

**Übungsaufgaben**  
Mathematik Vorkurs 2006

AUFGABEN ZUR ALGEBRA

Prozent- und Zinsrechnung

1. a) Jemand verleiht 15 000 DM und erhält nach einem Jahr 16 875 DM zurück. Wie hoch war der Zinssatz?
- b) Wieviel Mehrwertsteuer (Steuersatz 14%) ist in einem Rechnungsbetrag von 142,50 DM enthalten?
- c) Auf ein Zuwachssparbuch werden 4 000 DM eingezahlt. Verzinst wird das Guthaben im 1. Jahr mit 3%, im 2. Jahr mit 4%, im 3. Jahr mit 5%, im 4. Jahr mit 8%; die jeweils am Jahresende fälligen Zinsen werden mitverzinst. Welcher Betrag steht nach Ablauf der 4 Jahre zur Verfügung?
- d) Eine Firma gewährt 10% Nachlaß vom Listenpreis, auf den ermäßigten Preis 8% Sonderrabatt und schließlich noch 3% Skonto bei Barzahlung. Um wieviel Prozent reduziert sich der Preis insgesamt?
- e) In wieviel Jahren tritt bei einer jährlichen Preissteigerungsrate von 3% (5%, 10%) eine Preisverdoppelung ein?

Dezimalzahlen mit Zehnerpotenzen

2. Schreiben Sie in der Form  $a \cdot 10^k$  mit  $1 \leq a < 10$ , k ganze Zahl:
  - a) 300 000 ;    b) 0,000 000 37 ;    c)  $2,2 \cdot 10^{-12} - 1,2 \cdot 10^{13}$
3. Schreiben Sie folgende Größen ausführlich (ohne Zehnerpotenzen)
  - a) kinematische Zähigkeit von Luft bei  $T = 273 \text{ K}$ :  $\nu_0 = 13,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ .
  - b) Elastizitätsmodul von Messing:  $E = 79 \cdot 10^9 \text{ Pa}$  (Pascal). Welchen Zahlenwert hat E in der technischen Einheit  $\text{kp}/(\text{cm}^2) = \text{at}$  (technische Atmosphäre)? Umrechnung:  $\text{Pa} = \text{N}/(\text{m}^2)$ ,  $1 \text{ kp}/(\text{cm}^2) = 9,80655 \cdot 10^4 \text{ Pa}$ .
  - c)  $1 \text{ kcal} = 4,1868 \cdot 10^3 \text{ J}$ ;  $1 \text{ J} = ? \text{ kcal}$ .
4. Die Lichtgeschwindigkeit beträgt  $c = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm/s}$ .
  - a) Geben Sie c an in den Einheiten m/s, m/min, km/s, km/min, km/h.
  - b) Wieviele cm legt ein Lichtstrahl in einem Jahr zurück (Lichtjahr)?
  - c) Wieviele Kohlenstoffatome könnte man hintereinander auf der Strecke anordnen, die von einem Lichtstrahl in einer Stunde zurückgelegt wird? Betrachten Sie ein Atom als Kugel mit  $d = 1,5 \text{ Angström} = 1,5 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ .

Quadratische Gleichungen und Anwendungen

5. Lösen Sie die Gleichungen
 

|                              |                           |                            |
|------------------------------|---------------------------|----------------------------|
| a) $x^2 + 6x + 5 = 0$        | b) $x^2 + 6x + 9 = 0$     | c) $x^2 + 6x + 13 = 0$     |
| d) $x^2 - 2x = 0$            | e) $x(x - 2) = 3$         | f) $5x^2 - 6x + 1,6 = 0$   |
| g) $(x^2 - 1)(x^2 + 2x) = 0$ | h) $2x^3 + 4x^2 + 3x = 0$ | i) $x(2x - 1) = 3(2x - 1)$ |
6. Zerlegen Sie die quadratischen Ausdrücke in Linearfaktoren
 

|                    |   |                     |
|--------------------|---|---------------------|
| a) $x^2 - 8x + 15$ | b) $4x^2 - 4x + 1$                      | c) $18x^2 - 9x + 1$ |
| d) $2x^2 + 3x - 2$ | e) $x^2 + (2b - a)x - 2ab$ (a, b const) |                     |
7. Wie lauten die quadratischen Gleichungen mit den Lösungen
 

|                        |   |
|------------------------|---|
| a) $x_1 = -2, x_2 = 3$ | b) $x_1 = -1 + \sqrt{3}, x_2 = -1 - \sqrt{3}$ |
|------------------------|---|
8. Lösen Sie die biquadratischen Gleichungen
 

|                           |                                     |                          |
|---------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ | b) $\frac{1}{2}x^4 - 6x^2 - 32 = 0$ | c) $2x^4 + 7x^2 + 1 = 0$ |
|---------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

9. Für welche Werte von  $c \in \mathbb{R}$  hat die quadratische Gleichung genau eine Lösung?
- a)  $x^2 - (c+2)x + 1 = 0$       b)  $x^2 - (2c-1)x + (c - \frac{1}{2}) = 0$
10. Für welche reellen Werte  $c$  hat die quadratische Gleichung 2 (1; 0) Lösungen?
- a)  $cx^2 + 6x + 1 = 0$       b)  $x^2 - 2x + c = 0$
11. Für welche Werte von  $t$  hat das Schaubild der Funktion  $f(x) = 1 - \frac{5+t}{(x-1)^2}$  zwei Schnittpunkte mit der  $x$ -Achse?
12. Faktorisieren Sie Zähler und Nenner der folgenden Funktionen. Geben Sie Definitionsbereich und Nullstellen an.
- a)  $\frac{x^2 - 5x + 6}{2x^2 + 4x - 6}$       b)  $\frac{2x^2 + 1}{x^2 - x - 6}$       c)  $\frac{3x^2 - 27}{x^2 + x - 6} \sqrt{x^2 - 8}$
13. Lösen Sie die Gleichungen (nach Einführung einer geeigneten Hilfsvariablen)
- a)  $(\frac{x+5}{x-1})^2 - 6(\frac{x+5}{x-1}) + 8 = 0$       b)  $\frac{3x-5}{2x-2} + \frac{2x-2}{3x-5} = \frac{5}{2}$       c)  $x + \sqrt{x} + 3 = 0$
14. a) Ein Händler kauft für 1080.- DM Kaffee. Nach einer Preiserhöhung um 1 DM/kg bekommt er für denselben Betrag 15 kg weniger. Wie hoch ist der ursprüngliche Preis je kg Kaffee?
- b) Ein Arbeiter erhält einen Stundenlohn von 18 DM. Durch zwei gleich hohe prozentuale Steigerungen soll der Stundenlohn nach 2 Jahren 20 DM betragen. Wie hoch ist die jährliche prozentuale Steigerung?
15. Die Höhe einer senkrecht hochgeschossenen Rakete in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  ist gegeben durch die Beziehung  $h = v_0 t - (gt^2)/2$ . Beantworten Sie für  $v_0 = 100 \text{ m/s}$ ,  $g = 10 \text{ m/s}^2$  folgende Fragen:
- a) Nach wieviel Sekunden erreicht die Rakete die Höhe  $h_1 = 400 \text{ m}$ ?
- b) Nach wieviel Sekunden trifft die Rakete wieder am Boden auf?

### Bruchterme und Bruchgleichungen

16. Lösen Sie die Gleichungen (Definitionsbereich beachten!)

a)  $\frac{5x+1}{x+2} - \frac{2x^2+3x-8}{x^2+4x+4} = 3$       b)  $\frac{x^2+3}{4x^2+12x+9} = \frac{2x+1}{4x+6} - \frac{x+1}{4x}$

c)  $\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x-3} = \frac{6}{x^2-9}$       d)  $\frac{3x}{x-2} = \frac{2x+7}{x+3} + \frac{6}{x-2}$

e)  $\frac{2x}{x-4} + \frac{3x}{x+4} = \frac{4(x^2-x+4)}{x^2-16}$       f)  $\frac{3x^2+25}{x^2-25} + \frac{5-x}{5+x} = \frac{2x}{x-5}$

17. Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke:

a)  $\frac{\frac{2x^2+x}{3x-2}}{\frac{2x+1}{6x-4}}$       b)  $\frac{\frac{x-1}{x+1} - \frac{x+1}{x-1}}{\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+1}}$

c)  $\frac{\frac{1}{s^2-1} - \frac{1}{s^2}}{2 + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}}$       d)  $1 - \frac{u}{1 - \frac{u}{u+1}}$

## Binomische Formeln

18. Lösen Sie die Klammern auf und fassen Sie zusammen:

a)  $(a + 4b)^2 + (7a + b)(7a - b)$       b)  $(8u + v)^2 - (8u - v)^2$

19. Faktorisieren Sie mit Hilfe der binomischen Formeln:

a)  $4a^2 - 24a + 36$       b)  $16x^2 - 2y^2$       c)  $20rs + 100r^2 + s^2$   
d)  $\frac{25}{16}r^4 - 81s^4$       e)  $(z^2 - 1)(2z^3 - 4z)$       f)  $a^2u^2 - 2abuv + b^2v^2$

## Polynomdivision

20. a)  $(3x^2 + 5x - 8) : (x - 2) = ?$   
b)  $(5x^3 + 9x^2 - 3x + 7) : (x + 3) = ?$   
c)  $(-x^5 + 3x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 7x + 6) : (x^2 - x + 2) = ?$   
d)  $(3x^4 + 2x^3 - x + 1) : (x^2 - 3x + 2) = ?$   
e)  $(z^4 - z_0^4) : (z - z_0) = ?$   
f)  $(2a^3 - 9a^2b + 7ab^2 + 6b^3) : (a - 3b) = ?$

## Potenzen, Wurzeln, Wurzelgleichungen

21. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke

a)  $\frac{26 \cdot 5^m - 5^m}{5^{m+2}}$       b)  $\frac{(15x^2y^{-3})^{-4}}{(25x^3y^{-6})^{-2}}$       c)  $\frac{a^n + 2a^{n-1}}{a^{n-2} + 2a^{n-3}}$   
d)  $\left(\frac{a^2b}{cd^3}\right)^3 : \left(\frac{ab^2}{c^2d^2}\right)^4$       e)  $a^{1/2} \cdot a^{2/3} \cdot a^{3/4}$       f)  $4\sqrt{a \cdot 3\sqrt{a}}$   
g)  $\frac{6\sqrt{a^5}}{\sqrt{a} \cdot 3\sqrt{a}}$       h)  $\frac{7\sqrt{x \cdot 4\sqrt{x^3}}}{4\sqrt{x \cdot 7\sqrt{x^3}}}$       i)  $4\sqrt{z^5} : 5\sqrt{z^4}$

22. Lösen Sie die Wurzelgleichungen

a)  $2 + \sqrt{3x(x-2)} = x$       b)  $1 - \sqrt{2x-3} = x$   
c)  $\sqrt{x+1} + \sqrt{1-3x} = 2$       d)  $\sqrt{3x+7} - \sqrt{3x+15} = 4$   
e)  $\sqrt{2x-5} = 1 + \sqrt{x-3}$       f)  $\sqrt{x^2+9a^2} = a+x \quad (a > 0, \text{ const})$

23. Lösen Sie auf nach x (zulässigen y-Bereich beachten!)

a)  $y = 1 + \sqrt{x}$       b)  $y = \sqrt{8x} - 2\sqrt{x}$   
c)  $y = \frac{1}{1 - \sqrt{x}}$       d)  $y = 1 - \sqrt{x^2 - 4}$

## Logarithmus, Exponential- und Logarithmusgleichungen

24. Bestimmen Sie die Logarithmen

a)  $\log_2 32$       b)  $\log_6 \sqrt[3]{6}$       c)  $\log_3 \frac{1}{9}$   
d)  $\log_{10} 10000$       e)  $\log_a \sqrt[q]{a^p}$       f)  $\ln(e^x/e^y)$

25. Zerlegen Sie möglichst weit ( $a, b, c, d > 0; u+v > 0$ )

a)  $\ln \frac{a^3 b^2 c}{d^4}$       b)  $\ln(a^2 + a)$       c)  $\ln(u^2 + 1)$       d)  $\ln[(u+v)^2]$

26. Fassen Sie zu einem Term zusammen (beliebige Log.-Basis)

- a)  $\log 4 - \log 2 + \log 3$       b)  $\log(\sqrt{a}^3) - \log\sqrt{a} + \log b$   
 c)  $\log x + \log y - \log z$       d)  $-\frac{1}{2}(\log u - 3 \log v)$   
 e)  $3 \log u + \frac{1}{2} \log v^4 + 2 \log w$       f)  $\frac{1}{3} \log a^{3m} - (m+1) \log a$

27. Lösen Sie auf nach x

- a)  $y = \ln(1 - \frac{x}{2})$       b)  $y = \frac{1}{2}(e^{2x} - 1)$   
 c)  $y = \frac{e^x}{1 + e^x}$       d)  $y = \ln(x+1) + \ln(x-1)$

28. Lösen Sie die Gleichungen

- a)  $e^{x+1} = 2$       b)  $\ln(3x-2) + 1 = 0$       c)  $e^{x-1} = e^x - 1$   
 d)  $e^{2x} + e^x - 2 = 0$       e)  $3^{x-2} = 2^{x+3}$       f)  $3 \cdot 5^x = 7^{x-1}$   
 g)  $e^x - 4e^{-x} = 0$       h)  $xy = 1, x^{\ln y} = \frac{1}{e}$  (Gleichungssystem!)  
 i)  $\ln(3x-2) - 2\ln(2x-3) = 0$  (Definitionsbereich beachten!)  
 k)  $2^x + 2^{x-3} + 3^x = -2^{2+x} + 2 \cdot 3^x$  (Umformung in  $a \cdot 2^x = b \cdot 3^x$ !)

### Ungleichungen, Beträge

29. Lösen Sie die Ungleichungen

- a)  $2x + 11 > 10 - 5x$       b)  $x^2 - x > 0$       c)  $x^2 - 6x + 10 < 0$   
 d)  $\frac{x+3}{x} \geq \frac{x}{x+3}$       e)  $\frac{2x-1}{x-1} < 1$       f)  $\frac{4}{x} \leq 2$

30. Bestimmen Sie den Definitionsbereich der Funktionen

- a)  $f_1(x) = \sqrt{x^2 + x - 2}$       b)  $f_2(x) = \ln \frac{x}{x-1}$

31. Bestimmen Sie die Lösungsmengen

- a)  $|3 - 5x| = 2$       b)  $|4 - 2x| < 3$       c)  $|2x - 1| > 0,5$   
 d)  $|x + 1| = 3x - 1$       e)  $|2x - 3| = 3 \cdot |x + 5|$       f)  $5 - 2 \cdot |x - 3| \leq 6$

### Summenzeichen, Binomischer Satz, Binomialkoeffizienten

32. Schreiben Sie mit dem Summenzeichen

- a)  $s_a = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12$       b)  $s_b = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$   
 c)  $s_c = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}$       d)  $s_d = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!}$

33. Schreiben Sie ausführlich

- a)  $\sum_{i=1}^3 a_i b_i$       b)  $\sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} a^{5-k} b^k$       c)  $\sum_{n=0}^4 a_n x^n$

34. a)  $\sum_{k=-1}^3 2^{k-1} = ?$       b)  $\sum_{i=-2}^2 \frac{2i+1}{4-i} = ?$       c)  $\sum_{m=1}^5 \binom{5}{m-1} = ?$       d)  $\sum_{n=0}^3 \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} \sin \frac{(n+1)\pi}{2} = ?$

35. a)  $\binom{10}{4} = ?$       b)  $\binom{12}{3} = ?$       c)  $\binom{11}{7} = ?$       d)  $\binom{49}{6} = ?$

36. a)  $(x-1)^7 = ?$       b)  $(u-2v)^5 = ?$       c)  $(z + \frac{1}{z})^3 = ?$

## AUFGABEN ZUM ABSCHNITT ÜBER ELEMENTARE FUNKTIONEN

1. Veranschaulichen Sie folgende Relationen in einem kartesischen Koordinatensystem:

- a)  $y > x$       b)  $|x| + |y| \leq 3$       c)  $y \leq \frac{1}{2}x + 1$   
 d)  $\{0 \leq x \leq 3 \text{ und } -2 \leq y \leq 2\}$

2. Zeichnen Sie die Schaubilder der folgenden Funktionen:

- a)  $y = \begin{cases} x+3 & -4 < x \leq -1 \\ x & -1 < x \leq 2 \\ x-3 & 2 < x \leq 5 \end{cases}$       b)  $y = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 2x-1 & 1 \leq x < 2 \\ 7 - \frac{8}{x} & 2 \leq x < 8 \end{cases}$   
 c)  $y = \begin{cases} x-2n & \text{für } 2n \leq x < 2n+1 \\ -x+2n+2 & \text{für } 2n+1 \leq x < 2n+2 \end{cases} \quad n=0, 1, 2, \dots$

3. Geben Sie für folgende Funktionen jeweils (maximalen) Definitionsbereich und Wertebereich an. Welche der Funktionen sind gerade oder ungerade?

- a)  $y = x^2 + 2$       b)  $y = x^3 - 2x$       c)  $y = \frac{1}{x}$   
 d)  $y = \frac{1}{(x-1)^2}$       e)  $y = \frac{1}{x^2 + 1}$       f)  $y = \frac{x-1}{x+2}$   
 g)  $y = \sqrt{x-4} + 2$       h)  $y = \sqrt{1-x^2}$       i)  $y = 2 - \sqrt{x^2 - 16}$   
 j)  $y = 2 - 3 \cos 2x$       k)  $y = x - 2 \sin x$       l)  $y = \ln(x+3)$   
 m)  $y = \ln(5-2x)$       n)  $y = -4 + e^x$       o)  $y = 1 - e^{-x}$

4. Bestimmen Sie die Achsenschnittpunkte der Funktionen

- a)  $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$       b)  $y = \frac{1}{1+x^2}$       c)  $y = x^2(2x+1)$

5. Welche der Funktionen sind nach oben, welche nach unten beschränkt? Welche sind beschränkt? Skizzieren Sie die Schaubilder!

- a)  $y = \frac{1}{x}, x > 0$       b)  $y = 4 - \frac{6}{x}, x \geq 1$   
 c)  $y = 3^x, -\infty < x < \infty$       d)  $y = 1 - 2 \sin x, -\infty < x < \infty$

6. Ermitteln Sie die Umkehrfunktion  $y = f^{-1}(x)$ .

- a)  $f(x) = 4x+2$       b)  $f(x) = \frac{1}{x}$       c)  $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$

7. Gegeben sei die Funktion  $f(x) = \frac{1+x}{2-x}$ . Bilden Sie:

- a)  $f(3t)$       b)  $f(x-1)$       c)  $f(2x^2)$   
 d)  $f\left(\frac{1}{x}\right)$       e)  $f(\cos u)$       f)  $f\left(\frac{x-1}{x}\right)$

8. Bilden Sie die zusammengesetzten Funktionen  $f[g(x)]$  und  $g[f(x)]$ :

- a)  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ ,  $g(x) = \frac{x}{x-1}$   
 b)  $f(x) = x-2$ ,  $g(x) = \frac{1}{3}x+2$   
 c)  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = 2x-1$

Geben Sie jeweils den Definitionsbereich an!



a) an der y-Achse      b) an der x-Achse      c) an der 1. Winkelhalbierenden

Wie lauten jeweils die Funktionsgleichungen?

22. Beim Einschalten von Gleichströmen in Stromkreisen mit Selbstinduktion treten Funktionen des folgenden Typs auf:

$$f(t) = A(1 - e^{-kt}) \quad A > 0, k > 0 \text{ konstant}$$

Diskutieren Sie diese Funktionen für  $t \geq 0$ . Für welche Werte von  $t$  erreicht  $f(t)$  die Werte  $0,5A$ ;  $0,9A$ ? Skizze für  $A=4$ ,  $k=0,5$ .

23. Das Gesetz des radioaktiven Zerfalls lautet

$$n = n_0 \cdot e^{-\lambda t}; \quad n_0 \dots \text{Zahl der Atome zur Zeit } t=0 \\ n \dots \text{Zahl der noch nicht zerfallenen Atome zur Zeit } t \\ \lambda \dots \text{Zerfallskonstante, Dimension } [\text{Zeit}]^{-1}$$

a) Ermitteln Sie die Halbwertszeit  $T_H$ , in der die Zahl der anfangs vorhandenen Atome durch Zerfall auf die Hälfte abgenommen hat.

b) Nach welcher Zeit, ausgedrückt in Halbwertszeiten, sind von dem radioaktiven Stoff nur noch 25%, 5%, 1% vorhanden?

c) Berechnen Sie die Zerfallskonstanten für folgende radioaktiven Stoffe:

| Element       | Radon ${}^{222}_{86}\text{Rn}$ | Radium ${}^{226}_{88}\text{Ra}$ | Uran ${}^{238}_{92}\text{U}$ |
|---------------|--------------------------------|---------------------------------|------------------------------|
| Halbwertszeit | 3,8 Tage                       | 1 580 Jahre                     | $4,5 \cdot 10^9$ Jahre       |

24. Skizzieren Sie ausgehend vom Schaubild der ln-Funktion die Bilder von

a)  $f_1(x) = \ln(x^2)$       b)  $f_2(x) = (\ln x)^2$

25. Ermitteln Sie Nullstellen und Pole der folgenden Funktionen. Skizzieren Sie die Schaubilder mit Hilfe der Achsenschnittpunkte und der Asymptoten.

|                              |                                   |                           |
|------------------------------|-----------------------------------|---------------------------|
| a) $\frac{x-1}{x+1}$         | b) $\frac{x-3}{x^2+1}$            | c) $\frac{x^2-4}{x-2}$    |
| d) $\frac{x^3-x^2-x+1}{x-1}$ | e) $\frac{2x^2-11x+15}{x^2-6x+9}$ | f) $\frac{x^2+3x+5}{x+1}$ |
| g) $\frac{ x }{x-2}$         | h) $\frac{2}{ x } - 1$            | i) $\frac{x+2}{ x-1 }$    |

26. Skizzieren Sie die Schaubilder der Funktionen unter Verwendung der Achsenschnittpunkte und des asymptotischen Verhaltens.

a)  $f_1(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$       b)  $f_2(x) = \frac{x^3}{6x-12}$

27. Wie lautet die Gleichung der einfachsten gebrochenrationalen Funktion mit den Nullstellen  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = 2$  und der Asymptoten  $x=4$ , deren Schaubild durch  $P(1/2)$  geht? Welche schiefe Asymptote hat die Kurve?

28. Gesucht ist die Gleichung der echt gebrochenrationalen Funktion, die genau eine Nullstelle bei  $x=2$  und genau einen doppelten Pol (Pol 2. Ordnung) bei  $x=-3$  hat, und deren Schaubild die y-Achse bei  $y=-1$  schneidet.

29. Zeichnen Sie die Schaubilder der folgenden Funktionen

a)  $y = x(2-x)$       b)  $y = |x(2-x)|$       c)  $y = |x| \cdot (2-x)$       d)  $y = x \cdot |2-x|$



30. Zeichnen Sie die Schaubilder der Funktionen. Wie lauten die zugehörigen betragsfreien Gleichungen?

a)  $y = \frac{1}{2} |x - 1|$       b)  $y = 2 - |x|$       c)  $y = |x + 1| + |x - 1|$   
 d)  $y = x + |x|$       e)  $y = |x^2 - 4x + 3|$       f)  $y = \frac{x}{|x|}$

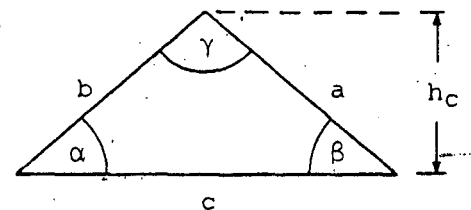
31. Skizzieren Sie die Schaubilder der Funktionen; untersuchen Sie dazu gegebenenfalls maximalen Definitionsbereich, Symmetrie, Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und asymptotisches Verhalten.

a)  $y = 2x^3 - 5x^2 + x + 2$       b)  $y = \frac{x-1}{x+1}$       c)  $y = \frac{1}{1+x^2}$   
 d)  $y = \frac{1}{1-x^2}$       e)  $y = \frac{x^2}{(x+1)^2}$       f)  $y = \frac{x^3}{x^2-1}$   
 g)  $y = \sqrt{1-x}$       h)  $y = \sqrt{2x-3}$       i)  $y = -\sqrt{x^2-1}$   
 j)  $y = (\sqrt{1-x^2})^{-1}$       k)  $y = e^{(x-2)}$       l)  $y = e^{-|x|}$   
 m)  $y = e^{-x^2}$       n)  $y = e^{-x+1} - 1$       o)  $y = \ln(x-1)$   
 p)  $y = \ln(4-x^2)$       q)  $y = \ln|x|$       r)  $y = \ln|x^2-1|$

### AUFGABEN ZUR TRIGONOMETRIE

- Ein gerades Straßenstück der Länge  $L = 320 \text{ m}$  steigt unter  $\alpha = 7,5^\circ$  an. Wie lang ist es auf einer Karte mit dem Maßstab 1:25 000?
  - Ein gerades Straßenstück der Länge  $L = 600 \text{ m}$  hat ein Gefälle von 12%. Wie lang ist es auf einer Karte mit dem Maßstab 1:50 000?
- Wie lang ist der Schatten eines senkrecht auf einer Ebene stehenden Stabs der Länge  $h = 2 \text{ m}$ , wenn die Sonnenhöhe (= Winkel der Sonnenstrahlen gegen die Horizontale)  $\alpha = 37,5^\circ$  beträgt?
  - Welchen Winkel bildet in einem Würfel die Raumdiagonale mit der Grundfläche?
  - Wie groß ist der Böschungswinkel eines keiskegelförmigen Sandhaufens mit Seitenlinie  $1,8 \text{ m}$  und Grundkreisdurchmesser  $2,9 \text{ m}$ ?
- Gesucht sind die fehlenden Seiten und Winkel sowie die Fläche des gleichschenkligen Dreiecks mit  $a = b$ ,  $\alpha = \beta$ :

  - $a = 93,5 \text{ mm}$ ;  $\gamma = 78,6^\circ$
  - $a = 51,4 \text{ mm}$ ;  $h_c = 43,8 \text{ mm}$
  - $h_c = 5,80 \text{ cm}$ ;  $\alpha = 72,2^\circ$
- Wie groß sind Flächeninhalt und Basis eines gleichschenkligen Dreiecks ( $a = b$ ,  $\alpha = \beta$ ), von dem  $h_c$  und  $\gamma$  bekannt sind?
- Eine horizontal verlaufende Straße führt in gerader Linie zu einem Turm. Von der Plattform des Turmes aus sieht man die Kilometersteine 3,2 und 3,3 unter den Tiefenwinkeln (= Winkel gegen die Horizontale)  $\alpha = 22,51^\circ$  und  $\beta = 39,14^\circ$ . Wie hoch ist der Turm, und wie weit ist er von dem ihm näher gelegenen Kilometerstein entfernt?



6. Berechnen Sie die fehlenden Seiten und Winkel des Dreiecks ABC:

- a)  $a = 527,60$      $b = 378,50$      $\alpha = 76^{\circ}56'$   
 b)  $a = 59,50$      $c = 47,70$      $\gamma = 40,70^{\circ}$   
 c)  $a = 12,40$      $c = 14,80$      $\beta = 39,80^{\circ}$   
 d)  $a = 9,22$      $b = 11,80$      $c = 13,80$   
 e)  $a = 1,80$      $\beta = 42,40^{\circ}$      $\gamma = 71,50^{\circ}$

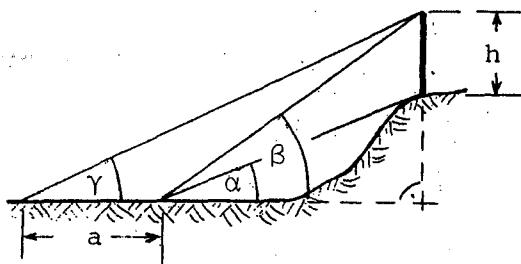
7. Gegeben ist das Dreieck  $\Delta ABC$  mit den Seiten  $a=6$ ,  $c=7$  und dem Flächeninhalt  $A=10$ . Wie groß ist der Winkel  $\beta$ ?

8. Ein Eisenbahngleis soll um den Winkel  $\alpha = 30^{\circ}$  von der ursprünglichen Richtung abbiegen.

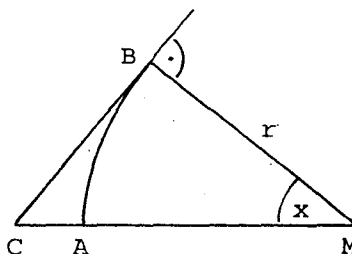
- a) Wie lang ist die Mittellinie des dazu erforderlichen Kreisbogens, wenn sein Radius  $R=450$  m beträgt?  
 b) Wie groß ist der Längenunterschied zwischen den beiden Schienenbögen bei einer Spurweite von  $S=1,435$  m?  
 c) Wie groß ist die zwischen den Schienen liegende Fläche des Bogens?

9. Um die Höhe  $h$  eines Turmes zu bestimmen, der auf einem Berg steht, mißt man die in der Figur angegebenen Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$ .

Wie hoch ist der Turm für die Zahlenwerte:  $\alpha = 21^{\circ}$ ,  $\beta = 46^{\circ}$ ,  $\gamma = 26^{\circ}$ ,  $a = 40$  m ?



10. An den Kreissektor AMB mit Radius  $r$  und Mittelpunktswinkel  $x$  (Bogenmaß!) sei in B die Tangente BC gezogen. Bei welchem Winkel  $x$  wird die Fläche des rechtwinkligen Dreiecks MBC vom Bogen AB halbiert? Zeigen Sie, daß für  $x$  die Gleichung  $2x = \tan x$  gelten muß.



11. Ein Kreissektor mit dem Mittelpunktswinkel  $x$  setzt sich zusammen aus einem Kreisabschnitt und einem gleichschenkligen Dreieck. Zeigen Sie, daß für  $x$  die Gleichung  $x = 3 \sin x$  gelten muß, falls die Fläche des Kreisabschnitts doppelt so groß ist wie die Fläche des gleichschenkligen Dreiecks.

12. Ein Punkt P hat vom Mittelpunkt eines Kreises den Abstand  $a$ ; der Durchmesser des Kreises ist  $2r$ . Welchen Winkel  $\alpha$  schließen die von P an den Kreis gelegten Tangenten ein? Zahlenwerte:  $a = 26$  cm,  $2r = 38$  cm.

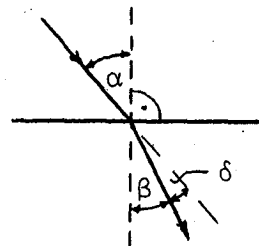
13. Zwei Läufer A und B starten gleichzeitig mit der Geschwindigkeit 400 m/min vom gleichen Punkt eines Kreises mit Radius 900 m. A läuft auf den Kreismittelpunkt zu, B läuft auf dem Kreisumfang. Wie weit sind A und B nach einer Minute voneinander entfernt?

14. Auf einem Lochkreis von 200 mm Durchmesser sollen 9 gleichmäßig verteilte Bohrlöcher angerissen werden. Welchen Abstand  $a$  haben die Mittelpunkte der Bohrlöcher?

15. Wie lang ist die gemeinsame Sehne zweier Kreise mit den Radien  $r_1 = 5$  cm und  $r_2 = 8$  cm, deren Mittelpunkte den Abstand  $a = 10$  cm haben?
16. a) In einem Kreis mit Radius  $r = 1,24$  m ist der Mittelpunktswinkel  $\alpha = 47,3^\circ$ . Bestimmen Sie die Länge der zugehörigen Sehne  $s$  und den Abstand  $a$  der Sehne vom Kreismittelpunkt.  
 b) Berechnen Sie den Mittelpunktswinkel  $\alpha$  und die Bogenlänge  $b$  eines Kreis-sektors mit dem Radius  $r = 5,2$  cm und der Sehne  $s = 7,4$  cm.
17. Drei Kreise mit den Radien  $r_1 = 5$  cm,  $r_2 = 4$  cm,  $r_3 = 3$  cm berühren sich gegenseitig von außen. Wie groß ist das Flächenstück zwischen den drei Kreisen?
18. Zwei Riemenscheiben haben die Radien  $r_1 = 35,4$  cm und  $r_2 = 14,6$  cm; ihr Mittelpunktsabstand ist  $a = 1,45$  m. Wie lang muß der Riemen sein, wenn sich die Scheiben a) gleichsinnig, b) gegensinnig drehen sollen?

19. Ein auf eine Glasplatte fallender Lichtstrahl wird zum Teil durch diese gebrochen und dadurch von seiner ursprünglichen Richtung um  $\delta = 15^\circ$  abgelenkt.

Wie groß ist sein Einfallswinkel  $\alpha$ , wenn der Brechungsindex  $n = \sin \alpha / \sin \beta = 1,52$  beträgt?



20. Skizzieren Sie folgende Funktionen  
 a)  $y = \sin x$ , b)  $y = |\sin x|$ , c)  $y = \sqrt{\sin x}$ , d)  $y = \sin^2 x = (\sin x)^2$
21. Bestimmen Sie die Nullstellen der folgenden Funktionen. An welchen Stellen nehmen die Funktionen ihre Extremwerte  $\pm 1$  an?  
 a)  $y = \sin \frac{1}{x}$  b)  $y = \sin(x^2)$
22. Bestimmen Sie die Winkel im Bereich von  $0^\circ$  bis  $360^\circ$ :  
 a)  $\sin \alpha = 0,442$  b)  $\sin \beta = -0,8$  c)  $\cos \gamma = 0,4$  d)  $\cos \delta = -0,135$   
 e)  $\tan \epsilon = 1,5$  f)  $\tan \zeta = -0,432$  g)  $\cot \eta = 0,85$  h)  $\cot \theta = -0,2$
23. Gesucht sind sämtliche Lösungen folgender Gleichungen (im Bogenmaß):  
 a)  $\sin x = 0,5$  b)  $\tan x = \sqrt{3}$  c)  $\cos x = -\sqrt{3}/2$
24. Bestimmen Sie die Lösungen im Intervall  $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ :  
 a)  $\cos \alpha = 0,5$  und  $\sin \alpha < 0$  b)  $\sin \beta = \sqrt{3}/2$  und  $\tan \beta < 0$   
 c)  $\tan \gamma = -2$  und  $\cos \gamma > 0$  d)  $\sin \delta = -0,4$  und  $\cos \delta > 0$
25. Gegeben ist die Funktion  $f(x) = \cos(x+1)$ . An welchen Stellen  $x \in [0; 2\pi]$  ist  $f(x) = -0,75$ ?
26. Gegeben ist die Funktion  $y = f(x) = 2 - 3 \cos(2x - \frac{\pi}{3})$   
 a) Bestimmen Sie Maximum und Minimum von  $f(x)$ .  
 b) Für welche  $x$ -Werte nimmt  $f(x)$  den Wert 2 an?  
 c) Wo liegen die Nullstellen der Funktion?

27. a) Stellen Sie  $\sin x$  und  $\cos x$  dar in Abhängigkeit von  $\tan x$ . Verwenden Sie dazu die Grundformeln  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ,  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ .
- b) Gegeben ist  $\tan x = 0,4$ . Welche Werte ergeben sich für  $\sin x$ ,  $\cos x$  und  $\cot x$
- b1) im 1. Quadranten,      b2) im 3. Quadranten?
28. Vereinfachen Sie die Ausdrücke ( $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ ):
- a)  $\frac{\sin 2x}{\cos x}$       b)  $\cos^4 x - \sin^4 x$       c)  $\cos x \sqrt{1 + \tan^2 x}$
- d)  $\frac{\sin^4 x - \cos^4 x}{\sin^2 x - \cos^2 x}$       e)  $\sin x - \sin x \cos^2 x$       f)  $\frac{1}{1 + \sin x} + \frac{1}{1 - \sin x}$
- g)  $\sin x \cdot \tan x + \cos x - \frac{1 - \sin 2x}{\cos x}$       h)  $\frac{\sin(45^\circ + \alpha) + \sin(45^\circ + 3\alpha)}{2 \sin(45^\circ + 2\alpha)}$
- i)  $\sin(\beta + 75^\circ) \cdot \cos(\beta - 75^\circ) - \cos(\beta + 75^\circ) \cdot \sin(\beta - 75^\circ)$
29. Formen Sie um mit Hilfe der Additionstheoreme:
- a)  $\cos\left(\frac{7}{2}\pi - \frac{x}{2}\right)$       b)  $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$
- c)  $\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$       d)  $\cos(x + y) + \cos(x - y)$
30. Lösen Sie auf nach  $x$ :
- a)  $\sin 3x = 1$       b)  $\sin\left(2x + \frac{\pi}{9}\right) = \frac{1}{2}$       c)  $\tan\left[\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right] = \sqrt{3}$
- d)  $\sin 3x + \cos 3x = 0$       e)  $\cos\left(3x - \frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$
31. Lösen Sie die trigonometrischen Gleichungen (im Bogenmaß):
- a)  $2\sin^2 x - 2\cos x = 2$       b)  $\sin 2x + 3\sin x - 2\tan x = 0$
- c)  $\cos 2x + \sin^2 x - \cos x + 1 = 0$       d)  $2\sin x \cos x - 2\cos x + \sin x - 1 = 0$
- e)  $\sin 4x \cot 2x - 4\cos 2x = 2$       f)  $\cos x \cos 2x - 2\sin x \sin 2x = 0$
- g)  $5\sin^2 x = 3\sin x + \cos^2 x$       h)  $10\sin x + 4\cos x - 9 = 0$
- i)  $\tan^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x = 1$       j)  $10\sin^2 x - 15\sin x \cos x - 5\cos^2 x = 7$
- k)  $\sin x - 3\cos x = \frac{1}{2}$       l)  $3\sin x - \sqrt{4 + 3\cos^2 x} = 4$
32. Wo liegen die Nullstellen der folgenden Funktionen?
- a)  $f(x) = 6\cos^2 x + \sin x - 5$       b)  $f(x) = 4\cos^2 x - \sin^2 x$
33. Bestimmen Sie die Periode der folgenden Funktionen:
- a)  $y = 3,5 \cos(1,5x)$       b)  $y = 2 \sin\left(x - \frac{5\pi}{6}\right)$       c)  $y = \cos x + \sin \frac{3}{4}x$
- d)  $y = \frac{\sin x}{2 + \cos 3x}$       e)  $y = \frac{\sin x}{x}$       f)  $y = \sin x \cos 2x$
34. Schreiben Sie die Funktionen als Cosinus-Funktionen mit positivem Amplitudenfaktor und einer entsprechenden Phasenverschiebung:
- a)  $y = -2 \cos x$       b)  $s = -3 \sin\left(20t - \frac{\pi}{6}\right)$       c)  $i = 0,4 \sin\left(t + \frac{2\pi}{3}\right)$
35. Welche Sinusfunktion hat die Amplitude 0,75, die Periode 2 und die Verschiebung einer Achtelperiode nach links?

36. Skizzieren Sie folgende Funktionen:

a)  $y = \sin(x + \frac{\pi}{4})$

b)  $y = 2 \sin(x + \frac{\pi}{4})$

c)  $y = \sin(2x + \frac{\pi}{4})$

d)  $y = \sin 2(x + \frac{\pi}{4})$

e)  $y = 1 - \cos(2x - \frac{\pi}{3})$

f)  $y = 2 \cos(x + \frac{2\pi}{3}) - 1$

37. Bei einem Wechselstrom mit Maximalwert 5 Ampère und der Frequenz 50 Hz beginnt zur Zeit  $t=0$  die positive Halbperiode. Nach welcher Zeit  $t_1 > 0$  erreicht der Strom zum ersten Mal 80 % seines Maximalwertes?

38. Gegeben sind zwei Schwingungen durch die Gleichungen  $y_1 = 5 \cos x$  und  $y_2 = 4 \sin x$ . An welchen Stellen  $x \in [0, 2\pi]$  tritt in der Überlagerungsschwingung  $y = y_1 + y_2$  die Auslenkung  $a = 3$  auf?

### AUFGABEN ZUR ANALYTISCHEN GEOMETRIE

1. Gegeben sind die Punkte  $A(0/-2,5)$ ;  $B(6/0)$ ;  $C(3/4)$ ;  $D(-3/1,5)$ .

a) Ermitteln Sie Seiten- und Diagonalenlängen des Vierecks ABCD. Um was für ein Viereck handelt es sich?

b) Geben Sie die Geradengleichungen der Diagonalen an. Welche Koordinaten hat der Diagonalschnittpunkt?

2. a) Welche Punkte der x-Achse haben von  $A(2,5/6)$  die Entfernung 6,5?

b) Welcher Punkt der y-Achse hat von  $O(0/0)$  und  $A(4/8)$  gleichen Abstand?

3. Gegeben sind die Punkte  $A(-2/3)$  und  $B(2/-1)$ . Wie lautet die Gleichung der Geraden

a) durch A und B? Wie groß sind die Achsenabschnitte?

b) durch A mit Steigung  $\frac{1}{2}$ ?

c) durch B, die mit der positiven x-Achse den Winkel  $120^\circ$  bildet?

d) durch B, die denselben y-Achsenabschnitt hat wie die Gerade mit der Gleichung  $3x - 2y + 4 = 0$ ?

4. Gegeben sind der Punkt  $A(-2/5)$  und die Gerade g mit der Gleichung  $2x - y = 0$ .

a) Wie lautet die Gleichung der Geraden, die durch A geht und  
a1) zu g parallel ist; a2) senkrecht steht auf g?

b) Wie lautet die Gleichung aller Geraden durch A?

5. Wie lauten die Gleichungen der Seiten des Dreiecks ABC mit  $A(-2/-3)$ ,  $B(6/1)$ ,  $C(0/3)$ ? Woran erkennt man, daß das Dreieck rechtwinklig ist?

6.  $A(?/6)$  und  $B(?/-2)$  sind Punkte auf der Gerade  $2x + y - 6 = 0$ . Die Gerade senkrecht zu OB durch A schneidet die Gerade OB im Punkt  $H_A$ . Bestimmen Sie

a) die Gleichung der Geraden  $AH_A$ ;

b) die Höhe  $h_a = \overline{AH_A}$  des Dreiecks OAB;

c) den Winkel  $\alpha = \sphericalangle(H_AAB)$

7. Wie lautet die Gleichung der Geraden mit positiver Steigung durch  $P(4/3)$ , die mit den Koordinatenachsen ein Dreieck vom Inhalt  $A = 3$  bildet?

- o. Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden, die durch  $P(-2/3)$  geht und die Gerade  $y = 2x - 5$  unter  $45^\circ$  schneidet. Welche Koordinaten hat der Schnittpunkt?
9. Bestimmen Sie den Winkel zwischen den Geraden  $g$  und  $h$ :
- a)  $g: y = 2x - 3$ ;  $h: y = \frac{1}{2}x + 1$       b)  $g: 2x + y = 0$ ;  $h: 3x - y - 4 = 0$
- c)  $g: 3x + 2y = 0$ ;  $h: 6x + 4y - 9 = 0$       d)  $g: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ;  $h: \frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1$
10. Gegeben sind die Gerade  $g: x + 2y - 4 = 0$  und der Punkt  $A(5/7)$ . Die zu  $g$  senkrechte Gerade durch  $A$  schneidet  $g$  in  $B$ . Bestimmen Sie die Koordinaten
- a) des Punktes  $B$ ;      b) des Spiegelbildes  $C$  von  $A$  bezüglich  $g$ .
11. Liegen die Punkte  $A(3/5)$ ,  $B(2/7)$ ,  $C(-1/-3)$ ,  $D(-2/-6)$  auf oder über oder unter der Gerade  $g$  mit der Gleichung  $y = 2x - 1$ ?
12. Skizzieren Sie die Gebiete in der  $x, y$ -Ebene, deren Punkte folgende Ungleichungen erfüllen:
- a)  $y < 2 - x$ ;  $x > -2$ ;  $y > -2$       b)  $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} \leq 1$ ;  $y \geq x + 2$ ;  $x \geq -4$
13. Bestimmen Sie Mittelpunkt  $M$  und Radius  $r$  der Kreise:
- a)  $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 23 = 0$       b)  $4x^2 + 4y^2 + 20x - 28y + 10 = 0$
- c)  $2x^2 + 2y^2 + 14y = 0$
14. Diskutieren Sie die allgemeine Form der Kreisgleichung
- $$Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D = 0 \quad \text{mit} \quad A \neq 0$$
15. Bestimmen Sie die Gleichung des konzentrischen Kreises zum Kreis  $K$
- $$K: 5x^2 + 5y^2 + 24x - 32y - 9 = 0$$
- , der
- a) die  $x$ -Achse berührt;      b) durch  $O$  geht;      c) durch  $P(1/2)$  geht.
16. Bestimmen Sie Länge und Mittelpunkt der Sehne, die der Kreis  $x^2 + y^2 - 4x = 0$  von der Geraden  $x + y = 4$  abschneidet.
17. Stellen Sie die Gleichungen der Tangenten auf, die vom Koordinatenursprung an den Kreis  $K: x^2 + y^2 - 8x - 4y + 16 = 0$  gelegt werden können.
18. a) Bestimmen Sie die Bahngleichung des Punktes  $P(x/y)$ , der bei seiner Bewegung immer dreimal so weit vom Punkt  $A(0/9)$  entfernt ist wie vom Punkt  $B(0/1)$ .
- b) Der Punkt  $P(x/y)$  bewegt sich so, daß die Summe der Quadrate seiner Abstände vom Ursprung und vom Punkt  $A(a/0)$  stets  $a^2$  ist. Wie lautet die Gleichung der Bahnkurve von  $P$ ?
19. a) Zeigen Sie, daß der Punkt  $A(3/0)$  im Innern des Kreises
- $$x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$$
- liegt.
- b) Stellen Sie die Gleichung der Sehne auf, die durch  $A$  halbiert wird.
20. Berechnen Sie die Schnittpunkte der beiden Kreise  $K_1$  und  $K_2$ :
- a)  $K_1: x^2 + y^2 = 25$ ;  $K_2: (x+1)^2 + (y-3)^2 = 9$
- b)  $K_1: x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ ;  $K_2: 4x^2 + 4y^2 + 12x - 12y - 3 = 0$

21. Bestimmen Sie die Kreise um  $M(1/2)$ , die den Kreis mit Radius  $r_0 = 3$  um  $M_0(5/5)$  berühren. Welche Koordinaten haben die Berührungspunkte?
22. Dem aus den Geraden  $y = -6$ ;  $y = 6$ ;  $x = -7$ ;  $x = 7$  gebildeten Rechteck soll eine Ellipse umschrieben werden, wobei die Brennpunkte in der Mitte der kurzen Seiten des Rechtecks liegen. Wie lautet die Gleichung der Ellipse?
23. Bestimmen Sie die Gleichung der Ellipse, deren Achsen zu den Koordinatenachsen parallel sind, und die die  $x$ -Achse in  $P_1(4/0)$ ,  $P_2(8/0)$  und die  $y$ -Achse in  $P_3(0/1)$ ,  $P_4(0/3)$  schneidet.
24. Ein Ellipsenpunkt  $P$  (im 1. Quadranten) hat von den Brennpunkten der Ellipse  $(\pm\sqrt{7}/0)$  die Abstände  $r_1 = 3$  und  $r_2 = 5$ . Wie lautet die Gleichung der Ellipse? Welche Koordinaten hat  $P$ ?
25. Welche der folgenden Geraden schneidet die Ellipse mit der Gleichung  $10x^2 + 4y^2 = 120$ ? Bestimmen Sie gegebenenfalls die Koordinaten der Schnittpunkte. Skizze!
- a)  $y + x - 5 = 0$                       b)  $3x - 2y - 20 = 0$
26. Bestimmen Sie Lage und Halbachsen der Hyperbel  $\frac{(y+2)^2}{16} - \frac{(x+1)^2}{4} = 1$ . Skizzieren Sie die Hyperbel!
27. Ermitteln Sie die Gleichung der Hyperbel mit Mittelpunkt  $M(1/-1)$ , Scheitel  $S_1(5/-1)$ , die durch  $P(6/2)$  geht.
28. Von einer Hyperbel kennt man die Asymptoten  $y = \pm\frac{2}{3}x$  und den Punkt  $P(2/1)$ . Wie lautet die Gleichung der Hyperbel?
29. Bestimmen Sie  $a$  so, daß der Mittelpunkt der Hyperbel  $y = \frac{2x-3}{3x-a}$  auf der Normalparabel  $y = x^2$  liegt.
30. Bestimmen Sie Scheitel, Parameter und Achsenrichtung der Parabeln:
- a)  $2y^2 - 9x + 12y = 0$                       b)  $2x^2 + 6x + 5y = 0$
31. Die Gerade  $y = x + 2$  ist Tangente an eine Parabel mit der Gleichung  $y^2 = 2px$ . Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel und die Koordinaten des Tangentenberührungspunkts.
32. Welche Bedingung muß  $b$  erfüllen, damit die Gerade  $y = 2x + b$  die Parabel  $(y-2)^2 = x + 1$  a) schneidet, b) berührt, c) nicht schneidet?
33. Bestimmen Sie die Gleichung einer zur  $x$ -Achse symmetrischen Parabel, welche durch den Mittelpunkt der Hyperbel  $y - 3 = \frac{x-2}{2x+1}$  und den Scheitel der Parabel  $2y - 1 = x - x^2$  hindurchgeht.
34. a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Scheitels  $S$  der Parabel  $y = 2x^2 + 5x + 4$   
 b) Wie lautet die Gleichung der Hyperbel mit achsenparallelen Asymptoten, deren Mittelpunkt mit  $S$  übereinstimmt, und die durch  $P(1/1)$  geht?  
 c) Die Parabel aus a) wird an der Geraden  $y = -3,5$  gespiegelt. Welche Gleichung hat die entstehende Parabel?
35. Bestimmen Sie Art der Kurve und ihre charakteristischen Kenngrößen:
- a)  $9x^2 - 16y^2 - 36x - 128y - 364 = 0$                       b)  $x^2 + 2x - 10y + 6 = 0$   
 c)  $x^2 - 3y^2 + 2x + 18y - 14 = 0$                       d)  $4x^2 - y^2 - 8x + 6y - 5 = 0$   
 e)  $2x^2 + 5y^2 - 12x + 10y + 13 = 0$                       f)  $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$

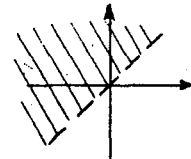
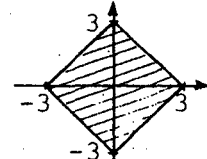
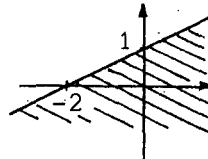
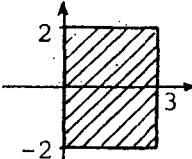
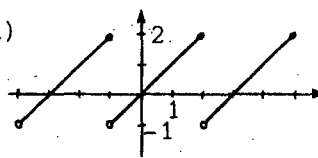
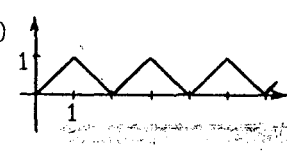
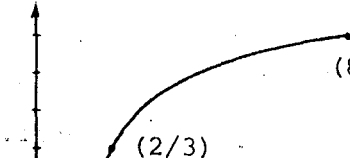
## AUFGABEN ZUR ALGEBRA

1. a) 12,5%; b) 17,50 DM; c) 4 858,96 DM; d) 19,684%;  
 e)  $n = \ln 2 / \ln(1+0,01p) \Rightarrow 23,45; 14,21; 7,27$  Jahre
2. a)  $3 \cdot 10^5$ ; b)  $3,7 \cdot 10^{-7}$ ; c)  $2,08 \cdot 10^{-12}$
3. a)  $0,0000133 \text{ m}^2/\text{s}$ ; b)  $79\,000\,000\,000 \text{ Pa} = 8,056 \cdot 10^5 \text{ at} = 805\,600 \text{ at}$ ;  
 c)  $1 \text{ J} = 2,3885 \cdot 10^{-4} \text{ kcal} = 0,00023885 \text{ kcal}$
4. a)  $3 \cdot 10^{10} \text{ cm/s} = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} = 3 \cdot 10^5 \text{ km/s} = 1,8 \cdot 10^{10} \text{ m/min} = 1,8 \cdot 10^7 \text{ km/min}$   
 $= 1,08 \cdot 10^9 \text{ km/h}$ ; b)  $9,4608 \cdot 10^{17} \text{ cm}$ ; c)  $7,2 \cdot 10^{21}$
5. a) -1, -5; b) -3; c) -; d) 0, 2; e) -1, 3; f) 0,4, 0,8;  
 g)  $\pm 1, 0, -2$ ; h) 0; i) 0,5, 3.
6. a)  $(x-3)(x-5)$ ; b)  $4(x-\frac{1}{2})^2$ ; c)  $18(x-\frac{1}{6})(x-\frac{1}{3})$ ; d)  $2(x-\frac{1}{2})(x+2)$ ;  
 e)  $(x-a)(x+2b)$
7. a)  $a(x^2-x-6) = 0, a \neq 0$ ; b)  $a(x^2+2x-2) = 0, a \neq 0$
8. a)  $\pm 2, \pm 3$ ; b)  $\pm 4$ ; c) - . 9. a) 0, -4; b)  $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$
10. a)  $c < 9$  ( $c = 9; c > 9$ ); b)  $c < 1$  ( $c = 1; c > 1$ ). 11.  $t > -5$
12. a)  $\frac{(x-2)(x-3)}{2(x+3)(x-1)}$  b)  $\frac{2x^2+1}{(x+2)(x-3)}$  c)  $\frac{3(x-3)}{(x-2)} \sqrt{(x+\sqrt{8})(x-\sqrt{8})}$
13. a) 3, 7; b) -1, 2; c)  $\emptyset$  (durch Kürzen stetig ergänzt bei -3)
14. a) 8 DM; b) 5,4%. 15. a) 5,53 s (aufwärts), 14,47 s (abwärts); b)  $\frac{2v_0}{g} = 20 \text{ s}$
16. a)  $-\frac{1}{2}$ ; b)  $-\frac{1}{3}$ ; c)  $\emptyset$ ; d) -2; e)  $\emptyset$ ; f)  $\mathbb{R} \setminus \{-5, 5\}$
17. a)  $2x$  ( $x \neq \frac{2}{3}, -\frac{1}{2}$ ); b)  $-\frac{4x}{x+3}$  ( $x \neq \pm 1, -3$ ); c)  $1/(2s^4)$  ( $s \neq 0, \pm 1$ );  
 d)  $1-u-u^2$  ( $u \neq -1$ )
18. a)  $50a^2 + 8ab + 15b^2$ ; b)  $32uv$
19. a)  $(2a-6)^2$ ; b)  $(4x+\sqrt{2}y)(4x-\sqrt{2}y)$ ; c)  $(10r+s)^2$ ;  
 d)  $(\frac{5}{4}r^2+9s^2)(\frac{\sqrt{5}}{2}r+3s)(\frac{\sqrt{5}}{2}r-3s)$ ; e)  $2z(z+1)(z-1)(z+\sqrt{2})(z-\sqrt{2})$ ; f)  $(au-bv)^2$
20. a)  $3x+11+\frac{14}{x-2}$ ; b)  $5x^2-6x+15-\frac{38}{x+3}$ ; c)  $-x^3+2x^2-2x+3$ ;  
 d)  $3x^2+11x+27+\frac{58x-53}{x^2-3x+2}$ ; e)  $z^3+z^2+z^2+z^2+z^3$ ; f)  $2a^2-3ab-2b^2$
21. a) 1; b)  $1/(81x^2)$ ; c)  $a^2$ ; d)  $(a^2c^5)/(b^5d)$ ; e)  $a^{23/12}$ ; f)  $a^{1/3}$ ;  
 g) 1; h)  $x^{-3/28}$ ; i)  $z^{9/20}$
22. a) 2; b)  $\emptyset$ ; c) -1, 0; d)  $\emptyset$ ; e) 3, 7; f)  $4a$
23. a)  $x = (y-1)^2, y \geq 1$ ; b)  $x = y^2/(12-8\sqrt{2}), y \geq 0$ ;  
 c)  $x = (1-\frac{1}{y})^2, y \geq 1$  oder  $y < 0$ ; d)  $x = \pm\sqrt{4+(1-y)^2}, y \leq 1$
24. a) 5; b)  $\frac{1}{3}$ ; c) -2; d) 4; e)  $p/q$ ; f)  $x-y$
25. a)  $3\ln a + 2\ln b + \ln c - 4\ln d$ ; b)  $\ln a + \ln(a+1)$ ; c) nicht weiter zerlegbar;  
 d)  $2\ln(u+v)$
26. a)  $\log 6$ ; b)  $\log(ab)$ ; c)  $\log \frac{xy}{z}$ ; d)  $\log \sqrt[3]{v^3/u}$ ; e)  $\log(u^3v^2w^2)$ ;  
 f)  $\log(1/a) = -\log a$
27. a)  $x = 2(1-e^y)$ ; b)  $x = \frac{1}{2}\ln(2y+1)$ ; c)  $x = \ln \frac{y}{1-y}$ ; d)  $x = +\sqrt{1+e^y}$



28. a)  $\ln 2 - 1 = -0,3069$ ; b)  $(2 + 1/e)/3 = 0,7893$ ; c)  $1 - \ln(e-1) = 0,4587$ ;  
 d) 0; e)  $\frac{3 \ln 2 + 2 \ln 3}{\ln 3 - \ln 2} = (\ln 72)/(\ln 1,5) = 10,5476$ ; f)  $\frac{\ln 21}{\ln 1,4} = 9,0484$ ;  
 g)  $\ln 2 = 0,6931$ ; h)  $(e/\frac{1}{e}), (\frac{1}{e}/e)$ ; i)  $11/4$ ;  
 k)  $(\ln \frac{41}{8})/(\ln \frac{3}{2}) = 4,0303$
29. a)  $x > -\frac{1}{7}$ ; b)  $(-\infty; 0) \cup (1; \infty)$ ; c)  $\emptyset$ ; d)  $(-3; -\frac{3}{2}] \cup (0; \infty)$ ;  
 e)  $0 < x < 1$ ; f)  $(-\infty; 0) \cup [2; \infty)$
30. a)  $(-\infty; -2] \cup [1; \infty)$  b)  $(-\infty; 0) \cup (1; \infty)$
31. a)  $\frac{1}{5}, 1$ ; b)  $0,5 < x < 3,5$ ; c)  $\{x < \frac{1}{4}\} \cup \{x > \frac{3}{4}\}$ ; d) 1;  
 e) -18, -2,4; f)  $\mathbb{L} = \mathbb{R}$
32. a)  $\sum_{k=1}^6 2k$ ; b)  $\sum_{k=0}^4 (2k+1) = \sum_{n=1}^5 (2n-1)$ ; c)  $\sum_{k=0}^4 (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ ;  
 d)  $\sum_{k=0}^5 (-1)^k \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^5 \frac{(-x)^k}{k!}$
33. a)  $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ ; b)  $a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5 = (a+b)^5$ ;  
 c)  $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$
34. a)  $31/4$ ; b)  $61/20$ ; c) 31; d)  $8/9$
35. a) 210; b) 220; c) 330; d) 13 983 816
36. a)  $x^7 - 7x^6 + 21x^5 - 35x^4 + 35x^3 - 21x^2 + 7x - 1$ ;  
 b)  $u^5 - 10u^4 v + 40u^3 v^2 - 80u^2 v^3 + 80u v^4 - 32v^5$ ; c)  $z^3 + 3z + \frac{3}{z} + \frac{1}{z^3}$

#### AUFGABEN ZUM ABSCHNITT ÜBER ELEMENTARE FUNKTIONEN

1. a)  b)  c)  d) 
2. a)  b)  c) 
3. a)  $x \in \mathbb{R}, y \geq 2$ ; ger. b)  $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$ ; ung.  
 c)  $x \neq 0, y \neq 0$ ; ung. d)  $x \neq 1, y > 0$   
 e)  $x \in \mathbb{R}, 0 < y \leq 1$ ; ger. f)  $x \neq -2, y \neq 1$   
 g)  $x \geq 4, y \geq 2$  h)  $-1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ ; ger. i)  $|x| \geq 4, y \leq 2$ ; ger.  
 j)  $x \in \mathbb{R}, -1 \leq y \leq 5$ ; ger. k)  $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$ ; ung. l)  $x > -3, y \in \mathbb{R}$   
 m)  $x < 5/2, y \in \mathbb{R}$  n)  $x \in \mathbb{R}, y > -4$  o)  $x \in \mathbb{R}, y < 1$
4. a)  $(-1/0), (1/0), (0/-1)$ ; b)  $(0/1)$ ; c)  $(0/0), (-\frac{1}{2}/0)$
5. a)  $y > 0$ ; b)  $-2 \leq y < 4$ ; c)  $y > 0$ ; d)  $-1 \leq y \leq 3$
6. a)  $\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$ ; b)  $\frac{1}{x}$ ; c)  $\frac{2x+1}{x-1}$
7. a)  $f(3t) = \frac{1+3t}{2-3t}$  b)  $f(x-1) = \frac{x}{3-x}$  c)  $f(2x^2) = \frac{1+2x^2}{2-2x^2}$   
 d)  $f(\frac{1}{x}) = \frac{x+1}{2x-1}$  e)  $f(\cos u) = \frac{1+\cos u}{2-\cos u}$  f)  $f(\frac{x-1}{x}) = \frac{2x-1}{x+1}$

8.a)  $|f(g(x))| = \sqrt{\frac{1}{x-1}} + 1, x \neq 1; \quad |g(f(x))| = \sqrt{x+1}/(\sqrt{x+1}-1), x \neq 0$

b)  $f[g(x)] = \frac{1}{3}x, x \in \mathbb{R}; \quad g[f(x)] = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}, x \in \mathbb{R}$

c)  $f[g(x)] = (2x-1)^2, x \in \mathbb{R}; \quad g[f(x)] = 2x^2-1, x \in \mathbb{R}$

9.a)  $(-1/1); \quad b) (\frac{1+\sqrt{5}}{2} / \frac{1+\sqrt{5}}{2}), (\frac{1-\sqrt{5}}{2} / \frac{1-\sqrt{5}}{2});$

c)  $(3+\sqrt{6}/4+\sqrt{6}), (3-\sqrt{6}/4-\sqrt{6}); \quad d) (0/0), (1/0), (4/0)$

10. Normalparabeln mit Scheitel  $S_a(-3/0), S_b(-3/-2), S_c(1/1)$

11.a)  $y-1 = (x-3)^2, S(3/1) \quad b) y-3 = \frac{1}{4}(x-2)^2, S(2/3)$

c)  $y = -\frac{1}{2}(x-2)^2, S(2/0) \quad d) y + \frac{9}{2} = 2(x + \frac{3}{2})^2, S(-\frac{3}{2}/-\frac{9}{2})$

allg.:  $y - y_0 = a(x - x_0)^2 \dots$  Scheitel  $(x_0/y_0)$ ;  $a > 0$  ( $a < 0$ ): nach oben (nach unten) geöffnet;  $|a| > 1$  ( $|a| < 1$ ): enger (weiter) als Normalparabel

12.a)  $y = -3x^2 + 7x - 2 = -3(x - \frac{7}{6})^2 + \frac{25}{12}; \quad S(\frac{7}{6}/\frac{25}{12}), (\frac{1}{3}/0), (2/0), (0/-2)$

b)  $y = x^2 - 6x + 8 = (x-3)^2 - 1; \quad S(3/-1), (2/0), (4/0), (0/8)$

c)  $y = \frac{1}{2}x^2 - x - 2 = \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{5}{2}; \quad S(1/-\frac{5}{2}), (1-\sqrt{5}/0), (1+\sqrt{5}/0), (0/-2)$

d)  $y = -\frac{1}{4}x^2 + x + 4 = -\frac{1}{4}(x-2)^2 + 5; \quad S(2/5), (2-2\sqrt{5}/0), (2+2\sqrt{5}/0), (0/4)$

13.)  $2x^3 + 4x^2 - 26x + 20 = 2(x-1)(x-2)(x+5)$

14.)  $c = 0, (-3/0), (2/0)$

15.)  $8 - 4a$

16.)  $y = a(x+2)(x-\frac{1}{2})(x-5) = a(x^3 - \frac{7}{2}x^2 - \frac{17}{2}x + 5); \quad a = -\frac{2}{3}$

17.)  $g(x) = x^2 - 3x + 2; \quad x^4 - 3x^3 + 6x - 4 = (x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x-1)(x-2)$

18.)  $y = (4h/d^2) \cdot x(x-d) = 0, 16x(x-10)$

19.)  $y = 2e^x - 1$

20.)  $b = \frac{1}{2}$

21.a)  $y = (\frac{1}{4})^x = 4^{-x}; \quad b) y = -(4^x); \quad c) y = \log_4 x = \frac{1}{\ln 4} \ln x$

22.)  $f(0) = 0; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = A; \quad t_1 = (\ln 2)/k, \quad t_2 = (\ln 10)/k$

23.a)  $T_H = \frac{\ln 2}{\lambda}; \quad b) t_{25\%} = 2T_H, \quad t_{5\%} = \frac{\ln 20}{\ln 2} T_H, \quad t_{1\%} = \frac{\ln 100}{\ln 2} T_H;$

c)  $\lambda_{Rn} = 0,1824(\text{Tage})^{-1}; \quad \lambda_{Ra} = 4,387 \cdot 10^{-4}(\text{Jahre})^{-1}; \quad \lambda_U = 1,540 \cdot 10^{-10}(\text{Jahre})^{-1}$

24.a)  $D_1 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , symm. zur y-Achse,  $f_1(x) \rightarrow -\infty$  für  $x \rightarrow 0$ ,  $f_1(x) \rightarrow \infty$  für  $x \rightarrow \infty$  durch  $(\pm 1/0)$

b)  $D_2 = (0, \infty)$ ,  $f_2(x) \geq 0$ ;  $f_2(x) \rightarrow +\infty$  für  $x \rightarrow 0$ ,  $f_2(x) \rightarrow \infty$  für  $x \rightarrow \infty$ ; durch  $(1/0)$

25.a) N:  $x = 1$ ; P:  $x = -1$ ; waagr. As.:  $y = 1$ ;  $(0/-1)$

b) N:  $x = 3$ ; P: -; waagr. As.:  $y = 0$ ;  $(0/-3)$

c)  $y = x+2$  für  $x \neq 2$ . N:  $x = -2$ ; P: -; stetig ergänzbar durch  $(2/4), (0/2)$

d)  $y = x^2 - 1$  für  $x \neq 1$ . N:  $x = -1, x = 1$  (stetig ergänzt); P: -;  $(0/-1)$

e)  $y = \frac{2(x-2,5)}{x-3}$  für  $x \neq 3$ . N:  $x = 2,5$ ; P:  $x = 3$  (nach Kürzen mit  $x-3$  ist  $x=3$  immer noch Nenner-Nullstelle); waagr. As.:  $y = 2$ ;  $(0/\frac{5}{3})$

f) N: -; P:  $x = -1$ ; schiefe As.:  $y = x+2$ ;  $(0/5)$

g) N:  $x = 0$ ; P:  $x = 2$ ; waagr. As. nach rechts:  $y = 1$ , nach links  $y = -1$

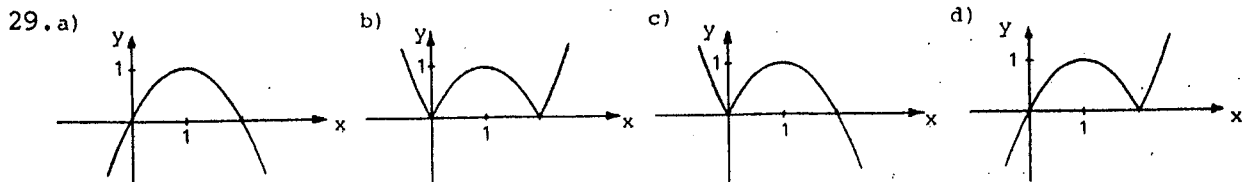
h) N:  $x = \pm 2$ ; P:  $x = 0$  (ohne ZW); waagr. As.:  $y = -1$

i) N:  $x = -2$ ; P:  $x = 1$  (ohne ZW); waagr. As. nach rechts  $y = 1$ , nach links  $y = -1$  durch  $(0/2)$

26.a) N: -; P:  $x = 1$ ; schiefe As.:  $y = x+1$ ;  $(0/-1)$

b) N:  $x = 0$  dreifach (Wendepunkt mit waagr. Tangente); P:  $x = 2$ ; asymptotische Näherungskurve  $y = (x^2+2x+4)/6$

27.)  $y = \frac{2(x+2)(x-2)}{x-4} = \frac{2x^2-8}{x-4}; \quad y = 2x+8; \quad 28.) \quad y = \frac{9(x-2)}{2(x+3)^2}$



30. a) 
$$\begin{cases} (x-1)/2 & \text{für } x \geq 1 \\ (1-x)/2 & \text{für } x < 1 \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} 2-x & \text{für } x \geq 0 \\ 2+x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

c) 
$$\begin{cases} -2x & \text{für } x \leq -1 \\ 2 & \text{für } -1 < x < 1 \\ 2x & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

d) 
$$\begin{cases} 2x & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

e) 
$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{für } x \leq 1 \text{ oder } x \geq 3 \\ -x^2 + 4x - 3 & \text{für } 1 < x < 3 \end{cases}$$

f) 
$$\begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

31. a)  $x \in \mathbb{R}$ ;  $(-0,5/0)$ ,  $(1/0)$ ,  $(2/0)$ ,  $(0/2)$ ; von links unten nach rechts oben  
 b)  $x \neq -1$ ;  $(1/0)$ ,  $(0/-1)$ ; As.  $x = -1$ ,  $y = 1$  (rechtwinklige Hyperbel s. S. 68)  
 c)  $x \in \mathbb{R}$ ,  $0 < y \leq 1$ ; symm. zur  $y$ -Achse; waagr. As.  $y = 0$ ; Hochpunkt  $(0/1)$   
 d)  $x \neq \pm 1$ ;  $y < 0$  für  $|x| > 1$ ;  $y \geq 1$  für  $|x| < 1$ ;  $(0/1)$ ; symm. zur  $y$ -A.; senkr. As.  $x = \pm 1$  (Pol mit VZW); waagr. As.  $y = 0$   
 e)  $x \neq -1$ ,  $y \geq 0$ ; doppelte Nullst.  $(0/0)$ ; senkr. As.  $x = -1$  (Pol ohne VZW); waagr. As.  $y = 1$   
 f)  $x \neq \pm 1$ ; punktsymm. zu  $O$ ; dreifache Nullst.  $(0/0) =$  Wendepunkt mit waagr. Tangente; senkr. As.  $x = \pm 1$  (Pol mit VZW); schiefe As.  $y = x$  (Annäherung nach rechts von oben)  
 g)  $x \leq -1$ ;  $y \geq 0$ ; Halbparabel  $S(1/0)$ , nach links geöffnet, durch  $(0/1)$   
 h)  $x \geq 1,5$ ;  $y \geq 0$ ; Halbparabel  $S(1,5/0)$ , nach rechts geöffnet  
 i)  $|x| \geq 1$ ;  $y \leq 0$ ; symm. zur  $y$ -Achse; Hälfte einer Hyperbel mit As.  $y = \pm x$  (Hinweis: Quadrieren, dann vgl. S. 66)  
 j)  $|x| < 1$ ;  $y \geq 1$ ; symm. zur  $y$ -Achse; senkr. As.  $x = \pm 1$ ; Tiefpunkt  $(0/1)$   
 k)  $x \in \mathbb{R}$ ;  $y > 0$ ;  $e^x$ -Kurve um 2 nach rechts verschoben  
 l)  $x \in \mathbb{R}$ ;  $0 < y \leq 1$ ; symm. zur  $y$ -A.; waagr. As.  $y = 0$ ;  $(0/1)$  Knick (rechtwinklig)  
 m)  $x \in \mathbb{R}$ ;  $0 < y \leq 1$ ; symm. zur  $y$ -A.; waagr. As.  $y = 0$ ; Hochpunkt  $(0/1)$  mit waagrechter Tangente  
 Zusatz zu m und l:  $e^{-x^2} > e^{-|x|}$  für  $|x| < 1$ ;  $e^{-x^2} < e^{-|x|}$  für  $|x| > 1$   
 n)  $x \in \mathbb{R}$ ;  $y > -1$ ;  $e^{-x}$ -Kurve um 1 nach rechts und um 1 nach unten verschoben  
 o)  $x > 1$ ;  $\ln x$ -Kurve um 1 nach rechts verschoben  
 p)  $|x| < 2$ ; symm. zur  $y$ -Achse;  $(\pm\sqrt{3}/0)$ ; senkr. As.  $x = \pm 2$ ; Hochpunkt  $(0/\ln 4)$   
 q)  $x \neq 0$ ; symm. zur  $y$ -A.;  $(\pm 1/0)$ ; zwei Zweige: linker Zweig entsteht durch Spiegelung der  $\ln x$ -Kurve an der  $y$ -Achse  
 r)  $x \neq \pm 1$ ; symm. zur  $y$ -A.;  $(\pm\sqrt{2}/0)$ ;  $(0/0)$  mit waagr. Tangente;  $y \rightarrow -\infty$  für  $x \rightarrow 1 \pm 0$ ;  $y \rightarrow \infty$  für  $x \rightarrow \pm\infty$  (vgl. Bsp. 1 S. 36)

### AUFGABEN ZUR TRIGONOMETRIE

1. a) 1,27 cm; b) 1,19 cm

Bemerkung: Steigung bzw. Gefälle  $p$ :  $p\% = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot 100\% \iff m = \tan \alpha = \frac{p}{100}$   
 z.B.  $100\% \iff \alpha = 45^\circ$ ,  $50\% \iff \alpha = 26,57^\circ$

2. a) 2,61 m; b)  $35,26^\circ$ ; c)  $36,34^\circ$

3. a)  $c = 118,44$  mm,  $\alpha = \beta = 50,7^\circ$ ;  $A = 42,85$  cm<sup>2</sup>

b)  $\alpha = \beta = 58,45^\circ$ ,  $\gamma = 63,11^\circ$ ,  $c = 53,8$  mm;  $A = 11,78$  cm<sup>2</sup>

c)  $a = b = 6,09$  cm,  $c = 3,72$  cm,  $\gamma = 35,60^\circ$ ;  $A = 10,79$  cm<sup>2</sup>

4.)  $c = 2h_c \tan \frac{\gamma}{2}$ ;  $A = h_c^2 \cdot \tan \frac{\gamma}{2}$

5.)  $L = 103,76$  m;  $h = 84,44$  m

6. a)  $c = 462,96$ ;  $\beta = 44^\circ 20'$ ;  $\gamma = 58^\circ 44'$

b)  $\alpha_1 = 54,43^\circ$ ;  $\beta_1 = 84,87^\circ$ ;  $b_1 = 72,86$   
 $\alpha_2 = 125,57^\circ$ ;  $\beta_2 = 13,73^\circ$ ;  $b_2 = 17,36$  } 2 Lösungen!

c)  $b = 9,53$ ;  $\alpha = 56,40^\circ$ ;  $\gamma = 83,80^\circ$

d)  $\alpha = 41,30^\circ$ ;  $\beta = 57,64^\circ$ ;  $\gamma = 81,06^\circ$

e)  $\alpha = 66,10^\circ$ ;  $b = 1,33$ ;  $c = 1,87$

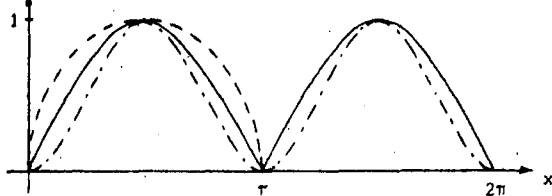
7.)  $\sin \beta = \frac{r}{ac} = \frac{r}{42} \Rightarrow \beta_1 = 28,44^\circ; \beta_2 = 151,56^\circ$  (2 Lösungen!)

8.a) 235,6 m; b) 0,75 m; c) 338,1 m<sup>2</sup>

Bemerkung zu b): allgemein gilt  $\Delta L = \Delta R \cdot x$ , unabhängig von R!

9.)  $h = 23,2$  m; 12.)  $\alpha = 93,9^\circ$ ; 13.) 497,43 m; 14.)  $a = 68,40$  mm  
 15.)  $s = 7,92$  cm; 16.a)  $s = 1,00$  m,  $a = 1,14$  m; b)  $\alpha = 90,72^\circ$ ,  $b = 8,23$  cm  
 17.)  $A = 2,42$  cm<sup>2</sup>; 18.a) 4,50 m; b) 4,64 m; 19.)  $\alpha = 40,04^\circ$

20.)



alle Funktionen sind  $2\pi$ -periodisch

—  $|\sin x|$  ("negative" Teile der Sinuskurve an x-Achse spiegeln)

---  $\sqrt{\sin x}$  (def. für  $\sin x \geq 0$ ; senkr. Tangenten an Randstellen)

- · -  $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

$\sin^2 x \leq \sin x \leq \sqrt{\sin x}$  für  $0 \leq x \leq \pi$

21.a)  $x_N = \pm 1/\pi, \pm 1/(2\pi), \pm 1/(3\pi), \dots$

$y_{\max} = 1$  bei  $x_M = \dots -2/(7\pi), -2/(3\pi), 2/\pi, 2/(5\pi), 2/(9\pi), \dots$

$y_{\min} = -1$  bei  $x_m = \dots -2/(5\pi), -2/\pi, 2/(3\pi), 2/(7\pi), 2/(11\pi), \dots$

b)  $x_N = 0, \pm\sqrt{\pi}, \pm\sqrt{2\pi}, \pm\sqrt{3\pi}, \dots$

$y_{\max} = 1$  bei  $x_M = \pm\sqrt{\pi/2}, \pm\sqrt{5\pi/2}, \pm\sqrt{9\pi/2}, \dots$

$y_{\min} = -1$  bei  $x_m = \pm\sqrt{3\pi/2}, \pm\sqrt{7\pi/2}, \pm\sqrt{11\pi/2}, \dots$

22.a)  $26,23^\circ; 153,77^\circ$  b)  $233,13^\circ; 306,87^\circ$  c)  $66,42^\circ; 293,58^\circ$

d)  $97,76^\circ; 262,24^\circ$  e)  $56,31^\circ; 236,31^\circ$  f)  $156,63^\circ; 336,63^\circ$

g)  $49,64^\circ; 229,64^\circ$  h)  $101,31^\circ; 281,31^\circ$

23.a)  $x_1 = \pi/6 + k \cdot 2\pi, x_2 = 5\pi/6 + k \cdot 2\pi$ ; b)  $x = \pi/3 + k\pi$

c)  $x_1 = (5\pi)/6 + k \cdot 2\pi, x_2 = (7\pi)/6 + k \cdot 2\pi$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ )

24.a)  $\alpha = 300^\circ$ ; b)  $\beta = 120^\circ$ ; c)  $\gamma = 296,57^\circ$ ; d)  $\delta = 336,42^\circ$

25.)  $x_1 = 1,419$ ;  $x_2 = 2,864$

26.a)  $y_{\max} = 5, y_{\min} = -1$ ; b)  $\frac{5\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$ ; c)  $0,944 + k\pi; 3,245 + k\pi$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ )

27.a)  $\sin x = \tan x / (\pm\sqrt{1 + \tan^2 x})$ ;  $\cos x = 1 / (\pm\sqrt{1 + \tan^2 x})$

b1)  $\sin x = 0,371$ ;  $\cos x = 0,928$ ;  $\cot x = 2,5$

b2)  $\sin x = -0,371$ ;  $\cos x = -0,928$ ;  $\cot x = 2,5$

28.a)  $2 \sin x$ ; b)  $\cos 2x$ ; c) 1; d) 1; e)  $\sin^3 x$ ; f)  $2/\cos^2 x$ ;

g)  $2 \sin x$ ; h)  $\cos \alpha$ ; i)  $\sin 150^\circ = 1/2$

29.a)  $-\sin(x/2)$ ; b)  $\sin x$ ; c)  $\cos x$ ; d)  $2 \cos x \cos y$

30.a)  $\frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{2\pi}{3}$ ; b)  $\frac{\pi}{36} + k\pi$ ;  $\frac{13\pi}{36} + k\pi$ ; c)  $\frac{7\pi}{6} + k \cdot 2\pi$ ;

( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ )

d)  $\frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{3}$ ; e)  $\frac{4\pi}{15} + k\pi, \frac{7\pi}{15} + k\frac{\pi}{2}$

31.a)  $\pi/2 + k\pi; \pi + 2k\pi$ ; b)  $k\pi, \pi/3 + 2k\pi, 5\pi/3 + 2k\pi$ ; c) keine Lösung

d)  $\pi/2 + 2k\pi; 2\pi/3 + 2k\pi; 4\pi/3 + 2k\pi$ ; e)  $0,999 + k\pi; 2,143 + k\pi$ ;

f)  $\pi/2 + k\pi; 0,421 + 2k\pi; 5,863 + 2k\pi; 2,721 + 2k\pi; 3,562 + 2k\pi$ ;

g)  $0,816; 2,325; 3,372; 6,052 (+2k\pi)$ ; h)  $0,609; 1,772 (+2k\pi)$ ;

i)  $k\pi, \pi/4 + k \cdot \pi/2$ ; j)  $1,397; 2,530 (+k\pi)$ ; k)  $1,408; 4,232 (+2k\pi)$ ;

l) keine Lösung

32.a)  $\pi/6; 5\pi/6; 3,481; 5,943 (+2k\pi)$

b)  $1,107; 2,034; 4,249; 5,176 (+2k\pi)$

33.a)  $4\pi/3$ ; b)  $2\pi$ ; c)  $8\pi$ ; d)  $2\pi$ ; e) nicht periodisch; f)  $2\pi$

34.a)  $y = 2 \cos(x \pm \pi)$ ; b)  $s = 3 \cos(20t + \frac{\pi}{3})$ ; c)  $i = 0,4 \cos(t + \frac{\pi}{6})$

- 35.)  $y = 0,75 \sin(\pi x + \frac{\pi}{4}) = 0,75 \sin[\pi(x + \frac{1}{4})]$
36. a) Amplitude  $A = 1$ , Periode  $P = 2\pi$ , mit pos. Steigung ( $\uparrow$ ) durch  $(-\pi/4) / 0$   
 b)  $A = 2$ ,  $P = 2\pi$ ;  $\uparrow$  durch  $(-\pi/4) / 0$   
 c)  $A = 1$ ,  $P = \pi$ ;  $\uparrow$  durch  $(-\pi/8) / 0$   
 d)  $A = 1$ ,  $P = \pi$ ;  $\uparrow$  durch  $(-\pi/4) / 0$   
 e) Schwingung um Mittellage  $y = 1$  mit  $A = 1$ ,  $P = \pi$ , Tiefpunkt  $(\pi/6) / 0$   
 f) Mittellage  $y = -1$ ,  $A = 2$ ,  $P = 2\pi$ , Hochpunkt  $(-2\pi/3) / 1$
- 37.)  $t_1 = 0,00295 \text{ s}$ ;                      38.)  $x_1 = 1,7579$ ;  $x_2 = 5,8747$

### AUFGABEN ZUR ANALYTISCHEN GEOMETRIE

1. a)  $a = 6,5$ ;  $b = 5$ ;  $c = 6,5$ ;  $d = 5$ ;  $e = 7,159$ ;  $f = 9,124$ ; Parallelogramm  
 b) AC:  $y = (13/6)x - (5/2)$ ; BD:  $y = -(1/6)x + 1$ ;  $M(1,5/0,75)$
2. a)  $P_1(0/0)$ ,  $P_2(5/0)$ ;                      b)  $P(0/5)$
3. a)  $y = -x + 1$ ;  $a = 1$ ,  $b = 1$ ;                      b)  $y = x/2 + 4$ ;  
 c)  $y = -\sqrt{3}x + (2\sqrt{3} - 1)$ ;                      d)  $y = -3x/2 + 2$
4. a1)  $y = 2x + 9$ ;                      a2)  $y = -\frac{1}{2}x + 4$ ;                      b)  $\frac{y-5}{x+2} = m$  (und  $x = -2$ )
- 5.) AB:  $y = \frac{1}{2}x - 2$ ; BC:  $y = -\frac{1}{3}x + 3$ ; CA:  $y = 3x + 3$ ;  $BC \perp CA$ , da  $-\frac{1}{3} \cdot 3 = -1$
6. a)  $y = 2x + 6$ ;                      b)  $h_a = 12/\sqrt{5} = 5,37$ ;                      c)  $\alpha = 53,13^\circ$
- 7.) 2 Lösungen:  $y = \frac{3}{2}x - 3$ ;  $y = \frac{3}{8}x + \frac{3}{2}$
- 8.) 2 Lösungen:  $y = -3x - 3$ ;  $y = \frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$
9. a)  $36,87^\circ$ ;                      b)  $45^\circ$ ;                      c)  $0^\circ$ ;                      d)  $\tan \alpha = \frac{a^2 - b^2}{2ab}$
10. a)  $B(2/1)$ ;                      b)  $C(-1/-5)$
- 11.) A auf, B oberhalb, C auf, D unterhalb
12. a) unterhalb der Ger.  $y = 2 - x$ , rechts von  $x = -2$ , oberhalb von  $y = -2$ ;  
 b) unterhalb und auf der Ger. durch  $(4/0)$  und  $(0/2)$ , oberhalb und auf der Ger. durch  $(-2/0)$  und  $(0/2)$ , rechts von und auf der Ger.  $x = -4$ .
13. a)  $M(3/-2)$ ,  $r = 6$ ;                      b)  $M(-2,5/3,5)$ ,  $r = 4$ ;                      c)  $M(0/-3,5)$ ,  $r = 3,5$
- 14.)  $\Delta = B^2 + C^2 - 4AD > 0$ : Kreis;  $\Delta = 0$ : Punkt ("Nullkreis")  
 $\Delta < 0$ : keine Kurvenpunkte ("imaginärer Kreis")
- 15.)  $M(-2; 4/3, 2)$                       a)  $r = 3,2$ ;                      b)  $r = 4$ ;                      c)  $r = \sqrt{13}$
- 16.)  $P(2/2)$ ,  $Q(4/0)$ ;  $d = \overline{PQ} = 2\sqrt{2}$ ;                       $M(3/1)$
- 17.)  $y = 0$ ;  $y = \frac{4}{3}x$
18. a)  $x^2 + y^2 = 9$ ;                      b)  $x^2 + y^2 - ax = 0$
19. a)  $M(2/-1)$ ,  $r = 2$ ;  $\overline{AM} = \sqrt{2} < 2$ ;                      b)  $y = -x + 3$
20. a)  $(1,4/4,8)$ ;  $(-4/3)$                       b) keine Schnittpunkte
- 21.)  $r_1 = 2$ ;  $B_1(2,6/3,2)$ ;                       $r_2 = 8$ ;  $B_2(7,4/6,8)$
- 22.)  $e = 7$ ;  $a = 3 + \sqrt{58} = 10,616$ ;  $b = \sqrt{a^2 - e^2} = 7,981$
- 23.)  $\frac{3(x-6)^2}{140} + \frac{8(y-2)^2}{35} = 1$                       24.)  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ ;  $P(\frac{4}{7}\sqrt{7}/\frac{3}{7}\sqrt{42})$
25. a) schneidet:  $x_{1,2} = (10 \pm \sqrt{170})/7$ ,  $y_{1,2} = 5 - x_{1,2}$ ;                      b) schneidet nicht
- 26.)  $M(-1/-2)$ ,  $S_1(-1/2)$ ,  $S_2(-1/-6)$ ; vertikale Hauptachse
- 27.)  $(x-1)^2 - (y+1)^2 = 16$                       28.)  $4x^2 - 9y^2 = 7$

29.)  $M(\frac{a}{3}/\frac{2}{3})$ ; Bedingung:  $\frac{2}{3} = a^2/9 \Rightarrow a = \pm\sqrt{6}$

30.a)  $(y+3)^2 = \frac{9}{2}(x+2) \Rightarrow S(-2/-3), p=9/4$ , nach rechts geöffnet

b)  $(y-\frac{9}{10}) = -\frac{2}{5}(x+\frac{3}{2})^2 \Rightarrow S(-\frac{3}{2}/\frac{9}{10}), p=\frac{5}{4}$ , nach unten geöffnet

31.)  $y^2 = 8x$ ;  $B(2/4)$

32.a)  $b < \frac{33}{8}$ ; b)  $b = \frac{33}{8}$ ; c)  $b > \frac{33}{8}$

33.)  $M_H(-\frac{1}{2}/\frac{7}{2})$ ;  $S_P(\frac{1}{2}/\frac{5}{8})$ ;  $128y^2 = -1518x + 809$

34.a)  $S(-\frac{5}{4}/\frac{7}{8})$ ; b)  $(x+\frac{5}{4})(y-\frac{7}{8}) = \frac{9}{32}$ ; c)  $y + \frac{63}{8} = -2(x + \frac{5}{4})^2$

35.a) Hyperbel,  $M(2/-4)$ , Hauptachse  $\parallel$  x-Achse,  $a=4, b=3$

b) Parabel,  $S(-1/0,5)$ , nach oben geöffnet,  $2p=10$

c) Hyperbel,  $M(-1/3)$ , Hauptachse  $\parallel$  y-Achse,  $a=\sqrt{12}, b=2$

d) Geradenpaar durch  $M(1/3)$  mit Steigung  $m_{1,2} = \pm 2$

e) Ellipse,  $M(3/-1), a=\sqrt{5}, b=\sqrt{2}$

f) Punkt  $(1/-2)$  (Nullkreis)