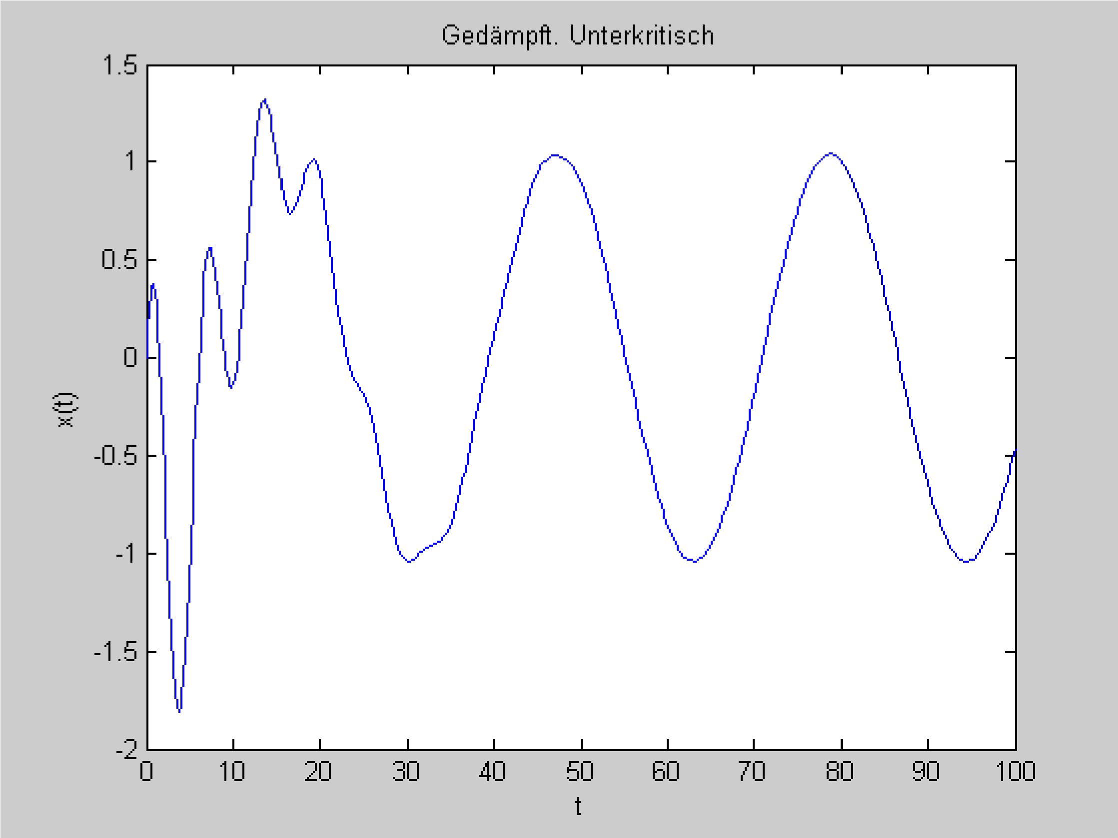
(6) $\delta = 0,\ \omega_E > \omega_0$



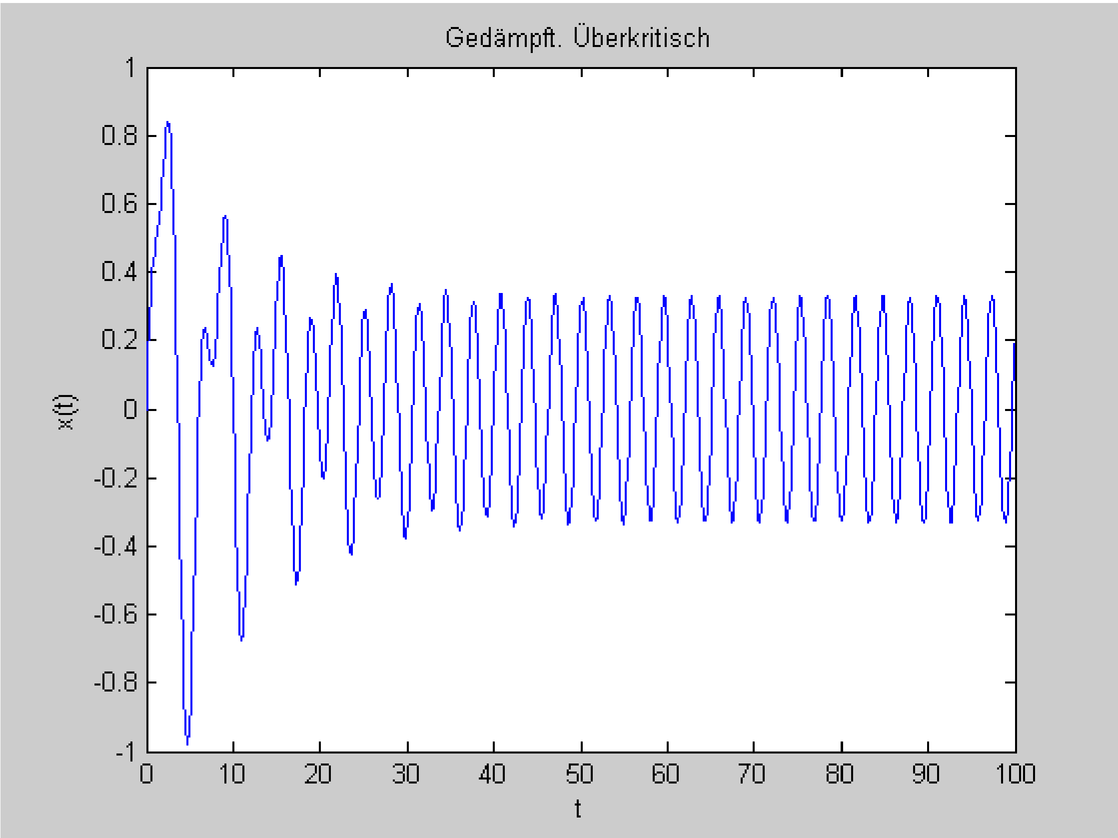
$$(7)\ \delta = 0,\ \omega_E = \omega_0$$



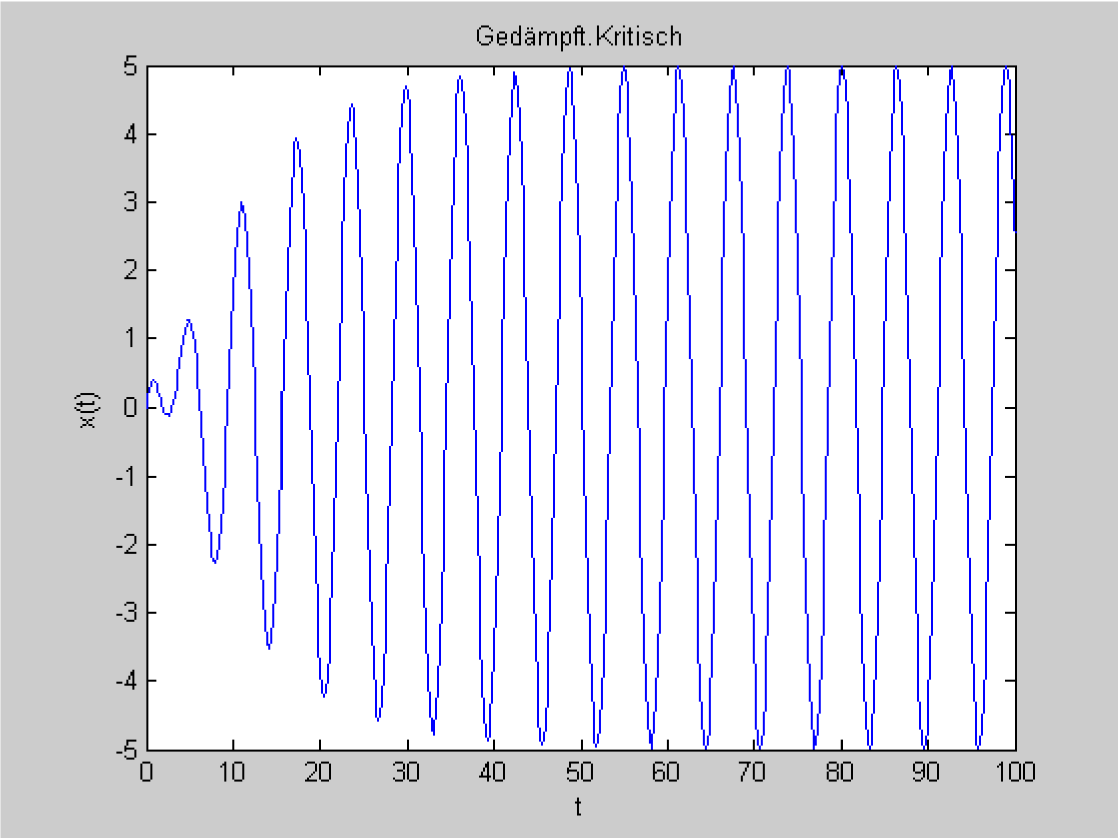
$$(8)\ \delta > 0,\ \omega_E < \omega_0$$



$$(9)\ \delta > 0,\ \omega_E > \omega_0$$



$$(10)\ \delta > 0,\ \omega_E = \omega_0$$



Die Fallunterscheidung nach den drei Parametern δ, ω_0, ω_E kann am besten in Verbindung mit dem Amplituden- und Phasenfrequenzgang überblickt werden.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass sich bei positiver Dämpfung nach einer gewissen Einschwingphase die Erregerschwingung durchsetzt.

§5. Systeme von Differentialgleichungen

5.1. Das Eliminationsverfahren

Beispiel

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 - x_2 & (1) \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 2x_2 & (2) \end{cases}$$

Lösung

1) Elimination einer Variablen

$$(2) \Rightarrow x_1 = -\dot{x}_2 + 2x_2 \Rightarrow \dot{x}_1 = -\ddot{x}_2 + 2\dot{x}_2$$
$$(1) \Rightarrow \dot{x}_1 = 2(-\dot{x}_2 + 2x_2) - x_2 = -2\dot{x}_2 + 3x_2 \Rightarrow$$
$$-\ddot{x}_2 + 2\dot{x}_2 = -2\dot{x}_2 + 3x_2 \Rightarrow \ddot{x}_2 - 4\dot{x}_2 + 3x_2 = 0$$

2) Lösung der DGL 2. Ordnung in x_2.

3) Berechnung von $x_1 = -\dot{x}_2 + 2x_2$.

5.2. Die Normalform einer DGL

<u>Beispiel 1</u> $\dddot{x} - 2\ddot{x} + 3\dot{x} - 2x = \cos t$

Substitution: $x_1 = x,\ x_2 = \dot{x},\ x_3 = \ddot{x}$

DGL$\Leftrightarrow$ $\dot{x}_3 = 2x_3 - 3x_2 + 2x_1 + \cos t$

Herleitung des Systems:

$$\begin{cases} x = x_1 \\ \dot{x} = \dot{x}_1 = x_2 \\ \ddot{x} = \dot{x}_2 = x_3 \\ \dddot{x} = 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + \cos t \end{cases}$$

In Matrix Form: $\underline{\dot{x}} = \underline{A} \cdot \underline{x} + \underline{r}(t)$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos t \end{pmatrix}$$

<u>Übung</u> S-DGL als System

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + {\omega_0}^2 x = {\omega_0}^2 \cdot A_E \cos(\omega_E t)$$

5.3. Homogene Systeme mit konstanten Koeffizienten $\underline{\dot{x}} = \underline{A} \cdot \underline{x}$

<u>Satz</u>

Das System $\underline{\dot{x}} = \underline{A} \cdot \underline{x}$ kann im Falle

-einfacher Eigenwerte von $\underline{A}$,

oder

-symmetrischer Matrizen $\underline{A}$

auf ein Eigenwertproblem zurückgeführt werden.

Lösungsansatz:

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \cdot e^{\lambda t} = \underline{c} \cdot e^{\lambda t}$$

Einsetzen in $\underline{\dot{x}} = \underline{A} \cdot \underline{x}$:

$$\lambda \underline{c} \cdot e^{\lambda t} = \underline{A}\underline{c} \cdot e^{\lambda t} \Rightarrow \underline{A}\underline{c} = \lambda \underline{c}$$

Somit wird das System auf die Berechnung der Eigenwerte λ und der Eigenvektoren $\underline{c}$ der Matrix $\underline{A}$ zurückgeführt. Daraus entstehen dann Fundamentallösungen der Bauart $\underline{x} = \underline{c} \cdot e^{\lambda t}$. Diese bilden ein Fundamentalsystem unter den Voraussetzungen des o.a. Satzes.

<u>Beispiel 1</u>

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 2x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \underline{\dot{x}} = \underline{A} \cdot \underline{x} \;,\; \underline{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

<u>Lösung</u>

1) Berechnung der Eigenwerte

Ansatz:

$$\det(\underline{A} - \lambda \underline{E}) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (2-\lambda)^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$$

2) Berechnung der Eigenvektoren

Ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = \lambda_1$:

Ansatz:

$$(\underline{A} - \lambda_1 \underline{E})\underline{c} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow c_1 - c_2 = 0$ (unterbestimmtes LGS !)

Eine Lösung des LGS ist $c_1 = c_2 = 1$ und

ein Eigenvektor $\underline{c}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Für $\lambda_2 = 3$ ergibt sich analog $\underline{c}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

3) Die Lösung des Systems ist

$$\underline{x} = C_1 \cdot \underline{c}^1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \cdot \underline{c}^2 e^{\lambda_2 t} \;;\; C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \underline{x} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3t}$$

$$\Rightarrow x_1 = C_1 e^t + C_2 e^{3t} \,,\; x_2 = C_1 e^t - C_2 e^{3t} \;.$$

<u>Beispiel 2</u>

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - 2x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \underline{\dot{x}} = \underline{A} \cdot \underline{x} \,,\; \underline{A} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Lösung

1) Berechnung der Eigenwerte

$$\det(\underline{A}-\lambda\underline{E})=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (-2-\lambda)^2+1=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=-2\pm j \in \mathbb{C}$$

2) Berechnung der Eigenvektoren

Ein Eigenvektor zu $\lambda=\lambda_1=-2-j$:

Ansatz:

$$(\underline{A}-\lambda_1\underline{E})\underline{c}=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} j & -1 \\ 1 & j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow jc_1-c_2=0 \quad \text{(unterbestimmtes LGS !)}$$

Eine Lösung des LGS ist $c_1 = 1$, $c_2 = j$ und ein Eigenvektor $\underline{c}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix}$.

3) Die Lösung des Systems

Eine komplexe Fundamentallösung ist:

$$\underline{z} = \underline{c}^1 e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix} e^{(-2-j)t} = \begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix} e^{-2t} e^{-jt} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix} (\cos t - j \sin t) e^{-2t} = \begin{pmatrix} \cos t - j \sin t \\ \sin t + j \cos t \end{pmatrix} e^{-2t}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} e^{-2t} + j \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} e^{-2t} .$$

Ein (reelles) Fundamentalsystem ist $\{\operatorname{Re} z(t), \operatorname{Im} z(t)\}$ und somit ist die Lösung des Systems:

$$\underline{x} = C_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} e^{-2t} + C_2 \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} e^{-2t}$$

$$\Rightarrow x_1 = (C_1 \cos t - C_2 \sin t) e^{-2t},$$

$$x_2 = (C_1 \sin t + C_2 \cos t) e^{-2t}$$

5.4. Die Stabilität homogener Systeme

<u>Definition</u>

Das System $\underline{\dot{x}} = \underline{A} \cdot \underline{x}$ heißt

1) *asymptotisch stabil*, wenn seine Lösung die folgende Eigenschaft hat:

$$\lim_{t \to \infty} \underline{x}(t) = \underline{0}$$

2) *stabil*, wenn seine Lösung beschränkt ist.
3) *unstabil,* wenn seine Lösung unbeschränkt ist.

Satz λ_k seien die Eigenwerte der Systemmatrix $\underline{A}$. Das System ist:

1) asymptotisch stabil $\Leftrightarrow \operatorname{Re}(\lambda_k) < 0$ für alle Eigenwerte λ_k.
2) Unstabil , wenn $\operatorname{Re}(\lambda_k) > 0$ für einen oder mehrere Eigenwerte.
3) Für $\operatorname{Re}(\lambda_k) = 0$ ist das System 'grenzstabil'.

Beispiele

Beispiel 1=unstabil
Beispiel 2=asymptotisch stabil

5.5. Lineare inhomogene Systeme mit konstanten Koeffizienten $\underline{\dot{x}} = \underline{A} \cdot \underline{x} + \underline{r}(t)$

können mit ähnlichen Verfahren wie inhomogene Gleichungen gelöst werden.