Zahlensysteme

1. Das dekadische Ziffernsystem (Dezimalsystem)

Eine *ganze Zahl z* kann man als Summe von Potenzen zur *Basis* 10 darstellen:

$$z = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + ... + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0 10^0$$

Dabei sind die Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, ...$ aus der Menge der *Grundziffern* {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} zu wählen.

Erweitert man dieses Konzept um negative Exponenten, so lassen sich auch *Dezimalbrüche*, d.h. *rationale* und näherungsweise *reelle Zahlen* r darstellen:

$$r = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + ... + a_1 10^1 + a_0 10^0 + ... + a_{-m} 10^{-m}$$

Ein Bruch hat in obiger Notation also $n + 1$ Vorkommastellen und m Nachkommastellen. Die Zahl 123.76 lautet damit:

$$123.76 = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1} + 6 \cdot 10^{-2}$$

2. Das Dualsystem (Zweiersystem, Binärsystem)

Auf Grund der Repräsentation von Daten in DV-Anlagen durch die beiden Zustände "0" und "1" bietet sich in diesem Bereich das Dualsystem an. Es arbeitet mit der

Basis 2 und den beiden *Grundziffern* {0, 1}.

Ein weiterer Grund für die Bevorzugung des Dualsystems ist die besondere Einfachheit der Arithmetik in diesem System, insbesondere der Subtraktion.

Im Dualsystem lautet die Zahl 13_{dez}

$$1101_{\text{bin}} = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 8 + 4 + 0 + 1 = 13_{\text{dez}}$$

Dezimal	Dual
0	0
1	1
2	10
3	11
4	100
5	101
6	110
7	111
8	1000
9	1001
10	1010
11	1011
12	1100
13	1101
14	1110
15	1111

3. Umwandlung von Binärzahlen in Dezimalzahlen

$$\begin{aligned}101_{\text{bin}} &= 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0\\ &= 4+0+1\\ &= 5_{\text{dez}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1000_{\text{bin}} &= 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0\\ &= 8+0+0+0\\ &= 8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1110_{\text{bin}} &= 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0\\ &= 8+4+2+0\\ &= 14_{\text{dez}}\end{aligned}$$

4. Umwandlung von Dezimalzahlen in Binärzahlen

Fortgesetzte Division durch 2

Die Umwandlung in eine Dualzahl folgt aus
der fortgesetzten Division durch 2:

10172 : 2 = 5086	Rest 0
5086 : 2 = 2543	Rest 0
2543 : 2 = 1271	Rest 1
1271 : 2 = 635	Rest 1
635 : 2 = 317	Rest 1
317 : 2 = 158	Rest 1
158 : 2 = 79	Rest 0
79 : 2 = 39	Rest 1
39 : 2 = 19	Rest 1
19 : 2 = 9	Rest 1
9 : 2 = 4	Rest 1
4 : 2 = 2	Rest 0
2 : 2 = 1	Rest 0
1 : 2 = 0	Rest 1

Ergebnis: $10172_{dez} = 10011110111100_{bin}$

5. Umwandlung von Nachkommastellen

Als Beispiel wird die Dezimalzahl 39.6875 in binärer Form dargestellt.

1. Umwandlung des ganzzahligen Anteils

39 : 2 = 19	Rest 1
19 : 2 = 9	Rest 1
9 : 2 = 4	Rest 1
4 : 2 = 2	Rest 0
2 : 2 = 1	Rest 0
1 : 2 = 0	Rest 1

Ergebnis: $39_{dez} = 100111_{bin}$

2. Umwandlung der Nachkommastellen:

$0.6875 \cdot 2 = 1.375$	1 abspalten
$0.375 \cdot 2 = 0.750$	0 abspalten
$0.750 \cdot 2 = 1.500$	1 abspalten
$0.500 \cdot 2 = 1.000$	1 abspalten (fertig, Ergebnis ganzzahlig)

Ergebnis: $0.6875_{dez} = 0.1011_{bin}$,
insgesamt also: $39.6875_{dez} = 100111.1011_{bin}$

6. Binäre Addition

Die Rechenregeln für die Addition zweier Binärziffern lauten:

0 + 0 = 0

0 + 1 = 1

1 + 0 = 1

1 + 1 = 0   Übertrag 1

Beispiel:

Die Aufgabe 11 + 14 = 25 soll in binärer Arithmetik gelöst werden.

```
Ergebnis:    1011
           + 1110
            111      Übertrag
           ------------
            11001
```

Die Additions-Rechenregeln lassen sich ohne weiteres auch auf Brüche anwenden, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel:

Die Aufgabe 151.875 + 27.625 = 179.5 soll in binärer Arithmetik gelöst werden.

```
Ergebnis:  10010111.111
             + 11011.101
              11111111     Übertrag
           ------------
           10110011.100
```

Aufgabe

17 + 12 = 29

Duale Darstellung

17 : 2 = 8 Rest 1

8 : 2 = 4 Rest 0

4 : 2 = 2 Rest 0

2 : 2 = 1 Rest 0

1 : 2 = 0 Rest 1

$17_{dez} = 10001_{bin}$

12 : 2 = 6 Rest 0

6 : 2 = 3 Rest 0

3 : 2 = 1 Rest 1

1 : 2 = 0 Rest 1

$12_{dez} = 1100_{bin}$

$$\begin{array}{r} 10001 \\ 1100 \\ \hline 11101 \end{array}$$

$$1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 =$$

$$16 + 8 + 4 + 0 + 1 = 29$$

7. Binäre Subtraktion

Die Rechenregeln für die Subtraktion zweier Binärziffern lauten:

0 – 0 = 0
1 – 1 = 0
1 – 0 = 1
0 – 1 = 1 Übertrag –1

Beispiel:

Die Aufgabe 13 – 11 = 2 soll in binärer Arithmetik gelöst werden:

Ergebnis:

$$\begin{array}{rl} 1101 & \\ -\,1011 & \\ \underline{1} & \text{Übertrag} \\ 0010 & \end{array}$$

8. Binäre Subtraktion und Zweierkomplement

Das Zweierkomplement einer binären Zahl erhält man durch Bildung des Stellenkomplements und Addieren von 1 zum Ergebnis. Stellt man auf diese Weise eine negative Zahl dar, so kann man die Addition wie mit positiven Zahlen durchführen; das Vorzeichen des Ergebnisses lässt sich dann am MSB ablesen.
(MSB: Most Significant Bit, höchste Stelle der Binärzahl)

Beispiel:

a) Unter Verwendung des Zweierkomplements ist zu berechnen: 7 – 4

00000111	7
00000100	4

11111011	Stellenkomplement von 4
1	1 wird addiert
11111100	Zweierkomplement von 4

00000111	7
11111100	Zweierkomplement von 4 wird addiert
00000011	Ergebnis 7 – 4 = 3 (positiv, da MSB = 0)

Bei der Addition ergibt sich ein Übertrag über die feste Stellenzahl von 8 Bit hinaus, so dass MSB = 0 folgt.

b) Unter Verwendung des Zweierkomplements ist zu berechnen: 12 –17

00001100	12
00010001	17
11101110	Stellenkomplement von 17
1	1 wird addiert
11101111	Zweierkomplement von 17
11111011	Zwischenergebnis (negativ, da MSB = 1)
00000100	Stellenkomplement des Zwischenergebnisses
1	1 wird addiert
00000101	Ergebnis: 12 – 17 = – 5

Beispiel:

19.5 – 22.625 = – 3.125

010011.100	19.5
010110.101	22.625
101001.010	Stellenkomplement von 22.625
1	1 wird addiert
101001.011	Zweierkomplement von 22.625
111100.111	Ergebnis: 19.5 – 22.625 (negativ, da MSB = 1)
000011.000	Stellenkomplement des Zwischenergebnisses
1	1 wird addiert
11.001	Ergebnis: 19.5 – 22.625 = – 3.125

9. Binäre Multiplikation

Die Rechenregeln für die Multiplikation zweier Binärziffern lauten:

$0 * 0 = 0$

$0 * 1 = 0$

$1 * 0 = 0$

$1 * 1 = 1$

Die Multiplikation mehrstelliger Zahlen wird (wie von der Multiplikation im Zehnersystem gewohnt) auf die Multiplikation des Multiplikanden mit den einzelnen Stellen des Multiplikators und stellenrichtige Addition der Zwischenergebnisse zurückgeführt.

Beispiel:

a) Die Aufgabe $10 * 13 = 130$ ist in binärer Arithmetik zu lösen.

Lösung:

```
 1010*1101
----------
 1010
  1010
   0000
    1010
----------
10000010
```

10. Binäre Multiplikation von Zahlen mit Kommastellen

Die Erweiterung auf Zahlen mit Kommastellen ist nach denselben Regeln ohne weiteres möglich. Die Aufgabe $17.375 * 9.75 = 169.40625$ ist in binärer Arithmetik zu lösen.

Lösung:

```
10001.011*1001.11
_________________
10001011
   10001011
    10001011
     10001011
_________________
1010100101101
```

Nach stellenrichtigem Einfügen des Kommas erhält man das Ergebnis:

$$17.375_{\text{dez}} * 9.75_{\text{dez}} = 10101001.01101_{\text{bin}} = 169.40625_{\text{dez}}$$

11. Binäre Division

Ähnlich wie die Multiplikation lässt sich auch die binäre Division in Analogie zu dem im Zehnersystem gewohnten Verfahren durchführen.

Beispiel:

20 : 4 = 5

```
10100 : 100 = 101
100
   100
```

Beispiel:

22 : 4 = 5,5

```
10110 : 100 = 101.1
100
  110
  100
   100
```

$$1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} =$$

$$4 + 0 + 1 + \frac{1}{2} = 5{,}5$$

Beispiel:

Die Aufgabe 20 : 6 = 3.333 ... soll in binärer Arithmetik gelöst werden.

```
10100 : 110 = 11.0101...
-110
1000
-110
  1000
  -110
    ...
```

Man erhält in diesem Falle also auch in der Binärdarstellung einen unendlichen, periodischen Bruch.

12. Verschieben

Wird eine Binärzahl mit einer Zweierpotenz 2^k multipliziert, so entspricht dies – in Analogie zur Multiplikation mit einer Potenz von 10 im Zehnersystem – einer Verschiebung dieser Zahl um k Stellen nach links.

Beispiel:

Die Multiplikationsaufgabe $13 * 4 = 52$ lautet in binärer Schreibweise:

$1101 * 100 = 110100$