I. 5.1 Arithmetische Folgen II

Neuer Begriff: **Reihe**

Geg. Folge (a_k) mit $k \in \mathbb{N}$.

Wir definieren Folge (S_n) mit

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \dots + a_n \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}.$$

Dies ist eine **Folge d. Partialsummen von (a_k)** und wird als Reihe bezeichnet.

Auch bei dieser neuen Zahlenfolge können wir nach dem GW fragen.

WICHTIG: Hat (S_n) einen GW, so muss (a_k) eine Nullfolge sein. Ist aber (a_k) eine Nullfolge, so hat (S_n) <u>nicht</u> unbedingt einen GW!

<u>Bsp.:</u>

(a_k) mit $a_k = \frac{1}{k}$ Nullfolge.

Aber:
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \text{(Harmonische Reihe)}$$

Wir können zeigen, dass (S_n) keinen GW besitzt:

$$S = 1 + \underbrace{\frac{1}{2}}_{=\frac{1}{2}\cdot 1} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{>2\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{>4\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{2}} + \dots \to \infty$$

GW

Die harmonische Reihe ist divergent.

Wir bilden d. Reihe zur arithm Folge und erhalten die arithm. Summenformel

(a_k) mit $a_k = a_0 + kd$

$$\Rightarrow \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} (a_0 + kd) = \sum_{k=0}^{n} a_0 + d \underbrace{\sum_{k=0}^{n} k}$$

Summenformel, 1. Semester

$$\Rightarrow \quad \boxed{S_n = (n+1)a_0 + d \cdot \frac{n(n+1)}{2}}$$

Arithm. Summenformel / Reihe

I. 5.2 Geometrische Folgen II

Betrachte (a_k) mit $a_k = a_0 q^k$

$$\Rightarrow \quad \text{Geom. Reihe:} \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_0 q^k = a_0 \sum_{k=0}^{n} q^k$$

Es ist $S_n = a_0 \sum_{k=0}^{n} q^k \quad \Big| \cdot q \qquad (I)$

$$q \cdot S_n = a_0 \sum_{k=0}^{n} q^{k+1} \qquad (II)$$

$$\underset{(I)-(II)}{\Longrightarrow} \quad S_n(1-q) = a_0(1-q^{n+1})$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{S_n = a_0 \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$$

Für $|q| < 1$ ex. nun d. GW (Wert d. Reihe), denn mit $q^{n+1} \to 0$ für $n \to \infty$ folgt

$$\boxed{s = a_0 \cdot \frac{1}{1-q}}$$

I.5.3 Bestimmung von Reihenwerten oder Nachweis von Konvergenz

① **Teleskopsummen:** Haben Partialsummen einer Reihe d. Form von Teleskopsummen, so heben sie sich durch d. paarweise unterschiedl. VZ d. beteiligten Summanden alle weg, bis auf den ersten und den letzten.

Teleskopsumme: $\sum\limits_{k=1}^{n} (b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_2 + b_2 - b_3 + b_3$

$\mp \ldots b_n - b_{n+1}$

$= b_1 - b_{n+1}$

Folgerichtig ergibt sich mit Hilfe d. GW-Sätze:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (b_k - b_{k+1}) = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_{n+1}$$

Bsp.: Berechne Reihensumme: $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

Es ist $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{\cancel{k+1}}{k(\cancel{k+1})} - \frac{\cancel{k}}{\cancel{k}(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

② **Monotoniekriterium:**

Betrachte Reihe $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right)$. Nun existiere ein Index $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_n \in \mathbb{R}_0^+$ für alle $n \geq n_0$ und eine Schranke $S > 0$. Ist dann

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \leq S \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow$ Reihe konv.

③ **Majoranten- und Minorantenkriterium:**

Durch Vergleiche mit bereits bekannten Reihen können Aussagen über Konvergenz bzw. Divergenz d. gerade untersuchten Reihe machen.
Mathematisch formulieren wir:

Für eine Reihe $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)$ mit $a_n \in \mathbb{C}$ gelten folgende Konvergenzaussagen:

- Gibt es eine reelle Folge (b_n) mit $|a_n| \leq b_n \ \forall n \geq n_0$ <u>und</u> konv. $\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$
  $\Rightarrow \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)$ konv. Majorantenkriterium

- Sind alle $a_n \in \mathbb{R}$ und gibt es eine div. Reihe $\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$ mit $0 \leq b_n \leq a_n$ $\forall n \geq n_0 \Rightarrow \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)$ ist div.
  Minorantenkriterium

<u>Bsp.:</u> Für d. Reihe $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ können wir durch d. harm. Reihe und das Minorantenkriterium heranziehen.

Da $\sqrt{n} \leq n \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$.

Weil $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\right)$ div. $\Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ div.

4 Quotientenkriterium: (QK)

Gilt für $n \geq n_0$ $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q$ mit $q < 1$

$\Rightarrow \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)$ sogar absolut konv.

d.h. $\left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\right)$ konv.

Falls $q > 1 \Rightarrow$ Reihe div.

Falls $q = 1 \Rightarrow$ keine Aussage möglich

⑤ Wurzelkriterium: (WK)

Gilt für $n \geq n_0$ stets $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ mit $q < 1$

$\Rightarrow \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)$ sogar absolut.

Falls $q > 1 \Rightarrow$ Reihe div.

Falls $q = 1 \Rightarrow$ keine Aussage möglich.

Bsp.: • Für die Reihe $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}\right)$ gilt:

WK: $\sqrt[n]{\left|\frac{n^2}{2^n}\right|} = \frac{\sqrt[n]{n^2}}{\sqrt[n]{2^n}}$, also $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^2}}{\sqrt[n]{2^n}} = \frac{1}{2}$

$= q$

Da $q < 1 \Rightarrow$ Reihe konv.

• Für d. Reihe $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\right)$ gilt:

QK: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1/(n+1)!}{1/n!} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1}\right) = q = 0 < 1 \Rightarrow$ Reihe konv.

<u>Übung</u>: $\left(\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{2^k \cdot k!}{k^k}}_{a_k}\right)$

QK: $$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{2^{k+1}\,(k+1)!}{(k+1)^{k+1}} \cdot \frac{k^k}{2^k \cdot k!}$$

$$= \frac{2\,(k+1)!}{(k+1)^{k+1}} \cdot \frac{k^k}{k!}$$

$$= \frac{2 \cdot \cancel{k!}\,\cancel{(k+1)} \cdot k^k}{(k+1)^k\,\cancel{(k+1)} \cdot \cancel{k!}} =$$

$$= 2\left(\frac{k}{k+1}\right)^k = 2\left(\frac{\cancel{k}}{\cancel{k}\left(1+\frac{1}{k}\right)}\right)^k =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} \longrightarrow \frac{2}{e} < 1$$

$\Longrightarrow$ Reihe konv