Nachtrag: Bsp.: $\ddot{x} + x = 0$

für $x = x(t)$ $y = \dot{x}$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{= A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda E| = \lambda^2 + 1 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = j, \quad \lambda_2 = -j$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$\text{EV} \quad \begin{pmatrix} -j \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} +j \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ komplexe Lsg

$$\vec{y} = c_1 \begin{pmatrix} -j \\ 1 \end{pmatrix} \underbrace{e^{jt}}_{\cos t + j \sin t} + c_2 \begin{pmatrix} j \\ 1 \end{pmatrix} \underbrace{e^{-jt}}_{\cos t - j \sin t}$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$

oder, wenn man sich auf reelle Parameterwerte K_1, K_2 beschränkt, die reelle Lsg

$$\vec{y} = \underbrace{(c_1 + c_2)}_{=: K_1} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + \underbrace{j(-c_1 + c_2)}_{=: K_2} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$$

mit $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$

2.2 Potenzreihen

2.1.1 Einführung

Def.: (PR)

Unter einer PR versteht man eine unendl. Reihe vom Typ

(I) $$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

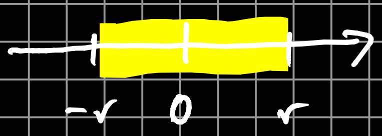
oder (II) $$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots$$

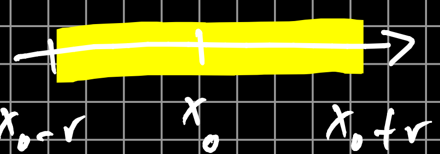
x_0 heißt Entwicklungsstelle. Für $x_0 = 0$ erhalten wir d. Gl. (II) in d. Form (I).

2.2.2 Konvergenz und Eigenschaften von PR

Def.: Konvergenzbereich

Die Menge aller x-Werte, für die eine PR konv. heißt Konvergenzbereich d. PR.





Konv.verhalten:

Zu jeder PR $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ bzw $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ gibt

es eine Zahl r, Konvergenzradius genannt, mit folg Eigenschaften:

1. Die PR konv. für $|x| < r$ bzw $|x-x_0| < r$
2. Sie divergiert für $|x| > r$ bzw $|x-x_0| > r$
3. An den Randpunkten $|x| = r$ bzw. $|x-x_0| = r$ kann keine Aussage getroffen werden $\rightarrow$ hier müssen Extrauntersuchungen durchgeführt werden

Berechnung d. Konvergenzradius

Der Konv.radius r einer PR $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ bzw.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ kann nach folg Formeln berechnet

werden: $\boxed{r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|}$ oder $\boxed{r = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}}$

Bsp.: $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}$

$$a_k = 1 \quad \forall k \Rightarrow r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{1} \right| = 1$$

Reihe konv. für $|x| < 1$

Eigenschaften von PR

1. Eine PR konv. innerhalb ihres Konv.bereiches <u>absolut</u>.

2. Eine PR darf innerhalb ihres Konv.bereiches gliedweise differenziert und integriert werden.
   Die neuen PR besitzen den gleichen Konv.radius, wie ihre Ausgangsreihe.

3. Zwei PR dürfen innerhalb ihres gemeinsamen Konv.bereiches (Durchschnitt) gliedweise addiert und subtrahiert und multipliziert werden.
   Die neuen PR konv. mindestens im gemeinsamen Konv.bereich d. Ausgangsreihen.

<u>Konv.radius</u>

$$\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{a_k (x-x_0)^k}_{=: b_k}$$

<u>QK</u> $\quad \lim\limits_{k\to\infty} \left| \frac{b_{k+1}}{b_k} \right| < 1 \iff$

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1} (x-\cancel{x_0})^{k+1}}{a_k (x-\cancel{x_0})^k} \right| < 1$$

$$\Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} (x - x_0) \right| < 1$$

$$\Longleftrightarrow \quad |x - x_0| < \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$$

$$\Longleftrightarrow \quad |x - x_0| < \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| =: r$$

Konv. radius

Bsp.: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^k}{k} =: a_n$

QK: $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^k x^{k+1} \cdot k}{(k+1) (-1)^{k-1} \cdot x^k} \right|$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| x \cdot \frac{k}{k+1} \right| \overset{!}{<} 1$$

$$\Longleftrightarrow \quad |x| < \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left|\frac{k}{k+1}\right|} = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+1}{n} \right|}_{=: r} = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

Bsp.:

a) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots \qquad (|x| < 1)$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots \qquad (|x| < 1)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{(k+1)}_{= a_k} x^k$$

allgemeines Glied

b) $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + - \dots \qquad (|x| < 1)$ (geom. Reihe)

$$\Rightarrow \int_0^x \frac{1}{1+t}\, dt = \int_0^x (1 - t + t^2 - t^3 + - \dots)\, dt$$

$$\Rightarrow \ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + - \dots \qquad (|x| < 1)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} \cdot x^k$$

Indexverschiebung:

$k - 1 =: l \qquad k = 1$

$\Rightarrow k = l + 1 \qquad \to l = 0$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{1}{l+1} x^{l+1}$$

Beispiel: Einfache Subst. in d. geom. Reihe

Geg.: $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots \quad (|z| < 1)$

a) $z := -x$: $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \dots$

$|-x| = |x| < 1$

b) $z := 2x$: $\frac{1}{1-2x} = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + 16x^4 + \dots$

$|2x| < 1 \iff |x| < \frac{1}{2}$

c) $f(x) = \frac{1}{4+x^2}$ $\quad x_0 = 0$

$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots$

$= \sum_{k=0}^{\infty} z^k, \ |z| < 1$

$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2}{4}} =$

$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{x^2}{4}\right)}$

$z := -\frac{x^2}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{x^2}{4}\right)^k = \frac{1}{4+x^2} =$

$= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^k} x^{2k} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{16}x^4 - + \dots\right)$

Konv.bereich: $\left|-\frac{x^2}{4}\right| < 1 \iff \left|\frac{x^2}{4}\right| < 1$

$$\iff x^2 < 4$$

$$\iff |x| < 2$$

$$\iff -2 < x < 2$$

HA

Entwickeln Sie $f(x)$ in eine PR mit Entw.stelle $x_0 = 0$, $f(x)$ ist geg. durch

$$f(x) = \frac{x}{x^2+x-2}$$

Konvergenzbereich?