1.5.4 Allgemein inhomogene lineare DGL n-ter Ordnung

A) Variation d. Konstanten

$$\boxed{y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)\, y = r(x)}$$

Ist $y_1, \dots, y_n$ eine Lösungsbasis d. zugehörigen hom. DGL, dann besitzt d. inh. DGL eine spezielle Lsg $y_s = C_1(x) y_1 + \dots + C_n(x) y_n$

Die Ableitungen d. Koeff.funktionen $C_1', \dots, C_n'$ bestimmt man aus dem LGS:

C_1'	C_2'	...	C_n'	r.S.
y_1	y_2	...	y_n	0
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$y_1^{(n-1)}$	$y_2^{(n-1)}$	...	$y_n^{(n-1)}$	$r(x)$

$C_1, \dots, C_n$ erhält man durch Integration

Bsp.: $y'' - y = e^{2x}$

a) hom. DGL: $y'' - y = 0$

Ansatz: $e^{\lambda x}$: $\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = \pm 1$

$\Rightarrow$ F.S. $\{e^x, e^{-x}\}$

$$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

b) inh. DGL $y'' - y = e^{2x}$

mit $r(x) = e^{2x}$

Ansatz:

$$y_s = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2$$

$y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$

$y_1' = e^x$, $y_2' = -e^{-x}$

C_1'	C_2'	r.S.
e^x	e^{-x}	0
e^x	$-e^{-x}$	e^{2x}

$$\begin{pmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2x} \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ CRAMER

$$C_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{-x} \\ e^{2x} & -e^{-x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix}} = \frac{-e^x}{-2} = \frac{e^x}{2}$$

$$c_2' = \frac{\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & e^{2x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix}} = \frac{e^{3x}}{-2} = -\frac{e^{3x}}{2}$$

$$\left.\begin{aligned} c_1' &= \frac{e^x}{2} \Rightarrow c_1 = \frac{e^x}{2} \\ c_2' &= -\frac{e^{3x}}{2} \Rightarrow c_2 = -\frac{e^{3x}}{6} \end{aligned}\right\} \Rightarrow y_s = \frac{e^x}{2} \cdot y_1 - \frac{e^{3x}}{6} \cdot y_2$$

$$= \frac{e^x}{2} \cdot e^x - \frac{e^{3x}}{6} \cdot e^{-x}$$

$$= \boxed{\frac{1}{3} e^{2x}}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = y_h + y_s = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{3} e^{2x}}$$ allg. Lsg.

B) Ansatzverfahren (zur Bestimmung einer spez. Lsg. von $L[y] = r(x)$)

(siehe Brücken, Bd 6, S. 52)

Tabellenansatz (Normalfall)

<u>Bsp.:</u> $y'' - y' - 2y = \sin x$

a) $y'' - y' - 2y = 0$

$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -1$

$\Rightarrow$ FS $\{e^{2x}, e^{-x}\} \Rightarrow y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$

b) inh.:

$r(x) = \sin x$

$\Rightarrow$ Ansatz: $y_s = A\cos x + B\sin x$

$y_s' = -A\sin x + B\cos x$

$y_s'' = -A\cos x - B\sin x$

$\Rightarrow y_s'' - y_s' - 2y_s = \sin x$

$-A\cos x - B\sin x - (-A\sin x + B\cos x)$
$\quad - 2(A\cos x + B\sin x) = \sin x$

$\Rightarrow \sin x(-B + A - 2B) + \cos x(-A - B - 2A) = \sin x$

$\Rightarrow \sin x(A - 3B) + \cos x(-3A - B) = \sin x$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} A - 3B = 1 \\ \wedge \quad -3A - B = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A = \frac{1}{10}, \quad B = -\frac{3}{10}$$

$$\Rightarrow y_s = \frac{1}{10}\cos x - \frac{3}{10}\sin x$$

$$\Rightarrow y = y_h + y_s \quad \text{allg. Lsg.}$$

kürzer über Tabelle:

	$\sin x$	$\cos x$
$-2y_s$	$-2B$	$-2A$
$-y_s'$	A	$-B$
y_s''	$-B$	$-A$
l.S.	$A-3B$	$-3A-B$
r.S.	1	0

$$y_s'' - y_s' - 2y_s = \sin x$$

$$y_s = A\cos x + B\sin x$$

$$y_s' = -A\sin x + B\cos x$$

$$y_s'' = -A\cos x - B\sin x$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} A - 3B = 1 \\ \wedge \; -3A - B = 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{10}, \quad B = -\frac{3}{10}$$

$$\Rightarrow y = y_h + y_s$$

Resonanzfall:

Bsp.: $y'' - y = 2e^x \quad (*)$

char. P. $\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = \pm 1$

$\Rightarrow$ FS $\{e^x, e^{-x}\}$

$r(x) = 2e^x$

Var. d. Konst. $\quad y_s = C(x)e^x$

$y_s' = C'e^x + Ce^x$

$y_s'' = C''e^x + C'e^x + C'e^x + Ce^x$

$= C''e^x + 2C'e^x + Ce^x$

$\Longrightarrow$ y_s, y_s', y_s'' einsetzen in (*)

$C''e^x + 2C'e^x + \cancel{Ce^x} - \cancel{Ce^x} = 2e^x$

$\xrightarrow[:e^x \neq 0]{} \quad C'' + 2C' = 2$

$C'' = 0 \Rightarrow C' = 1 \Rightarrow C = C(x) = x$

$\Rightarrow y_s = x e^x$

Bei einfacher Resonanz

Bsp.: $y'' + y = \sin x$ (harm. Oszillator)

a) $y'' + y = 0 \Rightarrow$ char. P. : $\lambda^2 + 1 = 0$

$$\Rightarrow \lambda_{1/2} = \pm j$$

$$\Rightarrow FS \quad \{\sin x, \cos x\}$$

$$\Rightarrow y_h = C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

b) inh. DGL

$r(x) = \sin x \Rightarrow a + bj = j$ (einfache Resonanz)

$$\Rightarrow y_s = \underbrace{x}_{\text{wegen einf. Resonanz!}} \cdot (A \sin x + B \cos x)$$

$$y_s' = A \sin x + B \cos x + x(A \cos x - B \sin x)$$

$$y_s'' = A \cos x - B \sin x + A \cos x - B \sin x + x(-A \sin x - B \cos x)$$

$$= 2A \cos x - 2B \sin x - Ax \sin x - Bx \cos x$$

Tabelle:

	$\sin x$	$\cos x$	$x \sin x$	$x \cos x$
y_s	0	0	A	B
y_s''	−2B	2A	−A	−B
l.S.	−2B	2A	0	0
r.S.	1	0	0	0

$\Rightarrow \quad A = 0 \;,\; -2B = 1 \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \quad y_s = -\frac{x}{2}\cos x$

$\Rightarrow \quad \boxed{y = y_h + y_s = C_1 \sin x + C_2 \cos x - \frac{x}{2}\cos x}$ allg. Lsg.

HA, Brücher, Bd 6, S. 86, A 11) – A 17)

1.6. Lineare Systeme mit konstanten Koeff.

(siehe Brücher, Bd 6, S. 66)

1.6.1 Eliminationsverfahren

Differentialoperator:

$D : y \mapsto y'$

$Dy := y' \,,\, D^2 y := y'' \,, \ldots ,\, D^{n+1} y = D^n(Dy)$ rekursiv

z.B. $(D^2 - D + 1)y = y'' - y' + y$

<u>Bsp.:</u> $\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = x(t) + y(t) + t \\ \dot{y}(t) = 3x(t) - y(t) \end{array} \right\}$ kurz: $\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = x + y + t \\ \dot{y} = 3x - y \end{array} \right\}$

AB: $x(0) = -\frac{1}{4} \;;\; y(0) = 1$

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \dot{\vec{z}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$$

DGL-System 1. Ordnung

$$\dot{\vec{z}} = \underbrace{\begin{array}{cc} x & y \\ \hline \end{array}\!\!\!\!\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}}_{=:A} \vec{z} + \underbrace{\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}}_{=: \vec{b} \neq \vec{0}}$$

Inhomogenität

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dot{x} - x - y = t \\ -3x + \dot{y} + y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} (D-1)x - y = t \\ -3x + (D+1)y = 0 \end{array}}$$

LGS:

	x	y	r.S.	Regel
	$D-1$	-1	t	$I \cdot 3$
(*)	-3	$D+1$	0	$I \cdot (D-1)$
	0	D^2-4	$3t$	

$$\Downarrow$$

$$(D^2-4)y = 3t \Rightarrow \ddot{y} - 4y = 3t$$

$$\lambda^2 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = \pm 2$$

$$\Rightarrow y_h = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t}$$

$$\left.\begin{aligned} y_s &= A + Bt \\ y_s' &= B \\ y_s'' &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow -4A - 4Bt = 3t$$

$$\Rightarrow \boxed{A = 0} \wedge \boxed{B = -\frac{3}{4}}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t} - \frac{3}{4} t}$$

$$\Longrightarrow \quad x = \frac{1}{3}(D+1)\,y = \frac{1}{3} Dy + \frac{1}{3} y = \frac{1}{3}\dot{y} + \frac{1}{3} y$$

(*)

$$= \boxed{C_1 e^{2t} - \frac{C_2}{3} e^{-2t} - \frac{1}{4}(t+1) = x}$$

$$x(0) = C_1 - \frac{C_2}{3} - \frac{1}{4} \overset{!}{=} -\frac{1}{4} \Rightarrow C_1 - \frac{C_2}{3} = 0$$

$$y(0) = C_1 + C_2 \overset{!}{=} 1$$

$$\left.\begin{aligned} & C_1 - \frac{C_2}{3} = 0 \\ \wedge \quad & C_1 + C_2 = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{C_2 = \frac{3}{4}} \quad \boxed{C_1 = \frac{1}{4}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{4} e^{2t} - \frac{1}{4} e^{-2t} - \frac{1}{4}(1+t) \\ y(t) &= \frac{1}{4} e^{2t} + \frac{3}{4} e^{2t} - \frac{3}{4} t \end{aligned}}$$

Lsg. d. AWP's