Anfangswertproblem (AWP):

Es ist eine Lsg. $y = y(x)$ d. DGL $y' = f(x,y)$ zu bestimmen, die durch einen vorgegebenen Pkt $P_0(x_0|y_0)$ des Def.bereiches von f verläuft, d.h. für die $y(x_0) = y_0$ ist.

Existenz- und Eindeutigkeitssatz

$f(x,y)$ sei in dem Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^2$ stetig und dort beschränkt und genüge dort eine LIPSCHITZ-Bedingung:

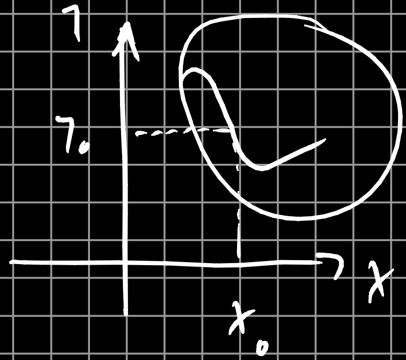
$$|f(x,y_2) - f(x,y_1)| \leq L\,|y_2 - y_1| \quad \forall (x,y_1),(x,y_2) \in G \;(*)$$

Dann besitzt die DGL $y' = f(x,y)$ durch jeden Pkt. $P(x_0|y_0) \in G$ genau eine Lsg.kurve, die in einer Umgebung von x nebst ihrer Ableitungen stetig ist.

$L \sim$ Lipschitzkonstante

$(*)$ liegt zwischen Stetigkeit und partieller Diff'barkeit; die Lipschitzkonstante ist gleichbedeutend mit d. Beschränktheit der partiellen Differenzenquotienten bzgl. G:

$$\left| \frac{f(x,y_2) - f(x,y_1)}{y_2 - y_1} \right| \leq L$$



Erfüllt f die Lipschitzbedingung (*), so bez. man f als **Lipschitz-stetig in G bzgl. y.**

1.2.2 Trennung d. Veränderlichen

Sei $y' = f(x,y)$ mit $f(x,y) = h(x) \cdot g(y)$

("trennbare Veränderliche", "Prototyp")

Voraussetzung:

h sei stetig in $[a,b]$

g sei stetig in $[c,d]$

Man kann zeigen: f ist Lipschitz-stetig im Rechteck

$$\{(x,y) \mid a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$$

$\Longrightarrow$ Ex. und Eind.satz

Durch jeden Pkt (x_0, y_0) mit $a < x_0 < b$, $c < y_0 < d$ verläuft genau eine Lsg.kurve. Sei (x_0, y_0) vorgegeben und $y = \varphi(x)$ die

(Eind.) Lsg. d. AWP.

Fall 1: $g(y_0) = 0$

Dann ist die konstante Fkt. $y \equiv y_0$ eine Lsg., also die Lsg. d. AWP, d.h. $y = \varphi(x) \equiv y_0$,

denn $h(x)\, g(y)\Big|_{y \equiv y_0} = h(x)\, g(y_0) = 0 =$

$$= \frac{d}{dx} y_0 = y'.$$

Fall 2: $g(y_0) \neq 0$

Dann gilt $g(y) \neq 0$ in einer Umgebung U von y_0.

Sei $G(y)$ Stammfkt. von $\frac{1}{g(y)}$, d.h. $\frac{d}{dy} G(y) = \frac{1}{g(y)}$.

Sei $H(x)$ Stammfkt von $h(x)$, d.h. $\frac{d}{dx} H(x) = h(x)$.

$y = \varphi(x)$ ist Lsg. d. AWP $\Longrightarrow$ $y' = h(x)\, g(y)\Big|_{y=\varphi(x)}$

$$\Longrightarrow h(x) = \frac{1}{g(y)} \cdot y'\Big|_{y=\varphi(x)} = \frac{d}{dy} G(y) \cdot y'\Big|_{y=\varphi(x)} =$$

$$= \frac{d}{dx}\Big[G(\varphi(x))\Big] \quad \text{Kettenregel!}$$

Das beinhaltet:
Neben $H(x)$ ist auch $G(\varphi(x))$ eine Stammfkt von

$h(x) \Rightarrow G(\varphi(x)) = H(x) + C$

Wegen $G'(y_0) = \frac{1}{g(y_0)} \neq 0$ ist die Fkt. $G(y)$

in einer Umgebung von y_0 monoton, besitzt also eine Umkehrfkt. G^{-1}.

$$\Rightarrow \quad \boxed{\varphi(x) = G^{-1}(H(x)) + C}$$

Lösungsmethodik:

$$y' = f(x,y) = h(x)\,g(y)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = h(x) \cdot g(y)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = h(x)\,dx \qquad \text{"Trennung"}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int h(x)\,dx \qquad \text{unbestimmte Integration}$$

$$\Rightarrow G(y) = H(x) + C$$

$$\Rightarrow y = G^{-1}(H(x)) + C \qquad \text{Allg. Lsg.}$$

Lsg. d. AWP $y(x_0) = y_0$

1. Möglichkeit: Bestimmung d. Konstanten C in d. allg. Lsg. durch Einsetzen d. Punktes (x_0, y_0):

$$C = G(y_0) - H(x_0)$$

2. Möglichkeit: Bestimmte Integration

$$\frac{dy}{dx} = h(x)\, g(y)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{g(y)} = h(x)\, dx$$

$$\boxed{\int_{y_0}^{y} \frac{dt}{g(t)} = \int_{x_0}^{x} h(t)\, dt}$$

Beispiel 1: $y' = -\dfrac{x}{y}$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$\Rightarrow \quad y\,dy = -x\,dx$$

$$\Rightarrow \int y\,dy = -\int x\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C_1$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = \underbrace{2C_1}_{=:\,C} \quad (C \geq 0)$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = C$$

Schar konz. Kreise mit Radius $\sqrt{C}$

AWP: $y(0) = 3 \Rightarrow C = 9$

$$\boxed{x^2 + y^2 = 9 \quad \text{Lsg. d. AWP}}$$

<u>oder</u> mittels bestimmter Integration

$$y\,dy = -x\,dx$$

$$\int_3^y t\,dt = -\int_0^x t\,dt$$

$$\Rightarrow \left.\frac{t^2}{2}\right|_3^y = -\left.\frac{t^2}{2}\right|_0^x$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{2} - \frac{3^2}{2} = -\frac{x^2}{2} \Rightarrow x^2 + y^2 = 3^2$$ Lsg. d. AWP

Beispiel 2: Temperaturausgleich (vgl. Einführung)

$$\frac{dy}{dt} = -k(y-a), \quad y(t_0) = y_0$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y-a} = -k \int dt$$

$$\Rightarrow \ln|y-a| = -kt + c_1 \quad | \exp$$

$$\Rightarrow |y-a| = e^{-kt+c_1} = e^{-kt} \cdot e^{c_1}$$

$$\Rightarrow y - a = \underbrace{\pm e^{c_1}}_{=: C} e^{-kt}$$

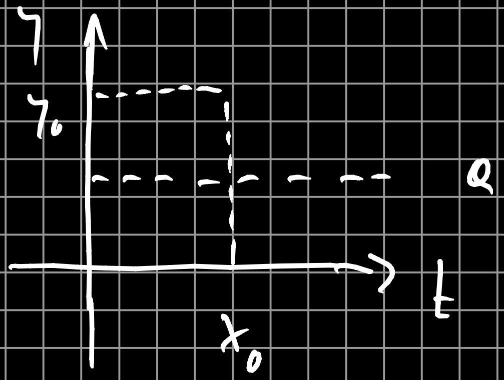
$$\Rightarrow y = a + Ce^{-kt}$$ allg. Lsg

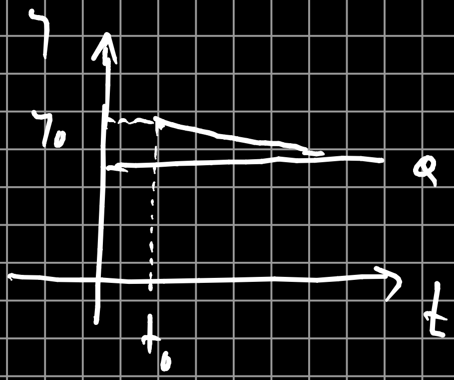
$$y(t_0) = y_0 \Rightarrow y_0 = a + Ce^{-kt_0}$$

$$C = (y_0 - a)e^{kt_0}$$

$$\Rightarrow y = a + (y_0 - a)e^{kt_0} e^{-kt}$$

$$\boxed{y = a + (y_0 - a)e^{-k(t-t_0)} \quad \text{Lsg. d AWP}}$$





Beispiel 3: $x^2y' - 4y' - 2xy = 0$

$$\Rightarrow y'(x^2-4) = 2xy$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2-4}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{2x}{x^2-4}\, dx$$

$$\Rightarrow \ln|y| = \ln|x^2-4| + C_1 \quad | \exp$$

$$\Rightarrow |y| = e^{\ln|x^2-4|+C_1} = e^{\ln|x^2-4|} \cdot e^{C_1}$$

$$= e^{C_1} \cdot |x^2-4|$$

$$\Rightarrow y = \underbrace{\pm e^{C_1}}_{=:C}(x^2-4)$$

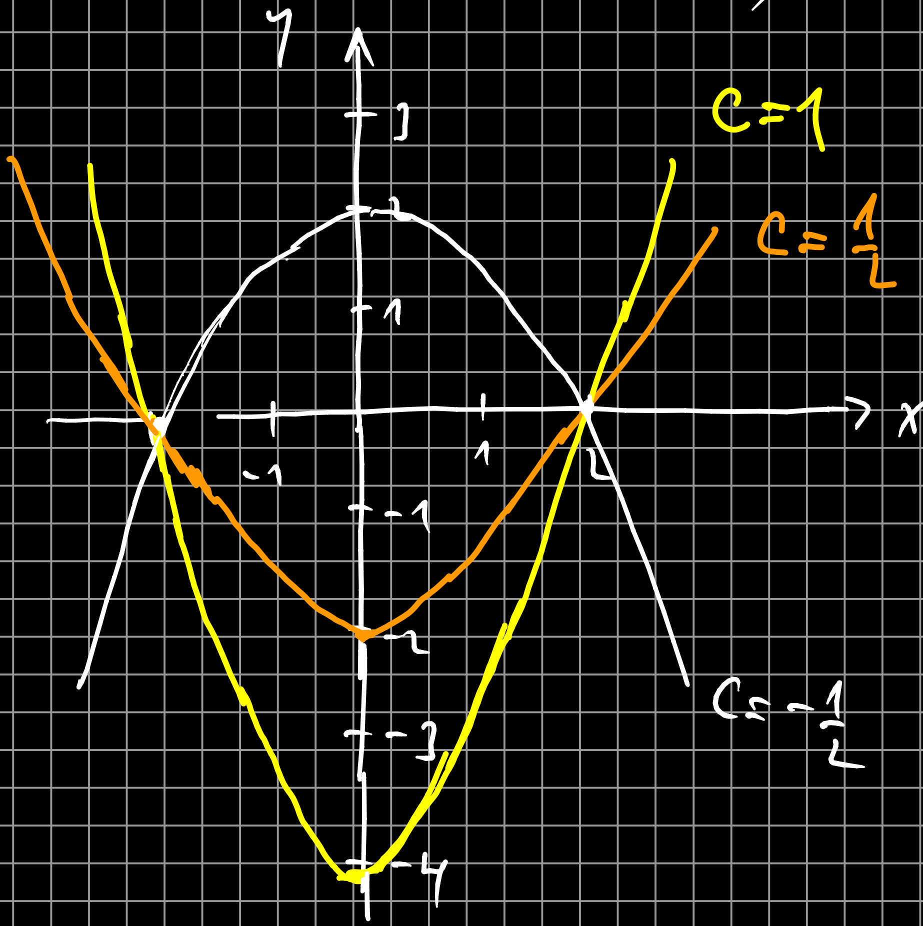
$\Rightarrow y = C\cdot(x^2-4)$ allg. Lsg.

Durch den Pkt. $P_0(2|0)$ verlaufen mehr als eine Lsg! (?) Durch den Pkt. $P_1(2|1)$ verläuft überhaupt keine Lsg! (?)

Das kollidiert nicht mit dem Existenz- und Eind.satz, denn bei

$$y' = \frac{2xy}{x^2-4} = f(x,y)$$

ist die Fkt. f in allen Pkten. $P(2|y_0)$ unstetig! ($x_0 = 2$ ist Polstelle)



1.2.3 Auf trennbare Veränderliche zurückführbare DGL

(A) Ähnlichkeits-DGL

Typ $$\boxed{y' = f\left(\frac{y}{x}\right)}$$

Subst.: $\frac{y(x)}{x} =: z(x)$

kurz $z := \frac{y}{x} \Rightarrow y = xz \Rightarrow y' = z + xz'$

(Prod.regel)

DGL $\Rightarrow$ $z + xz' = f(z)$ ~ trennbar!

$$\Rightarrow \int \frac{dz}{f(z)-z} = \int \frac{dx}{x} + C_1 = \ln|x| + C_1$$

$$C \cdot e^{\int \frac{dz}{f(z)-z}} = x \; ; \; \pm e^{C_1} =: \frac{1}{C}$$

hieraus z eliminieren $\rightarrow$ $z = \varphi(x, C)$

Rücksubst.: $y = xz \Rightarrow y = x \cdot \varphi(x, C)$

allg. Lsg.

Beispiel: $y' = \dfrac{y^2 - x^2}{2xy} = \dfrac{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}{2\,\frac{y}{x}} = f\left(\frac{y}{x}\right)$

Subst.: $z := \dfrac{y}{x} \Longrightarrow y = xz \Longrightarrow y' = z + xz'$

$$\Longrightarrow z'x + z = \frac{z^2-1}{2z}$$

$$\Longrightarrow x\,\frac{dz}{dx} = \frac{z^2-1}{2z} - z = \frac{z^2-1-2z^2}{2z}$$

$$\Longrightarrow x\,\frac{dz}{dx} = -\,\frac{z^2+1}{2z}$$

$$\Longrightarrow \int \frac{2z\,dz}{z^2+1} = -\int \frac{dx}{x} + C_1$$

$$\Longrightarrow \ln(z^2+1) = -\ln|x| + C_1$$

$$\Longrightarrow z^2+1 = e^{-\ln|x|}\cdot e^{C_1} = e^{C_1}\cdot\frac{1}{|x|}$$

$$\Longrightarrow z^2+1 = \underbrace{\pm e^{C_1}}_{=:C}\cdot\frac{1}{x} = C\cdot\frac{1}{x}$$

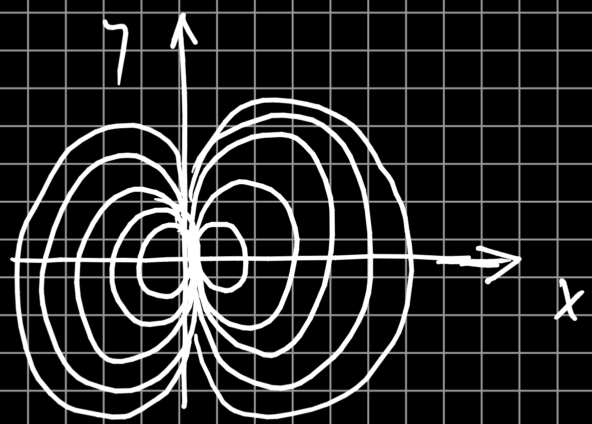
Rücksubst.: $\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 + 1 = \dfrac{C}{x} \quad \Big|\cdot x^2$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 = Cx \quad \text{allg. Lsg.}$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{x^2 - Cx + \left(\frac{C}{2}\right)^2}_{= \left(x - \frac{C}{2}\right)^2} + y^2 = \left(\frac{C}{2}\right)^2$$

$$\left(x - \frac{C}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{C}{2}\right)^2 \quad ; \quad \frac{C}{2} =: r$$

$$M\left(\frac{C}{2} \middle| 0\right)$$



HA, Bd 6 Brücken, S. 85

A1 – A4

Bsp.: $\quad yy' - e^{2x} = 0$

$$\Rightarrow \quad y\frac{dy}{dx} = e^{2x} \Rightarrow \int y \, dy = \int e^{2x} dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}e^{2x} + C_1 \quad | \cdot 2$$

$$\Rightarrow y^2 = e^{2x} + C \quad \text{mit } C := 2C_1$$

$$\Rightarrow y = \pm\sqrt{e^{2x} + C} = \varphi(x, C)$$

(B) Typ $\boxed{y' = f(ax + by + c)}$ mit $b \neq 0$

Subst.: $u(x) := ax + by + c$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{b}(u - ax - c)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\left(\frac{du}{dx} - a\right)$$

DGL $\Rightarrow \frac{1}{b}\left(\frac{du}{dx} - a\right) = f(u)$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = b \cdot f(u) + a \quad \text{trennbar!}$$

$$\Downarrow$$

$u = \varphi(x, C)$ allg. Lsg.

Rücksubst.: $y = \frac{1}{b}(u - ax - c)$

$$\boxed{y = \frac{1}{b}\left(\varphi(x,C) - ax - C\right)}$$

allg. Lsg d. Ausgangs-DGL

Beispiel: $y' = (x+y-1)^2$ AWP $y(0) = 1$

$z := x+y-1 \Rightarrow y = z - x + 1$

$\Rightarrow y' = z' - 1$

DGL $\Rightarrow z' - 1 = z^2$

$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = 1 + z^2$

$\Rightarrow \int \frac{dz}{1+z^2} = \int dx$

$\Rightarrow \arctan(z) = x + C$

$\Rightarrow z = \tan(x+C)$

Rücksubst.: $y = z - x + 1$

$\boxed{y = \tan(x+C) - x + 1}$ allg. Lsg. ($C \in \mathbb{R}$)

AWP: $1 = \tan(0 + C) - 0 + 1$

$\tan C = 0 \longrightarrow C = \pm k\pi \;;\; k \in \mathbb{Z}$

(alle diese Konst. können genommen werden)

$y = \tan(x \pm k\pi) - x + 1$ (bedeutungslos, da periodisch)

$\Downarrow$

$$\boxed{y = \tan x - x + 1}$$ Lsg. d. AWP

1.2.4 Lineare DGL 1. Ordnung

$$\boxed{y' + p(x)\,y = q(x)}$$ $\sim$ <u>inhomogene</u> DGL

$p(x), q(x)$ stetig in $a < x < b$

$$\boxed{y' + p(x)\,y = 0}$$ $\sim$ (zugehörige) <u>homogene</u> DGL

a) Lsg. d. hom. DGL

$$y' + p(x)y = 0$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int p(x)\,dx + K_1$$

$$\Rightarrow \ln|y| \ldots \Rightarrow y = \underbrace{\pm e^{K_1}}_{=:K} e^{-\int p(x)\,dx}$$

$$\Rightarrow y = K e^{-\int p(x)\,dx}$$

$\leadsto$ allg. Lsg d. hom. DGL

b) Lsg d. inh. DGL

"Variation d. Konstanten" (LAGRANGE)

Ansatz: $y = K(x) \underbrace{e^{-\int p(x)\,dx}}_{=:y_h} = K(x)\, y_h$

DGL: $K' y_h + \underbrace{K y_h' + p(x) \cdot K \cdot y_h}_{K(y_h' + p(x) y_h)} = q(x)$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{=0}$$

da y_h Lsg. d. hom. Gleichung

$$K' y_h = q(x) \qquad K(x) = \int \frac{q(x)}{y_h}\,dx + C$$

$$K(x) = \int q(x)\, e^{\int p(x)dx}\, dx + C$$

Allg. Lsg. d. inh. DGL

$$\boxed{y = \underbrace{C e^{-\int p(x)dx}}_{\substack{\text{allg. Lsg.} \\ \text{hom.}}} + \underbrace{e^{-\int p(x)dx} \cdot \int q(x)\, e^{\int p(x)dx}\, dx}_{\substack{\text{spez. Lsg.} \\ \text{inhomogen}}}}$$

Beispiel 1: $\quad x y' - y = x^2 \cos x \quad \Big| : x \neq 0$

bzw. $\quad y' - \frac{y}{x} = x \cos x$

Typ: $\quad y' + p(x) y = q(x)$

mit $\quad p(x) = -\frac{1}{x}\,; \quad q(x) = x \cos x$

a) homogen: $y' - \frac{y}{x} = 0$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{y}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \ln|y| = \ln|x| + C_1$$

$$\Rightarrow \quad y = \underbrace{\pm e^{C_1}}_{=:K} \cdot x = K \cdot x$$

allg. Lsg. homogen

b) inhomogen: $\overbrace{y = K(x) \cdot x}^{\text{Ansatz}} \Rightarrow y' = K'(x)x + K(x)$

DGL $\rightarrow \quad K' x + \cancel{K \cdot 1} - \cancel{K} = x \cos x$

$$\Rightarrow \quad K' = \cos x \Rightarrow K(x) = \sin x + C$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = Cx + x \sin x$$

$$= \quad y_h + y_i$$

Lsg. homogen   Lsg. inhomogen