HA: S. 85

A 1 c) $x^3 dx + (y+1)^2 dy = 0$

$$\Rightarrow \int (y+1)^2 dy = -\int x^3 dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}(y+1)^3 = -\frac{1}{4}x^4 + C_1$$

$$\Rightarrow (y+1)^3 = -\frac{3}{4}x^4 + C_2 \quad \text{mit } C_2 := 3C_1$$

$$\Rightarrow y+1 = \sqrt[3]{C_2 - \frac{3}{4}x^4}$$

$$\Rightarrow y = \sqrt[3]{C_2 - \frac{3}{4}x^4} - 1$$

2 a) (1) $y = (x-c)^2 \Rightarrow$ (2) $y' = 2(x-c)$

$$\Rightarrow (3) \quad c = x - \frac{y'}{2}$$

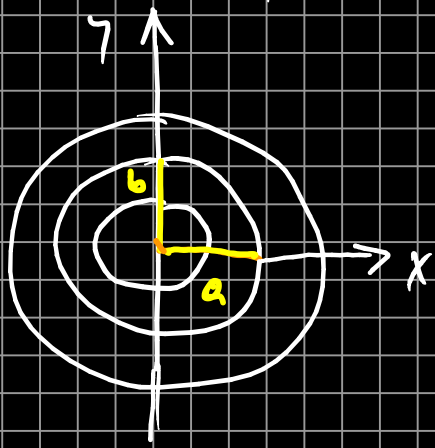
$$\underset{(3)\text{ in }(1)}{\Longrightarrow} \quad y = \left(\frac{y'}{2}\right)^2 = \frac{y'^2}{4}$$

A 3 b) $x^2 + 2y^2 = C \iff \frac{x^2}{C} + \frac{y^2}{\frac{C}{2}} = 1$

Normalform einer Ellipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

mit den Halbachsen a, b

hier: $a=\sqrt{c}$, $b=\sqrt{\frac{c}{2}}$ $\quad c>0$



$$x^2+2y^2=c$$

$$\Rightarrow 2x+4yy'=0$$

$$\Rightarrow x+2yy'=0$$

$$\Rightarrow yy'=-\frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow y'=-\frac{1}{2}\frac{x}{y}=f(x,y)$$

DGL d. Kurvenschar (Ellipsen)

ges.: Orthogonaltrajektorien

Ersetze in d. DGL y' durch $-\frac{1}{y'}$

$$\Rightarrow -\frac{1}{y'}=-\frac{1}{2}\frac{x}{y}$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y}=\frac{2}{x} \Rightarrow \int\frac{dy}{y}=\int\frac{2}{x}\,dx$$

$$\Rightarrow \ln|y|=2\ln|x|+c_1$$

$$\Rightarrow |y|=x^2\cdot e^{c_1} \Rightarrow y=\underbrace{\pm e^{c_1}}_{=:K}\cdot x^2=Kx^2$$

4 a,b) : Typ $y' = f(ax+by+c)$

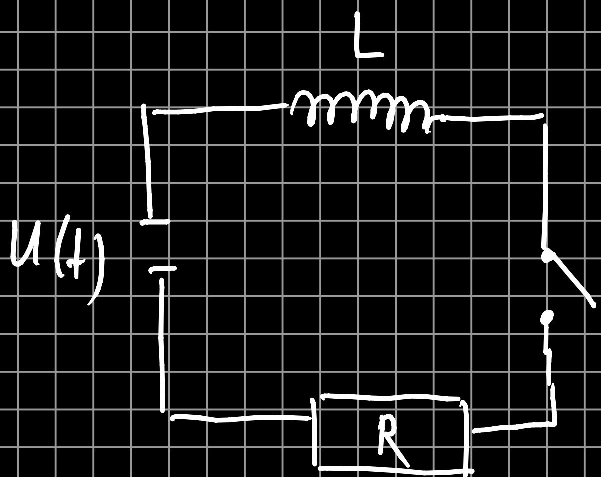
c,d) Typ $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

HA. S. 85 A5) – A7)

Beispiel zur linearen DGL:

Typ: $y' + p(x)y = q(x)$

Einschaltvorgang



$I(t)$ ~ fließende Strom z.Zt. t

$I(0) = 0$

$U(t)$ ~ Spannung

R ~ Ohmsche Widerstand

L ~ Ind. koeff.

DGL: $L\frac{dI}{dt} + R \cdot I = U(t) \quad \Big| : L$

$$\Rightarrow \quad \frac{dI}{dt} + \underbrace{\frac{R}{L}}_{p(t)} I = \underbrace{\frac{U(t)}{L}}_{q(t)}$$

a) **homogen:** $\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = 0 \Rightarrow \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L}\int dt$

$$\boxed{I = Ce^{-\frac{R}{L}t}}$$

allg. Lsg homogen

b) inhomogen:
Var. d. Konst

$$I = C(t)e^{-\frac{R}{L}t} \quad \text{(Ansatz)}$$

$$\Rightarrow \dot{C}e^{-\frac{R}{L}t} + C\left(-\frac{R}{L}e^{-\frac{R}{L}t}\right) + \frac{R}{L}Ce^{-\frac{R}{L}t} = \frac{U(t)}{L}$$

$$\Rightarrow \dot{C}e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{U(t)}{L}$$

$$\Rightarrow \dot{C} = \frac{1}{L}U(t)e^{\frac{R}{L}t}$$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{L}\int U(t)e^{\frac{R}{L}t}dt + K$$

$$\boxed{I(t) = Ke^{-\frac{R}{L}t} + \frac{1}{L}e^{-\frac{R}{L}t}\int U(t)e^{\frac{R}{L}t}dt}$$

allg. Lsg. inhomogen

1. Fall: $U(t) = U = \text{const.}$ (Gleichspannung)

Aus d. allg. Lsg. ergibt sich:

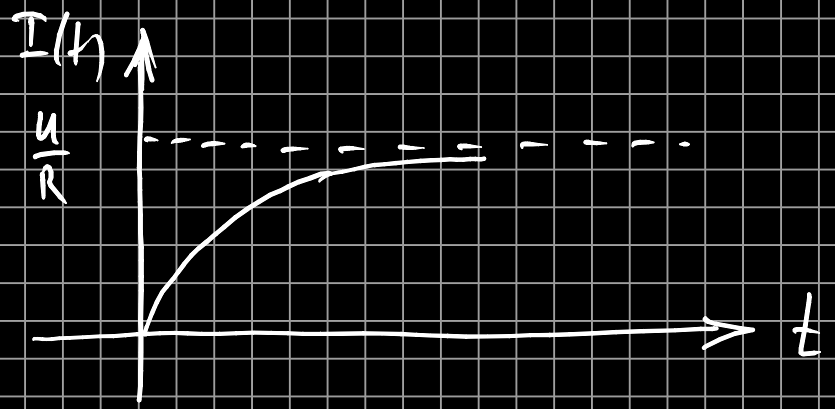
$$\int U(t)\, e^{\frac{R}{L}t}\, dt = U \frac{e^{\frac{R}{L}t}}{R} \cdot L$$

$$\Rightarrow I(t) = C e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{1}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \int U(t)\, e^{\frac{R}{L}t}\, dt$$

$$\Rightarrow I(t) = C e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U}{R}$$

$$I(0) = 0 \Rightarrow 0 = C + \frac{U}{R} \Rightarrow C = -\frac{U}{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{I(t) = \frac{U}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)}$$



für $t \gg 1 \Rightarrow I(t) \approx \frac{U}{R}$

($\hat{=}$ Ohmsches Gesetz, Einfluss d. Spule klingt für wachsende t exp. ab)

2. Fall: $U(t) = U_0 \sin(\omega t)$ (Wechselspannung)

Man kann zeigen:

$$\boxed{I(t) = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \left[e^{-\frac{R}{L}t} \sin\varphi + \sin(\omega t - \varphi) \right]}$$

1.2.5 Bernoullische DGL

$$\boxed{y' + p(x)\, y = q(x) \cdot y^{\alpha}, \quad \alpha \neq 1, \ \alpha \in \mathbb{R}}$$

nichtlin. DGL

$$\Rightarrow \frac{y'}{y^{\alpha}} + p(x)\;{}^{1-\alpha} = q(x)$$

Subst.: $z := y^{1-\alpha}$

$$\Rightarrow z' = (1-\alpha)\, y^{-\alpha} \cdot y'$$

$$\Rightarrow \frac{z'}{1-\alpha} = \frac{y'}{y^{\alpha}}$$

$$\Rightarrow \frac{z'}{1-\alpha} + p(x)\cdot z = q(x) \quad \Big| \cdot (1-\alpha)$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} z' + (1-\alpha)\,p(x)\,z = (1-\alpha)\,q(x) \\ \text{lin. DGL. 1. O. für } z(x) \end{array}}$$

Beispiel: (log Wachstum)

AWP

$$(L) \quad \dot{B}(t) = k\,B(t)\cdot\big(S - B(t)\big), \quad B(0) = B_0$$

$B(t) \sim$ Bestand z. Zt t

$k \sim$ Prop. faktor

$S \sim$ Sättigungsgrenze

$$(L) \Longleftrightarrow \dot{B}(t) = kS\,B(t) - k\,B(t)^2$$

Bernoullische DGL

$$\text{Subst.:} \quad z := \big[B(t)\big]^{-1} = \frac{1}{B(t)}$$

HA: Löse diese DGL (L)

$$z' = -\frac{1}{B^2}\,\dot{B}$$

Lsg: $B(t) = \dfrac{S}{1+\left(\frac{S}{B_0}-1\right)e^{-kt}}$ mit $0 < B_0 < S$

siehe http://www.micbaum.de

pdf-Datei: DGLen - Anwendungsbeispiele

1.3 Gewöhnliche DGL'en 2. Ordnung, elementar lösbare Fälle

$F(x, y, y', y'') = 0$ implizite DGL 2. O

$y'' = f(x, y, y')$ explizite DGL 2. O.

Regel 1:

Kommt in d. DGL $y'' = f(x, y, y')$ nur eine d. Größen x, y, y' vor, so lässt sie sich integrieren.

1. Fall:

$y'' = f(x)$

$y' = \int f(x)\,dx + C_1 = F(x) + C_1$, F Stammfkt.

von f

$$y = \int F(x)\,dx + C_1 x + C_2$$ allg. Lsg

2. Fall:

$$y'' = f(y) \quad \Big|\cdot y'$$

man multipliziere mit y'
(Eulermultiplikator)
"integrierender Faktor"

$$\Rightarrow \quad y' \cdot y'' = f(y) \cdot y'$$

$$\Rightarrow \quad \int \underbrace{y' y''}_{\frac{1}{2}\frac{d}{dx}(y')^2} dx = \int f(y) \cdot y'\,dx$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\int \frac{d}{dx}(y')^2\,dx = \int f(y)\,\frac{dy}{dx}\,dx$$

Subst mit
$y(x) = y$, $y'(x)\,dx = dy$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} y'^2 = \int f(y)\,dy + C_1$$

$$\Rightarrow \quad y'^2 = 2\int f(y)\,dy + 2C_1$$

$= 2\,F(y) + 2C_1$, F Stammfkt zu f

$\Rightarrow \quad y' = \pm \sqrt{2F(y) + 2C_1}$

zwei DGL 1. O Trennung d. Var.

$$\Rightarrow \quad \pm \int \frac{dy}{\sqrt{2F(y) + 2C_1}} = x + C_2$$

allg. Lsg

3. Fall:

$y'' = f(y')$

Subst. $y' =: z \Rightarrow y'' = z'$

$\Rightarrow \quad z' = f(z)$ DGL 1. O. für z

$$\Rightarrow \quad \int \frac{dz}{f(z)} = \int dx + C_1$$

$F(z) = x + C_1$, $F \sim$ Stammfkt zu $\frac{1}{f}$

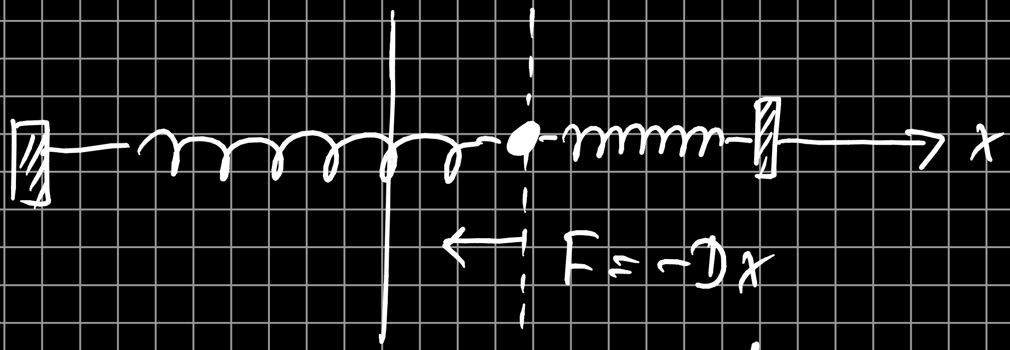
z eliminieren $\Rightarrow z = \varphi(x, C_1)$

$\underset{R.S.}{\Rightarrow} \quad y' = u \Rightarrow y = \int u(x, C_1)\,dx + C_2$

allg. Lsg.

Beispiel 1: $\left[\text{zu } y'' = f(y)\right]$

Ungedämpfte harm. Schwingung



$F = -Dx$

$m \sim$ Masse

$D \sim$ Federkonstante

Rücktreibende Kraft $F = m\ddot{x} = -Dx$

$$m\ddot{x} = -Dx \quad \Big| \cdot \dot{x}$$

$$\Rightarrow m\dot{x}\ddot{x} = -Dx\dot{x}$$

$$\Rightarrow m\int \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\dot{x}^2)\,dt = -D\int x\cdot\dot{x}\,dt$$

$$= -D\int x\frac{dx}{dt}\,dt$$

$$= -D\int x\,dx$$

$$\Rightarrow \quad \frac{m}{2}\dot{x}^2 = -D\frac{x^2}{2} + C_1$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\frac{m}{2}\dot{x}^2}_{\text{Kinetische Energie}} + \underbrace{D\frac{x^2}{2}}_{\text{Potentielle Energie}} = C_1 \qquad [\text{Energiesatz } C_1 \geq 0]$$

Potentielle Energie = Arbeit, die gegen d. Feldkräfte geleistet werden muss.

$$-\int F(x)\,dx = -\int -Dx\,dx = D\frac{x^2}{2}$$

Weiter mittels Trennung d. Var.:

$$\dot{x}^2 = \frac{2C_1}{m} - \frac{D}{m}x^2 = \frac{2C_1}{m}\left(1 - \frac{D}{2C_1}x^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{D}{2C_1}x^2}} = \pm\sqrt{\frac{2C_1}{m}}\int dt + C_2$$

Subst.: $\sqrt{\frac{D}{2C_1}}\,x =: u$, $dx = \sqrt{\frac{2C_1}{D}}\,du$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{\frac{2C_1}{D}}\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \pm\sqrt{\frac{2C_1}{m}} + C_2$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{\arcsin u}$$

$$\Rightarrow \quad \arcsin u = \pm \underbrace{\sqrt{\frac{D}{m}}}_{=:\omega} t + \sqrt{\frac{D}{2C_1}} \cdot C_2$$

$$= \pm \left(\omega t \pm \underbrace{\sqrt{\frac{D}{2C_1}} C_2}_{=:\varphi} \right)$$

$$\xrightarrow[\sin]{} \quad u = \sqrt{\frac{D}{2C_1}} x = \sin\left(\pm \left[\omega t + \varphi \right] \right) = \pm \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\Rightarrow x = \underbrace{\pm \sqrt{\frac{2C_1}{D}}}_{=:A} \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)}$$

allg. Lsg.

$A, \varphi \sim$ bel. wählbar, $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$ "Kreisfreq."