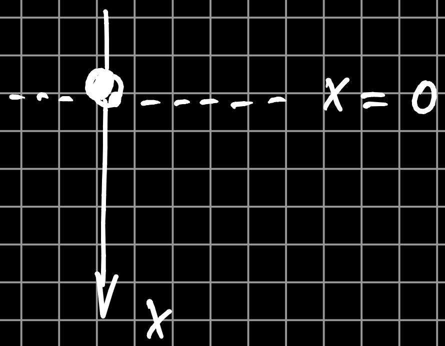
Beispiel 2: $\left(\text{zu } y'' = f(y')\right)$

Freier Fall mit LW:



r ~ Proport. faktor

$g = 9{,}81\ m/s^2$

$x(t)$ ~ Fallstrecke z. Zt. t

$$m \cdot \ddot{x}(t) = mg - r\dot{x}^2(t) \quad \Big|\, : m \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = \underbrace{g - \frac{r}{m}\dot{x}^2}_{f(\dot{x})}$$

AWP: $x(0) = \dot{x}(0) = 0$

Subst.: $\dot{x}(t) =: z(t) \Rightarrow \ddot{x}(t) = \dot{z}(t)$

$$\Rightarrow \quad \dot{z} = g - \frac{r}{m} z^2$$

$$\dot{z} = \frac{dz}{dt} = g - \frac{r}{m} z^2$$

$$\Rightarrow \int \frac{dz}{g - \frac{r}{m} z^2} = \int dt \qquad \text{separabel}$$

$\Downarrow$ längere Rechnung

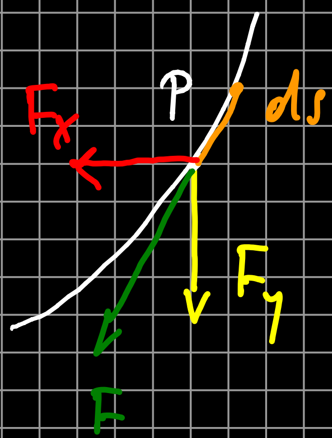
$$\boxed{x(t) = \frac{m}{r} \ln \cosh\left(\sqrt{\frac{rg}{m}} \cdot t\right)} \qquad \text{Lsg d. AWP}$$

Bemerkung: $\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Beispiel 3: Die Kettenlinie (Katenoide)



In einem Punkt P gilt:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{F_y}{F_x} \Longrightarrow F_y = y' F_x$$

Herleitung d. DGL:

Da keine horizontalen Verformungen auftreten können, muss d. x-Komp. d. Kraft konst. sein.

$$\Longrightarrow \quad (1) \quad (F_y)' = F_x y''$$

Ist nun q das Gewicht d. Seils pro Länge, so gilt $dF_y = q \cdot ds$

wegen $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + y'^2}\, dx$ gilt

$$(F_y)' = q \sqrt{1 + y'^2} \quad \text{und mit}$$

(1): $F_x y'' = q\sqrt{1+y'^2} \quad \Big| : F_x$

$$y'' = \underbrace{\frac{q}{F_x}}_{=:k} \sqrt{1+y'^2}$$

$$\boxed{y'' = k\sqrt{1+y'^2}}$$

DGL d. Kettenlinie

Bauart $y'' = f(y')$

$y' =: z \Rightarrow y'' = z'$

$\Rightarrow \quad z' = k\sqrt{1+z^2}$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = k\int dx$$

$\underset{\text{Formel-sammlung}}{\Rightarrow} \quad \ln\left|z+\sqrt{z^2+1}\right| = \operatorname{arsinh} z = kx + C$

$$\operatorname{arsinh} z = kx + C$$

$$\underset{\sinh}{\Rightarrow} \quad z = \sinh(kx+C)$$

$$\underset{\text{R.S.}}{\Rightarrow} \quad y' = \sinh(kx+C)$$

$$\Longrightarrow \quad y = \int \sinh(kx + C)\, dx$$

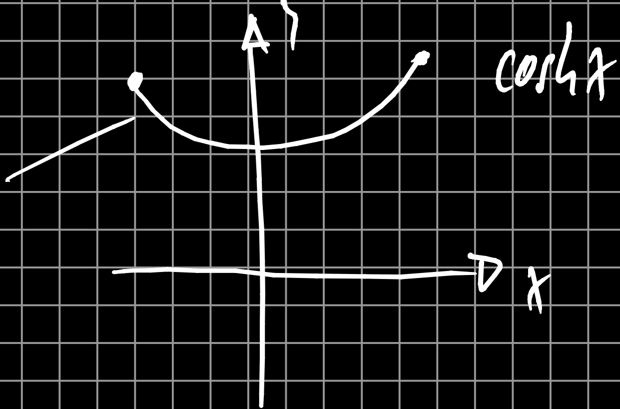
$$= \frac{1}{k} \cosh(kx + C) + D$$

$$= \frac{1}{k}\left(\frac{e^{kx+C} + e^{-(kx+C)}}{2} \right) + D$$

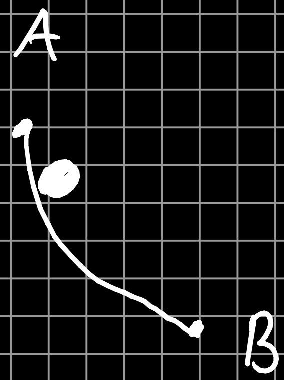
Bem.:

$(\sinh x)' = \cosh x$

$(\cosh x)' = \sinh x$



Kettenlinie



Brachistochrom
Linie d. schnellsten
Falles (reibungslos)

HA, S. 85 A 7

a) $y'' \cos x + y' \sin x = 0 \Rightarrow y'' = f(y')$

$y' =: z \Rightarrow y'' = z'$

$\Rightarrow z' \cos x + z \sin x = 0$ separabel

$\Rightarrow \displaystyle\int \frac{dz}{z} = \int \frac{-\sin x}{\cos x}\, dx$

$$\int \frac{f'}{f}\, dx = \ln|f| + C$$

$\Rightarrow \ln|z| = \ln|\cos x| + C_1$

$$\Longrightarrow \quad z = K\cos x$$

$$\Longrightarrow \quad y' = K\cos x$$

R.S.

$$\Longrightarrow \quad y = K\int \cos x \, dx = K\sin x + D$$

allg. Lsg

AWP : $y(0) = 1, \; y'(0) = 2$

$$\left.\begin{array}{l} y(0) = \boxed{D = 1} \\ y'(0) = \boxed{K = 2} \end{array}\right\} \Longrightarrow y = 2\sin x + 1$$

Lsg. d. AWP's

A6 $\quad y' - \frac{y}{x} = x$

lin., inh. DGL 1. O.

1.) Lsg. d. hom. $\quad y' - \frac{y}{x} = 0$

2.) Var. d. Konstanten

Alternative: $\quad \frac{y}{x} = z \Longrightarrow y = xz$

$$\Longrightarrow y' = z + z' \cdot x$$

$$\Longrightarrow \cancel{z} + z'x - \cancel{z} = x \quad \Big| : x \neq 0$$

$\Longrightarrow\ z' = 1 \Longrightarrow\ z = x + C$

$\underset{\text{R.S.}}{\Longrightarrow}\ \frac{1}{y} = x + C \Longrightarrow y = x^2 + Cx$

$y' - \frac{y}{x} = 0 \Longrightarrow\ y = Cx$

Ansatz: $y = C(x) \cdot x \Longrightarrow y' = C'x + C \cdot 1$

$\Longrightarrow\ C'x + C - \frac{C\cancel{x}}{\cancel{x}} = x$

y, y' in d. inh. einsetzen $\Longrightarrow\ C'x = x$

$\Longrightarrow\ C' = 1 \Longrightarrow$

$C = x + K$

$= C(x)$

$\Longrightarrow\ y = x(x+K) = \underbrace{x^2}_{y_p} + \underbrace{Kx}_{y_h}$

einsetzen in Ansatz

Parabolida

$y = x^2 + Kx = x^2 + Kx + \left(\frac{K}{2}\right)^2 - \left(\frac{K}{2}\right)^2$

$= \left(x + \frac{K}{2}\right)^2 - \left(\frac{K}{2}\right)^2$

$\Longrightarrow\ S\left(-\frac{K}{2} \middle| -\left(\frac{K}{2}\right)^2\right)$

Lsg. kurve durch $P(-2|0) \Rightarrow y(-2) = -2C+4 = 0$

$$\Rightarrow C = 2$$

$$\Rightarrow y = x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$$

$$S(-1|-1)$$

1.4 Gewöhnliche DGL'en höherer Ordnung, Allgemeines

$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ impl. DGL n-ter O.

$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ exp. DGL n-ter O.

Anfangswertproblem (AWP) für DGL n-ter Ordnung:

Es ist eine Lsg. $y = \varphi(x)$ zu bestimmen, die durch einen vorg. Pkt. (x_0, y_0) verläuft und dort vorgeschriebene Werte für die 1., 2., ... (n-1)-te Abl. annimmt.

$$\varphi(x_0) = y_0$$
$$\varphi'(x_0) = y_0^1$$
$$\vdots$$
$$\varphi^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}$$

Eng verwandt mit d. DGL n-te Ordnung ist ein **System von DGLen** erster Ordnung für n ges. Fkten. $y_1(x), \dots, y_n(x)$

$$\boxed{\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{aligned}} \qquad (1)$$

Lösung von (1) im Intervall $I = [a,b]$:
n Fkten $y_1(x), \dots, y_n(x)$, die für $a \le x \le b$ das System (1) für alle x erfüllen.

$\hat{=}$ Lsg. kurve $y(x) := \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$ im $\mathbb{R}^n$, $a \le x \le b$

AWP für DGL-Systeme:
Es ist eine Lsg. kurve $(y_1(x), \dots, y_n(x))^T \in \mathbb{R}^n$ von (1) zu bestimmen, d. für ein vorgegebenes $x = x_0$ durch einen Pkt. $(y_0^1, \dots, y_0^n)^T \in \mathbb{R}^n$ verläuft:

$$y_1(x_0) = y_0^0$$
$$\vdots$$
$$y_n(x_0) = y_n^0$$

Jede explizite DGL n-Ordnung lässt sich in ein System von DGL 1. Ordnung für n Fkten überführen:

$$y_1(x) := y(x)$$
$$y_2(x) := y'(x)$$
$$\vdots$$
$$y_{n-1}(x) := y^{(n-2)}(x)$$
$$y_n(x) := y^{(n-1)}(x)$$

Zugehöriges System:

$$\boxed{\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ y_3' &= y_4 \\ &\vdots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= f(x, y_1, \dots, y_n) \end{aligned}}$$

Bsp.: $y'' - xy' + y = \sin x$ DGL 2. O.

$$y = z_1$$
$$\boxed{\begin{aligned} y' &= z_1' = z_2 \\ y'' &= z_2' = -z_1 + x z_2 + \sin x \end{aligned}}$$

DGL System 1. O.

Bsp.: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ DGL des harm. Oszillators 2. O.

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0$$

$$x = z_1$$
$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{z}_1 = z_2 \\ \ddot{x} &= \dot{z}_2 = -\omega^2 z_1 \end{aligned}}$$

System 1. Ordnung

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

kurz: $\boxed{\dot{\vec{z}} = A \cdot \vec{z}}$

mit $\vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}$ $\quad \dot{\vec{z}} = \begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \end{pmatrix}$

Ansatz $\vec{z} = e^{\lambda t} \vec{v}$

$$\dot{z} = \lambda e^{\lambda t} \vec{v}$$

$$\Longrightarrow \quad \lambda \cancel{e^{\lambda t}} \vec{v} = A \cancel{e^{\lambda t}} \cdot \vec{v}$$

$$\lambda \vec{v} = A \vec{v}$$

$$\Longleftrightarrow \quad (A - \lambda E) \vec{v} = \vec{0}$$

also Zurückführung auf ein Eigenwertproblem (siehe 1. Sem.)

1.5 Lineare DGL'n n-ter Ordnung

1.5.1 Allgemeines

$$\underbrace{y^{(n)} + p_1(x)\,y^{(n-1)} + p_2(x)\,y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x)\,y' + p_n(x)\,y}_{\substack{\| \\ \text{"Linearer Differentialoperator"}}} = f(x)$$

"Linearer Differentialoperator" $=: L[y]$

$L[y] = 0 \sim$ homogene DGL

$L[y] = f(x) \sim$ inhomogene DGL

Vor. $p_1, \dots, p_n, f$ stetig $a < t < b$

$\Rightarrow$ Jedes AWP ist eindeutig lösbar

Eigenschaften von $L[y]$:

1. $L[Cy] = C \cdot L[y]$

   für jede n-mal diff'bare Fkt. y

Beweis:

$$L[Cy] = (Cy)^{(n)} + p_1\,(Cy)^{(n-1)} + \dots + p_n(Cy)$$

$$= C\left(y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y\right) =$$

$$= C\,L[y]$$

2. $L[y_1(x) + y_2(x)] = L[y_1(x)] + L[y_2(x)]$

da Abl. eine Summe = Summe d Abl.

$\Downarrow$

3. $L[C_1 y_1 + \dots + C_n y_n] = C_1 L[y_1] + \dots + C_n L[y_n]$ für bel. n-mal diff'bare Fktn $y_1, \dots, y_n$ und beliebige Konstanten $C_1, \dots, C_n$.

Daraus ergeben sich folg. Eigenschaften d. DGL $L[y] = f(x)$:

(a) Mit $y_1(x), \dots, y_n(x)$ ist auch $C_1 y_1 + \dots + C_n y_n$ Lsg von $L[y] = 0$ für bel. Konst. $C_1, \dots, C_n$ (Eigenschaft 3. von $L[y]$.)

(b) Sind y_1 und y_2 Lsgen d. inh. Gl $L[y] = f$, so ist $y = y_1 - y_2$ Lsg. d. hom. Gl $L[y] = 0$

<u>Beweis</u>: $L[y_1 - y_2] = \underbrace{L[y_1]}_{=f} - \underbrace{L[y_2]}_{=f} = 0$

(c) Ist y_h eine Lsg. d. hom. Gl $L[y]=0$ und y_i eine Lsg. d. inh. Gl $L[y]=f$, so ist auch $y=y_h+y_i$ Lsg. d inh. Gl.

<u>Beweis:</u> $L[y_h+y_i] = \underbrace{L[y_h]}_{=0} + \underbrace{L[y_i]}_{=f} = f$