2. Reihen

2.1 Unendliche Reihe

2.1.1 Einführung

Bsp.: $(a_n) = 1, 4, 9, 16, \ldots$ Zahlenfolge

Partialsumme:

$s_1 = a_1 = 1$

$s_2 = a_1 + a_2 = 1 + 4 = 5$

$s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 1 + 4 + 9 = 14$

$\vdots$

$s_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$

Def.: Unendliche Reihe

Die Folge (s_n) d. Partialsumme einer unendlichen Zahlenfolge (a_n) heißt unendliche Reihe

Schreibweise: $$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

Bsp.: $$\sum_{k=1}^{\infty} k = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$$ harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots$$

Def.: Konvergenz und Divergenz einer unendl. Reihe

Eine unendl. Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heißt konvergent, falls die Folge d. Partialsummen $(S_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k$ einen

GW besitzt $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k =: S$

Schreibweise: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$

Konvergiert die Summe d. Beträge $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, so heißt die Reihe <u>absolut konvergent</u>.
Ist $S = \infty$ heißt die Reihe bestimmt divergent, sonst unbestimmt divergent.

2.1.2 Konvergenzkriterien

Notwendige Bedingung

Für die Konv. einer unendl. Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n > 0$ ist die Bed. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ <u>notwendig!</u>, aber nicht hinreichend (d.h. es existieren Folgen, die die Bed. erfüllen, und trotzdem divergieren.

<u>Bsp.:</u> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ $\quad (a_n) = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$

harm. Reihe $\qquad$ Nullfolge

Man kann zeigen, dass die harm. Reihe div. ist

Quotienten- und Wurzelkriterium

Erfüllen alle Glieder einer unendl. Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ die Bedingung

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q < 1 \qquad (QK)$$

$$\text{bzw.} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q < 1 \quad , \qquad (WQ)$$

so ist die Reihe konvergent.

Ist $q > 1$, so ist die Reihe divergent

Für $q = 1$ kann keine Aussage getroffen werden (Extrauntersuchung notwendig)

Bsp.:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \; ; \; x \in \mathbb{R}, \; x = \text{const.} \qquad a_k = \frac{x^k}{k!}$$

$$QK: \quad q = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{x^{k+1}\, k!}{(k+1)!\, x^k}\right| =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{|x|}{k+1} = 0 < 1$$

$\Rightarrow$ die Reihe ist absolut konv. $\forall x \in \mathbb{R}$

Bem.: $(k+1)! = k!(k+1)$

Bsp $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k \cdot k!}{k^k} = a_k$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{2^{k+1}(k+1)!}{(k+1)^{k+1}} \cdot \frac{k^k}{2^k k!} =$$

$$= \frac{\cancel{2^k} \cdot 2 \cdot \cancel{k!} \cdot \cancel{(k+1)} \cdot k^k}{(k+1)^{k+1} \cdot \cancel{2^k} \cdot \cancel{k!}} = 2\left(\frac{k}{k+1}\right)^k$$

$$= 2\left(\frac{\cancel{k}}{\cancel{k}(1+\frac{1}{k})}\right)^k = 2 \cdot \frac{1}{(1+\frac{1}{k})^k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{2}{e} < 1$$

$\Rightarrow$ Reihe ist absolut konvergent.

Rechenregeln für konv. Reihen

1.) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

2.) Summen konv. Reihen

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = t$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = s \pm t$$

3.) Produkte abs. konv. Reihen

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = t$ seien abs. konv.

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) = s \cdot t = \sum_{n=1}^{\infty} w_n$$

$$w_n = a_n b_1 + a_n b_2 + a_n b_3 + a_n b_4 + \ldots + a_n \cdot b_n + \ldots$$

Satz : Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen

Ist (a_k) eine monoton fallende Nullfolge, dann ist die <u>alternierende Reihe</u> $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ konvergent; der Unterschied zwischen GW s und Teilsumme s_n ist kleiner als a_{n+1}

$$\left(\left| \sum_{n=1}^{n} (-1)^{n+1} a_n - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n}_{s} \right| < a_{n+1} \right)$$

("Fehler ist kleiner als das erste vernachlässigte Glied)

Bsp.: $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$, $a_k = \frac{1}{k}$

$a_k = \frac{1}{k}$ ... mon $\downarrow$ Nullfolge

$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$

Reihe konv. nach L-Kriterium.

Aber: Reihe ist <u>nicht</u> absolut konv.

$\sum_{k=1}^{\infty} \left|(-1)^{k+1} \frac{1}{k}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ harm. Reihe ist divergent.