Zahlenreihen und Konvergenzkriterien

1. Konvergente Reihen

Reihen sind Folgen spezieller Bauart, so dass gegenüber den Ergebnissen über Folgen grundsätzlich nicht viel Neues zu erwarten ist. Doch ist es zweckmäßig die Ergebnisse über Folgen so umzuformulieren, dass sie der speziellen Bauart angepasst sind.

Definition: (Zahlen-Reihen, Grenzwert)
Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}$.

(i) Unter der (unendlichen) **Reihe** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ verstehen wir die Folge

$f=(s_n)$ mit $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Die a_n heißen **Glieder** der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(iii) Die s_n heißen **Teilsummen** (auch Partialsummen) der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(iv) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt **konvergent** gegen $s \in \mathbb{R}$, wenn die Folge $f=(s_n)$ der Teilsummen konvergent ist.

(v) Falls Konvergenz gegen s vorliegt, heißt s der **Reihenwert**, und wir schreiben $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$.

Eine Reihe ist also genau dann konvergent, wenn die Folge ihrer Partialsummen konvergiert.

Bemerkung:
Jede Reihe ist die Folge ihrer Partialsummen. Umgekehrt ist auch jede Folge (zumind. in einem metrischen Raum) die Partialsummenfolge einer Reihe, denn

$$a_1 + \sum_{k=2}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_1 + (a_2-a_1) + (a_3-a_2) + \ldots + (a_n-a_{n-1}) = a_n.$$

Beispiel:
Die Folge $(a_n)=1/n$ soll als Reihe dargestellt werden.

Dazu berechnen wir die ersten 10 Glieder der Folge: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}$

Das erste Glied der Reihe ist auch das erste der Folge, also setzen wir $a_0=1$. Des Weiteren ergeben sich die Partialsummen wie folgt:

$1 + \sum_{k=2}^{n} (a_k - a_{k-1})$. Das 5-te Glied ist dann z.B.

$$1 + \sum_{k=2}^{5} (a_k - a_{k-1}) = 1 + (1/2 - 1) + (1/3 - 1/2) + (1/4 - 1/3) + (1/5 - 1/4)$$
$$= 1 + (-1/2) + (-1/6) + (-1/12) + (-1/20) = 1/5.$$

Bemerkung:
Da eine Reihe eine Folge besonderer Bauart ist, ist ebenso die Reihe eine Abbildung von $\mathbb{N}$ nach A, wobei in diesem Dokument nur der Fall $A := \mathbb{R}$ behandelt wird.

Abändern endlich vieler Summanden s_n einer Reihe ändert nichts daran, dass die Reihe konvergiert bzw. divergiert. Da diese Tatsache bei „einfachen“ Folgen gilt, gilt sie natürlich auch bei Reihen.

Aber natürlich ändert sich dadurch i.a. der Wert der Reihe.

Diese Tatsache kann z.B. bei der Abschätzung einer Reihe sehr nützlich sein, man kann also endlich viele Indizes bei der Untersuchung auf Konvergenz vernachlässigen und eine Indexverschiebung anwenden.

Beispiele:

Die wichtigsten Reihen werden im Folgenden aufgelistet:

Die geometrische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n \text{ ist } \begin{cases} \text{konvergent,} & \text{falls } |q| < 1 \\ \text{divergent,} & \text{falls } |q| \geq 1 \end{cases}.$$

Im Fall der Konvergenz gilt für den Reihenwert s:

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad \text{für } |q| < 1.$$

Die harmonische Reihe

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent. Noch allgemeiner:

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ ist genau dann konvergent, wenn $a>1$.

Die Exponentialreihe

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x)$ konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$, ja sogar für alle $x \in \mathbb{C}$.

D.h. die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.5^n}{n!}$ konvergiert beispielsweise gegen den Funktionswert der Exponentialfunktion $\exp(1.5)$.

Die Cosinusreihe

$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ konvergiert gegen $\cos(x)$. Entsprechend konvergiert die

Sinusreihe

$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ gegen die Funktion $\sin(x)$.

Die e-Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e = \exp(1) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

konvergiert gegen die irrationale (und transzendente) Zahl e. Ein Beweis, dass all diese Werte tatsächlich übereinstimmen sei dem Leser zur Übung überlassen. Es ist hilfreich den binomischen Lehrsatz auf den Ausdruck $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ anzuwenden, und einige Abschätzungen mit Hilfe der Exponentialreihe herbeizuführen.

Jeder Satz über konvergente Folgen liefert einen Satz über konvergente Reihen; wir übertragen zunächst die Rechenregeln, soweit sich interessante Aussagen ergeben.

Satz 1.1: (Rechenregeln für konvergente Reihen)

Seien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergente Reihen, wobei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \xrightarrow{n\to\infty} s_a$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \xrightarrow{n\to\infty} s_b$. Sei $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt

(i) $[\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n]$ ist dann ebenfalls eine konverg. Reihe mit $[\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n] \xrightarrow{n\to\infty} [s_a + s_b]$

(ii) $[a\sum_{n=1}^{\infty} b_n]$ ist dann ebenfalls eine konverg. Reihe mit $[a\sum_{n=1}^{\infty} b_n] \xrightarrow{n\to\infty} [as_a]$

Es gibt kein allgemeines Schema eine Reihe auf Konvergenz hin zu untersuchen. Es gibt jedoch sehr viele verschiedene **Konvergenzkriterien**, die je nach Art und Aufbau der Reihe sinnvoll ihre Anwendung finden kann. Am Ende des Dokumentes wird jedoch eine Strategie (kein Patentrezept) vorgestellt, welche es zum Ziel haben soll, eine vorgelegte Reihe auf Konvergenz hin zu untersuchen.

Die Grenzwertfindung ist bei Reihen ein sehr diffiziler Prozess, er soll hier nur am Rande angesprochen werden.

Satz 1.2: (Trivialkriterium; notwendige Konvergenzbedingung)

Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Diese Bedingung ist aber *nicht* hinreichend für die Konvergenz einer Reihe, wie folgendes Beispiel zeigt.

Beispiel:

Die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent, aber die Folge $(a_n)=(1/n)$ ist eine Nullfolge.

Satz 1.3: (ε-n_0-Kriterium)

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert $\Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0$ gibt es mind. ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle n gilt:

$$(n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n - s\right| < \varepsilon).$$

Das nun folgende Cauchykriterium hat gegenüber dem ε-n_0-Kriteriums den entscheidenden Vorteil, dass der Grenzwert der Reihe nicht bekannt sein muss.

Hinweis:
Befinden wir uns über einem (Cauchy)-vollständigem Raum (bspw. $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ mit der kanonischen, euklidischen Metrik), so ist jede Cauchyreihe gleichzeitig auch konvergent und umgekehrt. In nicht-

vollständigen Räumen gilt diese Äquivalenz nicht mehr; ein Gegenbeispiel ist die e-Reihe über dem Raum $\mathbb{Q}$.

Bildet die Folge der Partialsummen eine Cauchyfolge, so bezeichnen wir diese spezielle Reihe als **Cauchyreihe**.

Satz 1.4: (Cauchykriterium)

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert $\Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass für alle n gilt:

$$n \geq n_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \left| \sum_{k=n_\varepsilon+1}^{n} a_n \right| = s_n - s_{n_\varepsilon} < \varepsilon .$$

Das Cauchykriterium sagt also aus: Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn sie eine Cauchyreihe, und damit eine Cauchyfolge der Partialsummen, ist.

Der Vorteil des Cauchykriteriums besteht darin, dass man es nur mit **endlichen Summen** zu tun hat!

Fast alle in der ‚Praxis' oft benötigten Konvergenzkriterien sind nur hinreichend, und eben nicht notwendig. So auch das folgende

Satz 1.5: (Leibnitzkriterium)

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$ konvergiert $\Leftrightarrow$

(a_n) ist eine *monoton* fallende Nullfolge.

Beispiel:

Sei $f := \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)(-1)^n$ eine Folge von Partialsummen. Wir untersuchen f auf Konvergenz.

Nach dem Leibnitzkriterium müssen wir $(a_n) = (\sqrt[n]{n} - 1)$ eine monoton fallende Nullfolge ist.

Wir wissen, dass $\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n \to \infty} 1$. Damit ist $(\sqrt[n]{n} - 1)$ eine Nullfolge. Wir müssen noch nachweisen, dass (a_n) eine monoton fallende Folge ist.

Dazu überprüfen wir die Ungleichung $(a_n) - (a_{n+1}) \geq 0$:

$$\begin{array}{lll} (a_n) - (a_{n+1}) & \geq 0 & \Leftrightarrow \\ (\sqrt[n]{n} - 1) - (\sqrt[n+1]{n+1} - 1) & \geq 0 & \Leftrightarrow \\ \sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n+1} & \geq 0 & \Leftrightarrow \quad \mid \text{da } \sqrt[n+1]{n+1} \xrightarrow{n \to \infty} 1 \\ 1 - 1 & \geq 0 & \end{array}$$

Die Folge (a_n) ist also eine monoton fallende Nullfolge.

Satz 1.6: (Quotientenkriterium)

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent $\Leftrightarrow$

Es gibt ein $q \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq q < 1$, so dass

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q, \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}.$$

Es muss also gelten $0 < \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, für fast alle $n \in \mathbb{N}$.

Beispiel:

Prüfen Sie die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2n)^n}$ auf Konvergenz. Wir benutzen das Quotientenkriterium und erhalten.

$$\frac{\frac{(2(n+1))!}{(2(n+1))^{n+1}}}{\frac{(2n)!}{(2n)^n}} = \frac{\frac{(2n+2)!}{(2n+2)^{n+1}}}{\frac{(2n)!}{(2n)^n}} = \frac{(2n+2)!}{(2n+2)^{n+1}} \frac{(2n)^n}{(2n)!} \qquad |\text{Kehrbruch mulitplizieren}$$

$$= \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(2n+2)^{n+1}} \frac{(2n)^n}{(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!(2n)^n}{(2n+2)^{n+1}(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)^n}{(2n+2)(2n+2)^n}$$

$$= \frac{(2n+1)(2n)^n}{(2n+2)^n} = (2n+1)\frac{(n)^n}{(n+1)^n} = (2n+1)\left(\frac{(n)}{(n+1)}\right)^n = (2n+1)\left(\frac{1}{1+1/n}\right)^n = \frac{(2n+1)(1)^n}{(1+1/n)^n} = \frac{(2n+1)}{(1+1/n)^n}.$$

Nach dem Quotientenkriterium müssen fast alle Glieder der Folge echt kleiner 1 und echt größer 0 sein. Wir setzen also den Limes an und erhalten.

$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)}{(1+1/n)^n} = \frac{\infty}{e} = \infty$, d.h. die Folge ist nicht von der geforderten Form, also ist die Reihe divergent.

Beispiel:

Prüfen Sie die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{n!}$ auf Konvergenz. Wir benutzen wieder das Quotientenkriterium und erhalten:

$$\frac{\frac{(n+1)^5}{(n+1)!}}{\frac{n^5}{n!}} = \frac{(n+1)^5}{(n+1)!} \frac{n!}{n^5} = \frac{(n+1)^5}{(n+1)n!} \frac{n!}{n^5} = \frac{(n+1)^5}{(n+1)n^5} = \frac{(n+1)^4}{n^5} = \frac{1}{n}\left(\frac{(n+1)}{n}\right)^4$$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{1+1/n}{1}\right)^4 \longrightarrow 0 \text{ für } n \longrightarrow \infty.$$

Nach dem Quotientenkriterium müssen fast alle Glieder der Folge echt kleiner 1 und echt größer 0 sein. Diese Bedingung ist hier erfüllt, d.h. die Reihe ist konvergent.

Satz 1.7: (Wurzelkriterium)

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent $\Leftrightarrow$

Für ein (festes!) $q<1$ gelte $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ ab einem Index n_0.

Eine äquivalente Aussage ist.

$\Leftrightarrow$ Es gibt ein $C \in \mathbb{R}$ und ein $q \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq q < 1$, so dass

$|a_n| \leq C q^n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.

Beispiel:

Prüfen Sie die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^n$ auf Konvergenz. Wir benutzen das Wurzelkriterium und erhalten.

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^n} = \left(\frac{n+2}{2n+1}\right) = \left(\frac{1+2/n}{2+1/n}\right) \longrightarrow 1/2 \quad \text{für } n \longrightarrow \infty .$$

Die vorgegebene Reihe konvergiert also nach dem Wurzelkriterium.

Bemerkung:

Im Fall $\sqrt[n]{|a_n|} \longrightarrow 1$ oder $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \longrightarrow 1$ ist ohne Zusatzinformation keine Entscheidung über Konvergenz oder Divergenz möglich.

Beispiel:

Für die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ gilt $\frac{1/(n+1)}{1/n} = \frac{1}{(n+1)}\frac{n}{1} = \frac{n}{(n+1)} = 1+\frac{1}{n} \longrightarrow 1$.

Wir wissen, dass die harmonische Reihe divergent ist.

Aber für die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ gilt

$$\frac{1/(n+1)^2}{1/n^2} = \frac{1}{(n+1)^2}\frac{n^2}{1} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = 1+\frac{1}{n^2} \longrightarrow 1.$$

Wie wir aber wissen ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergent.

Faustregel:
Wurzel- und Quotientenkriterium entstehen beide durch Vergleich mit der geometrischen Reihe. Daher wird, falls eins von ihnen keine Entscheidung liefert, im Allgemeinen auch das andere Kriterium versagen.

2. Absolut konvergente Reihen

Grundlage aller folgenden Kriterien ist das sog. Monotoniekriterium (für Folgen und damit auch) für Reihen.

Satz 2.1: (Monotoniekriterium)

Eine monotone Folge $(s_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$ ist konvergent, wenn sie beschränkt ist. Genauer:

1) Ist (s_n) monoton wachsend und nach oben beschränkt, so ist (s_n) konvergent, und es gilt $\lim (s_n) = \sup\{s_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

2) Ist f monoton fallend und nach unten beschränkt, so ist f konvergent, und es gilt $\lim (s_n) = \inf\{s_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Beispiel:

Wir zeigen, dass die Folge (a_n) mit $a_n = \frac{n}{3n-1}$ konvergiert. Dazu zeigen wir zunächst, dass gilt $\mathbf{a_n - a_{n+1} \geq 0}$, d.h. die Funktion fällt monoton.

Da die Funktion wahrscheinlich monoton fällt, muss das (n)-te Glied der Folge größer oder gleich als das (n+1)-te Glied sein.

$$\frac{n}{3n-1} - \frac{n+1}{3(n+1)-1} = \frac{n}{3n-1} - \frac{n+1}{3n+2} = \frac{(3n+2)n}{(3n+2)(3n-1)} - \frac{(n+1)(3n-1)}{(3n+2)(3n-1)} = \frac{(3n+2)n-(n+1)(3n-1)}{(3n+2)(3n-1)} = \frac{1}{(3n+2)(3n-1)} > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Mit dieser Rechnung erschlägt man zwei Probleme auf einmal. Zum einen ist damit die Monotonie nachgewiesen, zum anderen aber auch die Beschränktheit. Es gilt ja $\frac{1}{(3n+2)(3n-1)} > 0$ für alle natürlichen n und somit bildet 0 eine untere Schranke. Mit dem Monotoniekriterium folgt, dass a_n konvergiert und es gilt $\inf\{\tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{5}, \tfrac{3}{8}, \ldots\} = \lim a_n = \tfrac{1}{3}$.

Satz 2.2: (Supremumskriterium)

Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe mit nichtnegativen Gliedern, dann gilt:

(i) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent $\Leftrightarrow$ *(ii)* $\sup\left\{s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \mid n \in \mathbb{N}\right\} < \infty$.

Im Konvergenzfall ist obiges Supremum gerade der Reihenwert.

Beweis:

(i) $\Rightarrow$ *(ii)*:

Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, so ist die Folge der Partialsummen $(s_n) := \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$ konvergent, also insbesondere beschränkt. Damit ist (ii) erfüllt.

(ii) $\Rightarrow$ *(i)*:

Da $a_n \geq 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt, ist $(s_n) := \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$ eine monoton wachsende Folge. Aufgrund der Voraussetzung (ii) ist (s_n) beschränkt, denn es gilt

$$0 < s_n < \sup\left\{ s_m = \sum_{k=1}^{m} a_k \mid m \in \mathbb{N} \right\} < \infty \text{, für jedes } n \in \mathbb{N}.$$

Mit dem Monotoniekriterium folgt die Konvergenz von (s_n). Also ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent und das Supremum ist damit gerade der Reihenwert.

Eine stärkere Forderung als die gewöhnliche Konvergenz einer Reihe ist die sog. absolute Konvergenz. Derartige Reihen sind auch invariant gegenüber (unendlich) vielen Umordnungen von Gliedern.

Definition:

Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt absolut konvergent, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ nichtnegativer, reeller Zahlen konvergiert.

Ein weiteres wichtiges Kriterium ist das

Satz 2.3: (Majoranten- /Minorantenkriterium)

Seien (a_n) und (b_n) zwei Folgen mit $0 \leq |a_n| \leq b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.

(i) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

(ii) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent, so auch $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Beachten Sie, dass das Minoranten- und das Majorantenkriterium äquivalent zueinander sind. Das Eine folgt durch Kontraposition sofort aus dem Anderen.

Beispiel:

Prüfen Sie die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+2}$ auf Konvergenz. Wir schätzen die Folge $(a_n) := \frac{n}{n^2+2}$ ab.

Für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ gilt $n^2+2 \leq 2n^2$, also ist

$$\frac{n}{n^2+2} \geq \frac{n}{2n^2} = \frac{1}{2n}.$$

Da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ divergent ist (Vgl. harmonische Reihe), folgt die Divergenz aus dem Minorantenkriterium.

Beispiel:

Prüfen Sie die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2} \cdot (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$ auf Konvergenz. Hier kann nicht das Leibnitzkriterium angewendet werden, da der Faktor $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$ sich wie folgt entwickelt. $-1,\ -1,\ 1,\ 1,\ -1,\ -1,\ 1,\ 1,\ -1,\ -1$

Es muss hier mit dem Majorantenkriterium gearbeitet werden. Dazu schätzen wir die Folge $|a_n|$ ab.

$\left| \frac{1}{n^2+2} \cdot (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \right| = \frac{1}{n^2+2} < \frac{1}{n^2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert folgt mit dem Majorantenkriterium die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2} \cdot (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

Absolut konvergente Reihen verhalten sich sehr gutartig, was die Reihenfolge der Summation betrifft.

Durch Umordnung unendlich vieler Glieder kann sich bei konvergenten Reihen der Limes ändern.
Auch sind Teilreihen konvergenter Reihen i.a. nicht mehr konvergent.

Dagegen sind Teilreihen einer absolut konvergenten Reihe stets wieder absolut konvergent, und damit auch konvergent, wie der folgende Satz in allgemeinerer Form lehrt:

Satz 2.3:

Eine absolut konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent; es gilt $\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Solche Manipulationen lassen sich nur mit absolut konvergenten Reihen bedenkenlos durchführen.
Folgender Satz bringt dies nochmals zum Ausdruck.

Satz 2.4: (Umordnungssatz)

Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, etwa gegen S, so konvergiert auch jede Umordnung der Reihe gegen S.

Bemerkung:

Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, aber nicht absolut konvergent, so gibt es zu jedem $x \in \mathbb{R}$ eine Umordnung der Reihe, die gegen x konvergiert.

Zu guter letzt soll nun noch eine mögliche Strategie aufgezeigt werden Reihen auf Konvergenz hin zu untersuchen. Insbesondere ‚Anfängern' können sich daran zumind. orientieren:

Es sei eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ gegeben. Um diese auf Konvergenz zu untersuchen, gehe wie folgt vor:

1. Ist a_n eine Nullfolge?

   Nein: Die Reihe divergiert.
   Ja: Siehe 2.

2. Handelt es sich um eine geometrische Reihe mit $|q|<1$?

   Nein: Siehe 3.
   Ja: Reihe konvergiert entsprechend obigem Beispiel.

3. Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $(a_n)=(-1)^n(b_n)$ alternierend, und ist (c_n) ist eine monoton fallende Nullfolge?

   Nein: Siehe 4.
   Ja: Reihe konvergiert nach Leibniz

4. Sind fast alle $a_n \neq 0$ und ist das Quotientenkriterium erfüllt?

   Nein: Siehe 5.
   Ja: Reihe konvergiert!

5. Existiert eine Majorante oder eine Minorante?

   Weiß nicht: Womöglich eine schwer zu lösende Reihe... ;-)
   Ja: Reihe konvergiert!