1.6.2 Umschreiben einer DGL n-ter Ordnung auf ein DGL-System 1. Ordnung

(siehe Brücken, Bd 6, S. 67)

Bsp.: $y''' - 2y'' + y' - y = e^x$

$$y = z_1$$

$$\boxed{\begin{aligned} y' &= z_1' = z_2 \\ y'' &= z_2' = z_3 \\ y''' &= z_3' = z_1 - z_2 + 2z_3 + e^x \end{aligned}}$$

Normalform

DGL-System 1. Ordnung

$$\underbrace{\begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \\ z_3' \end{pmatrix}}_{=:\vec{z}\,'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}}_{\vec{z}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^x \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

kurz: $\vec{z}\,' = A\vec{z} + \underbrace{\vec{b}}_{\text{Inhomogenität}}$

$$A \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \quad \vec{b} \in \mathbb{R}^3$$

$$\vec z\,' = A\vec z \quad \text{homogenes DGL-System}$$

$$\vec z\,' = A\vec z + \underbrace{\vec b}_{\neq \vec 0} \quad \text{inhomogenes DGL-System}$$

1.6.3 Lösen von DGL-Systemen mit Hilfe d. Matrizenrechnung (Eigenwertproblem)

$$\vec y\,' = A\vec y + \vec b \quad , \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

$$\vec b = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix} , \quad \vec y = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$$

(A) Homogenes System

$$\vec y\,' = A\vec y$$

Lösungsansatz $\vec y = \vec v e^{\lambda t}$, wobei $\vec v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ (1)

$\lambda \in \mathbb{C}$

Frage: Gibt es reelle (komplexe) Zahlen $\lambda, v_1, \dots, v_n$ derart, dass (1) eine Lsg. von $\vec y\,' = A\vec y$ ist?

$$\vec{y}' = \lambda \vec{v} e^{\lambda t}$$

$$\Downarrow \quad \vec{y}' = A y$$

$$\lambda \vec{v} \cancel{e^{\lambda t}} = A(\vec{v} \cancel{e^{\lambda t}}) \quad \Big| : e^{\lambda t} \neq 0$$

$$\lambda \vec{v} = A \vec{v} \iff \boxed{(A - \lambda E)\vec{v} = \vec{0}} \quad (2)$$

Eigenwertproblem

(2) besitzt genau eine nichttriviale Lsg

$(v_1, \dots, v_n) \neq (0, \dots, 0)$, wenn $P_A(t) = |A - t\lambda| =$

$= \det(A - tE) = 0$

$$P_A(t) := \begin{vmatrix} a_{11} - t & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - t \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} - t \end{vmatrix} \quad (3)$$

$$= c_n t^n + c_{n-1} t^{n-1} + \dots + c_1 t + c_0$$

Charakteristisches Polynom

Koeff. von $P_A(t)$:

$$c_n = (-1)^n$$

$$c_{n-1} = (-1)^{n-1} \underbrace{(a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn})}$$

$\operatorname{tr} A \sim$ Spur, "trace" von A

$$\vdots$$

$$c_0 = \det A$$

Das liefert:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Es gibt eine Lsg. von } \vec{y}\,' = Ay \text{ in d. Form} \\ \vec{y} = \vec{v} e^{\lambda t} \text{ mit } \vec{v} \neq \vec{0} \\ \qquad\quad \Updownarrow \\ \lambda \text{ ist eine NS d. cha. Polynoms } P_A(\lambda) \end{array}}$$

$P_A(\lambda)$ besitzt – wie jedes Polynom n-ten Grades – genau n reelle oder komplexe NS (, wobei mehrfache NS auch mehrfach gezählt werden), d.h.

$$P_A(t) = (-1)^n (t-\lambda_1)^{\mu_1} (t-\lambda_2)^{\mu_2} \cdot \ldots \cdot (t-\lambda_r)^{\mu_r}$$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ paarweise verschieden, "Eigenwerte"

Ist allgemein λ eine μ-fache NS von $P_A(t)$, so gibt es μ zugehörige l.u. Lsgen von $\vec{y}\,' = Ay$ d. Form

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} Q_{k1}(t) \\ \vdots \\ Q_{kn}(t) \end{pmatrix} e^{\lambda t}, \quad k = 0, \dots, \mu - 1 \quad (4)$$

wobei $Q_{k1}, \dots, Q_{kn}$ jeweils ein Polynom vom Höchstgrad k ist. Das gilt auch für nicht-reelles λ, wenn $Q_{k1}, \dots, Q_{kn}$ Polynome mit kompl. Koeff. zugelassen werden.

Ist d. NS λ nicht reell, so ist auch ihre konj. komplexe Zahl $\bar{\lambda}$ eine NS von (3); die Aufspaltung von (4) in Real- und Imaginärteil liefert ein System von 2μ l.u. reellen Lsgen von $\vec{y}' = A\vec{y}$.

Unter den Lsgen befinden sich (gemäß (4) für $k = 0$) stets Lsgen d. Form $\vec{y}^1 = \vec{v}^1 e^{\lambda t}, \dots, \vec{y}^r = \vec{v}^r e^{\lambda t}$, wobei $\vec{v}^1, \dots, \vec{v}^r$ Vektoren d. $\mathbb{R}^n$ sind, deren Komponenten konstant (unabhängig von t) sind.

Sind d. NS d. cha. Polynom sämtlich einfache NS (also $r = n$) und

$\mu_1 = \dots = \mu_n = 1$, so gibt es mithin ein

F.S. $\{\vec{y}^1, \dots, \vec{y}^n\} = \{\vec{v}^1 e^{\lambda_1 t}, \dots, \vec{v}^n e^{\lambda_n t}\}$ mit

$\vec{v}^1, \dots, \vec{v}^n \in \mathbb{R}^n$.

Bsp.:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + y \\ \dot{y} &= 3x - y \end{aligned} \iff \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda E| = P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\sim$ char. Polynom $\Rightarrow (1-\lambda)(-1-\lambda) - 3 = 0$

$\Rightarrow$ EW $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$

Berechne EV für

$\lambda_1 = 2$:

$$\begin{array}{cc|c} v_1 & v_2 & \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \quad |\cdot 3$$

$v_2 = \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow v_1 = \alpha$

$$\Rightarrow \vec{v}^1 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Setze $\alpha = 1$: $\boxed{\vec{v}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$ ist EV zum EW $\lambda_1 = 2$

EV zum EW $\lambda_2 = -2$:

$$\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ \hline 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \quad |(-1)$$

$v_2 = \beta \in \mathbb{R} \implies v_1 = -\frac{1}{3}\beta$

$$\implies \vec{v}^2 = \beta \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wähle $\beta = 3$: $\boxed{\vec{v}^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}}$ EV zum EW $\lambda_2 = -2$

Allg. Lsg

$$\vec{x} := \boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

e^{2t}, e^{-2t} Lösungsbausteine

— " — (Bausteine)

$$\Rightarrow \quad x(t) = c_1 e^{2t} - c_2 e^{-2t}$$

$$y(t) = c_1 e^{2t} + 3 c_2 e^{-2t}$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{x}^1 = e^{2t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \\ \vec{x}^2 = e^{-2t}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}\end{array}\right\} \quad \text{Fundamental-Lösungsvektoren}$$

$$\vec{x} = c_1 \vec{x}^1 + c_2 \vec{x}^2 \quad \text{allg. Lösung}$$

<u>Bsp.:</u> $\quad \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad (\omega > 0)$

$$x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$$

harm. Oszillator

als System: $\quad x = s$

$$\begin{array}{l} \dot{x} = \boxed{\dot{s} = v} \\ \ddot{x} = \boxed{\dot{v} = -\omega^2 s} \end{array} \quad \text{DGL-System 1. O}$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\begin{pmatrix}\dot{s}\\ \dot{v}\end{pmatrix}}_{=\dot{\vec{y}}} = \underbrace{\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\omega^2 & 0\end{pmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{pmatrix}s\\ v\end{pmatrix}}_{=\vec{y}}$$

Ansatz: $\vec{y} = e^{\lambda t}\vec{w}$

$\Rightarrow P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\omega^2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow \lambda^2 + \omega^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = \pm j\omega$

konj. komplexe Lösgn.

Berechne EV zum EW $\lambda_1 = j\omega$:

$$\begin{array}{cc|c|l} s & v & & \\ -j\omega & 1 & 0 & \cdot j\omega \\ -\omega^2 & -j\omega & 0 & \\ \hline -j\omega & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

$v = \alpha \Rightarrow -j\omega s = -\alpha$

$\Rightarrow s = \frac{\alpha}{j\omega} = -j\frac{\alpha}{\omega}$

$\vec{\eta} := \begin{pmatrix} s \\ v \end{pmatrix} = +\alpha \begin{pmatrix} -\frac{j}{\omega} \\ 1 \end{pmatrix}$

Wähle $\alpha = \omega \Rightarrow \begin{pmatrix} s \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -j \\ \omega \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ komplexe Lsg.

$$\vec{y} = e^{j\omega t}\begin{pmatrix} -j \\ \omega \end{pmatrix}$$

$$= \left(\cos(\omega t) + j\sin(\omega t)\right)\begin{pmatrix} -j \\ \omega \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -j\cos(\omega t) + \sin(\omega t) \\ \omega\cos(\omega t) + j\omega\sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sin(\omega t) - j\cos(\omega t) \\ \omega\cos(\omega t) + j\omega\sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \sin(\omega t) \\ \omega\cos(\omega t) \end{pmatrix}}_{= \mathrm{Re}(\vec{y})} + j\underbrace{\begin{pmatrix} -\cos(\omega t) \\ \omega\sin(\omega t) \end{pmatrix}}_{= \mathrm{Im}(\vec{y})}$$

$\Rightarrow$ reelles F.S. $\begin{pmatrix} \sin(\omega t) \\ \omega\cos(\omega t) \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -\cos(\omega t) \\ \omega\sin(\omega t) \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ allg. Lsg $\begin{pmatrix} s \\ v \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} \sin(\omega t) \\ \omega\cos(\omega t) \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -\cos(\omega t) \\ \omega\sin(\omega t) \end{pmatrix}$

HA. S. 87, A19, A20, A21, A22