Zusammenfassung

Ansätze für die partikuläre Lösung $y_p(x)$ der inhomogenen linearen

Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$a_i(0 \le i \le n-1)$ für verschiedene Typen der Störfunktion $S(x)$:

Vorgegeben:

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}\,y^{(n-1)}(x) + a_{n-2}y^{(n-2)}(x) + \ldots a_1\,y'(x) + a_0\,y(x) = S(x)$$

$$\text{bzw. } L[y(x)] = S(x),$$

mit der charakteristische Gleichung

$$k^n + a_{n-1}\,k^{n-1} + a_{n-2}\,k^{(n-2)} + \ldots a_1 k + a_0 = 0,$$

welche genau n Lösungen $k_i(1 \le i \le n)$ hat (falls mehrfache und komplexe Nullstellen mitgezählt werden).

Fall I: $S(x) = S_0 + S_1 \cdot x + S_2 \cdot x^2 + \ldots S_l \cdot x^l = \sum_{i=0}^{l} S_i \cdot x^i$ **= Polynom vom Grad l mit gegebenen Zahlenwerten** $S_l \neq 0$ **und ansonsten beliebigen vorgegebenen Werten** $S_i \in R$ **für** $0 \le i \le l-1$**, z. Bsp.** $S(x) = S_l \cdot x^l$

I.1 Ansätze für $y_p(x)$ **mit zunächst noch unbekannten Koeffizienten** A_i **mit** $0 \le i \le l$

1) Normalfall: $k \neq 0 \Leftrightarrow a_0 \neq 0$ d.h. keiner der n Werte k_i ist Null, bzw. das letzte Glied $a_0 \cdot y$ der Dgl. verschwindet nicht	$y_p(x) = A_0 + A_1 \cdot x + \ldots A_l \cdot x^l = \sum_{i=0}^{l} A_i \cdot x^i$ Ansatz von der Form von $S(x)$,auch falls $S(x) = S_l \cdot x^l$ gilt
2) Resonanzfall: $k = 0 \Leftrightarrow a_0 = 0$ d.h. nur eine der n Nullstellen der charakteristischen Gleichung hat den Wert 0, bzw. das letzte Glied $a_0 \cdot y$ der Dgl. fehlt	$y_p(x) = x(A_0 + A_1 \cdot x + \ldots A_l \cdot x^l) = \sum_{i=0}^{l} A_i \cdot x^{(i+1)}$ weil $e^{kx} = e^{0x} = 1$ eine Fundamentallösung und damit $y_h^T = 1 \cdot A_0$ Lösung der homogenen Dgl. $L[y_h^T(x)] = 0$ ist
3) Resonanzfall: $k^2 = 0 \Leftrightarrow k_1 = k_2 = 0 \Leftrightarrow a_0 = a_1 = 0$ d.h. es liegt eine doppelte Nullstelle der charakteristischen Gleichung vor, bzw. das letzte Glied $a_0 \cdot y$ und das vorletzte Glied $a_1 \cdot y'$ der Dgl. fehlen	$y_p(x) = x^2(A_0 + A_1 \cdot x + \ldots A_l \cdot x^l) = \sum_{i=0}^{l} A_l \cdot x^{(l+2)}$ weil e^{0x} und $x \cdot e^{0x}$ Fundamentallösungen und damit $y_h^T = A_0 + A_1 \cdot x$ Lösung von $L[y_h^T(x)] = 0$ ist
4) Allgemeiner Resonanzfall: $k^m = 0 \Leftrightarrow k_1 = k_2 = \ldots = k_m = 0 \Leftrightarrow$ $a_0 = a_1 = \ldots = a_{m-1} = 0$ d.h. es liegt eine m-fache Nullstelle der charakteristischen Gleichung vor, bzw. die letzten m Glieder a_i mit $0 \le i \le (m-1)$ der Dgl. fehlen alle ohne Ausnahme	$y_p(x) = x^m(A_0 + A_1 \cdot x + \ldots A_l \cdot x^l) = \sum_{l=0}^{l} A_i \cdot x^{(l+m)}$ weil $y_h^T = A_0 + A_1 \cdot x + A_2 \cdot x^2 \ldots A_{m-1} \cdot x^{(m-1)}$ Lösung von $L[y_h^T(x)] = 0$ ist

Fall II: $S(x) = S_0 \cdot e^{r \cdot x}$ mit gegebenen Zahlenwerten $S_0 \in R$ und $r \in R$

II.1 Ansätze für $y_p(x)$ mit zunächst noch unbekanntem Koeffizienten A_0

1) Normalfall: $k \neq r$, d.h. keiner der n Werte von k stimmt mit r überein	Ansatz von der Form von $S(x) = S_0 \cdot e^{r \cdot x}$: $y_p(x) = A_0 \cdot e^{r \cdot x}$
2) Resonanzfall: $k = r$ d.h. nur einer der n Werte k der charakteristischen Gleichung stimmt mit dem vorgegebenen Wert r überein, bzw. r ist eine einfache Nullstelle der charakteristischen Gleichung	$y_p(x) = x \cdot A_0 \cdot e^{r \cdot x}$, weil $y_h^T = A_0 \cdot e^{r \cdot x}$ Lösung der homogenen Dgl. $L[y_h^T(x)] = 0$ ist
3) Resonanzfall: $(k-r)^2 = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = r$ d.h. 2 Werte von k stimmen mit dem vorgegebenen Wert r überein, bzw. r ist eine doppelte Nullstelle der charakteristischen Gleichung	$y_p(x) = x^2 \cdot A_0 \cdot e^{r \cdot x}$, weil $y_h^T = (A_0 + A_1 \cdot x) \cdot e^{r \cdot x}$ Lösung der homogenen Dgl. $L[y_h^T(x)] = 0$ ist
4) Allgemeiner Resonanzfall: $(k-r)^m = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = \ldots = k_m = r$ d.h. m Werte von k stimmen mit r überein, bzw. r ist eine m-fache Nullstelle der charakteristischen Gleichung	$y_p(x) = x^m \cdot A_0 \cdot e^{r \cdot x}$, weil $y_h^T = (A_0 + A_1 \cdot x + A_2 \cdot x^2 + \ldots A_{m-1} \cdot x^{m-1}) \cdot e^{r \cdot x}$ Lösung der homogenen Dgl. $L[y_h^T(x)] = 0$ ist.

Fall III: $S(x) = e^{r \cdot x}\left(S_0 + S_1 \cdot x + S_2 \cdot x^2 + \ldots S_l \cdot x^l\right) = e^{r \cdot x} \cdot \sum_{i=0}^{l} S_l \cdot x^l$ **mit gegebenen Werten** $r \in R$

und $S_i \in R$ **für** $0 \le i \le (l-1)$ **und** $S_l \ne 0$**, z. Bsp.** $S(x) = S_l \cdot x^l \cdot e^{r \cdot x}$

III.1 Ansätze für $y_p(x)$ mit zunächst noch unbekannten Koeffizienten A_i mit $0 \le i \le l$

1) Normalfall: $k \ne r$ d.h. r ist keine Nullstelle der charakteristischen Gleichung	**Ansatz von der Form von $S(x)$:** $y_p(x) = e^{r \cdot x}\left(A_0 + A_1 \cdot x + A_2 \cdot x^2 + \ldots A_l \cdot x^l\right)$
2) Resonanzfall: $k = r$ d.h. r ist eine einfache Nullstelle der charakteristischen Gleichung	$y_p(x) = x \cdot e^{r \cdot x}\left(A_0 + A_1 \cdot x + \ldots A_l \cdot x^l\right)$, weil $y_h^T = A_0 \cdot e^{r \cdot x}$ Lösung der homogenen Dgl. $L\left[y_h^T(x)\right] = 0$ ist
3) Resonanzfall: $(k-r)^2 = 0 \Leftrightarrow k_1 = k_2 = r$ d.h. r ist eine doppelte Nullstelle der charakteristischen Gleichung	$y_p(x) = x^2 \cdot e^{r \cdot x}\left(A_0 + A_1 \cdot x + \ldots A_l \cdot x^l\right)$, weil $y_h^T = (A_0 + A_1 \cdot x) \cdot e^{r \cdot x}$ Lösung der homogenen Dgl. $L\left[y_h^T(x)\right] = 0$ ist
4) Allgemeiner Resonanzfall: $(k-r)^m = 0 \Leftrightarrow k_1 = k_2 = \ldots = k_m = r$ d.h. r ist eine m-fache Nullstelle der charakteristischen Gleichung	$y_p(x) = x^m \cdot e^{r \cdot x}\left(A_0 + A_1 \cdot x + A_2 \cdot x^2 + \ldots A_l \cdot x^l\right)$, weil $y_h^T = \left(A_0 + A_1 \cdot x + A_2 \cdot x^2 \ldots A_{m-1} \cdot x^{(m-1)}\right) \cdot e^{r \cdot x}$ Lösung der homogenen Dgl. $L\left[y_h^T(x)\right] = 0$ ist

Fall IV:

$$S(x) = \begin{cases} S_0 \cdot \sin(\omega x), \text{ oder} \\ S_1 \cdot \cos(\omega x), \text{ oder} \\ S_0 \cdot \sin(\omega x) + S_1 \cdot \cos(\omega x) \end{cases}$$

Dabei sind $S_0 \in R; S_1 \in R$ und $\omega > 0$ gegebene Zahlenwerte

IV.1) Ansätze für $y_p(x)$ mit zunächst noch unbekannten Koeffizienten A_0 und A_1

1) Normalfall: $k_{-1/1} \neq \pm j \cdot \omega$ d.h. es existieren keine Nullstellen der charakteristischen Gleichung, für welche $k_{-1/1} = \pm j \cdot \omega$ gilt.	Ansatz von der Form von . $S(x) = S_0 \cdot \sin(\omega x) + S_1 \cdot \cos(\omega x)$: $y_p(x) = A_0 \cdot \sin(\omega x) + A_1 \cdot \cos(\omega x)$
2) Resonanzfall: $(k^2 + \omega^2) = 0 \Rightarrow k_{-1/1} = \pm j \cdot \omega$ d.h. die charakteristische Gleichung hat die einfache (konjugiert) komplexe Nullstelle $\pm j \cdot \omega$	$y_p(x) = x(A_0 \cdot \sin(\omega x) + A_1 \cdot \cos(\omega x))$, weil $y_h^T(x) = A_0 \cdot \sin(\omega x) + A_1 \cdot \cos(\omega x)$ Lösung von $L[y_h^T(x)] = 0$ ist
3) Resonanzfall: $(k^2 + \omega^2)^2 = 0 \Rightarrow k_{-1/1} = k_{-2/2} = \pm j \cdot \omega$ d.h. die charakteristische Gleichung hat die doppelte (konjugiert) komplexe Nullstelle $\pm j \cdot \omega$	$y_p(x) = x^2(A_0 \cdot \sin(\omega x) + A_1 \cdot \cos(\omega x))$, es gilt: $y_h^T(x) = (c_o + c_1 x) \cdot \sin(\omega x) + (d_o + d_1 x) \cdot \cos(\omega x)$ ist Lösung von $L[y_h^T(x)] = 0$
4) Allgemeiner Resonanzfall: $(k^2 + \omega^2)^m = 0 \Rightarrow k_{-1/1} = k_{-2/2} = .. = k_{-m/m} = \pm j \cdot \omega$ d.h. die charakteristische Gleichung hat die m-fache (konjugiert) komplexe Nullstelle $\pm j \cdot \omega$	$y_p(x) = x^m(A_0 \cdot \sin(\omega x) + A_1 \cdot \cos(\omega x))$, es gilt: $y_h^T(x) = (c_o + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots c_{m-1} x^{(m-1)}) \cdot \sin(\omega x) +$ $(d_o + d_1 x + d_2 x^2 + \ldots d_{m-1} x^{(m-1)}) \cdot \cos(\omega x)$ ist Lösung von $L[y_h^T(x)] = 0$

Fall V:

$$s(x)=\begin{cases} S_0 \cdot e^{r\cdot x} \cdot \sin(\omega x), \text{ oder} \\ S_1 \cdot e^{r\cdot x} \cdot \cos(\omega x), \text{ oder} \\ e^{r\cdot x}(S_0 \cdot \sin(\omega x) + S_1 \cdot \cos(\omega x)) \end{cases}$$

Dabei sind $S_0 \in R; S_1 \in R, r \in R$ und $\omega > 0$ gegebene Zahlenwerte

V.1) Ansätze für $y_p(x)$ mit zunächst noch unbekannten Koeffizienten A_0 und A_1

1) Normalfall: $k \neq (r \pm j \cdot \omega)$ d.h. es existieren keine Nullstellen der charakteristischen Gleichung, für die $k_{-1/1} = r \pm j \cdot \omega$ gilt.	Ansatz von der Form von $S(x)$ $y_p(x) = e^{r\cdot x}(A_0 \cdot \sin(\omega x) + A_1 \cdot \cos(\omega x))$
2) Resonanzfall: $k_{-1/1} = (r \pm j \cdot \omega)$ d.h. die charakteristische Gleichung hat die einfache (konjugiert) komplexe Nullstelle $r \pm j \cdot \omega$	$y_p(x) = x \cdot e^{r\cdot x}(A_0 \cdot \sin(\omega x) + A_1 \cdot \cos(\omega x))$, weil $y_h^T(x) = e^{r\cdot x}(A_0 \cdot \sin(\omega x) + A_1 \cdot \cos(\omega x))$ Lösung von $L\left[y_h^T(x)\right] = 0$ ist
3) Resonanzfall: $k_{-1/1} = k_{-2/2} = (r \pm j \cdot \omega)$ d.h. die charakteristische Gleichung hat die doppelte (konjugiert) komplexe Nullstelle $r \pm j \cdot \omega$	$y_p(x) = x^2 \cdot e^{r\cdot x}(A_0 \cdot \sin(\omega x) + A_1 \cdot \cos(\omega x))$, weil $y_h^T(x) = e^{r\cdot x} \cdot (c_0 + c_1 x) \cdot \sin(\omega x) + e^{r\cdot x} \cdot (d_0 + d_1 x) \cdot \cos(\omega x)$ Lösung der homogenen Dgl. $L\left[y_h^T(x)\right] = 0$ ist
4) Allgemeiner Resonanzfall: $k_{-1/1} = k_{-2/2} = .. = k_{-m/m} = r \pm j \cdot \omega$ d.h. die charakteristische Gleichung hat die m-fache (konjugiert) komplexe Nullstelle $r \pm j \cdot \omega$	$y_p(x) = x^m \cdot e^{r\cdot x}(A_0 \cdot \sin(\omega x) + A_1 \cdot \cos(\omega x))$, weil $y_h^T(x) = e^{r\cdot x} \cdot \cdot \sin(\omega x) \cdot \left(c_0 + c_1 x + \ldots c_{m-1} x^{(m-1)}\right)$ $+ e^{r\cdot x} \cdot \cos(\omega x) \cdot \left(d_0 + d_1 x + d_{m-1} x^{(m-1)}\right)$ Lösung der homogenen Dgl. $L\left[y_h^T(x)\right] = 0$ ist

Fall VI: $S(x) = S_1(x) + S_2(x) + \ldots S_n(x)$

Dabei sind die Funktionen $S_i(x)$ **mit** $1 \leq i \leq n$ **gegebene Funktionen**

VI.1) Ermittlung der partikulären Lösung aus der inhomogenen Dgl.:

$$L[y_p(x)] = S_1(x) + S_2(x) + \ldots S_n(x) = \sum_{i=1}^{n} S_i(x) = S(x)$$

Es gilt (ohne Beweis): $y_p(x) = y_{p1}(x) + y_{p2}(x) + \ldots y_{pn}(x) = \sum_{i=1}^{n} y_{pi}(x)$

Dabei sind die n Funktionen $y_{pi}(x)$ mit $1 \leq i \leq n$ aus den n folgenden Differentialgleichungen zu ermitteln:

$$L[y_{pi}(x)] = S_i(x) \text{ für } 1 \leq i \leq n$$

Handelt es sich bei den Funktionen $S_i(x)$ um die bereits behandelten Fälle I bis V, so lässt sich das Problem der Berechnung von $y_p(x)$ auf die bereits besprochenen Fälle zurückführen.