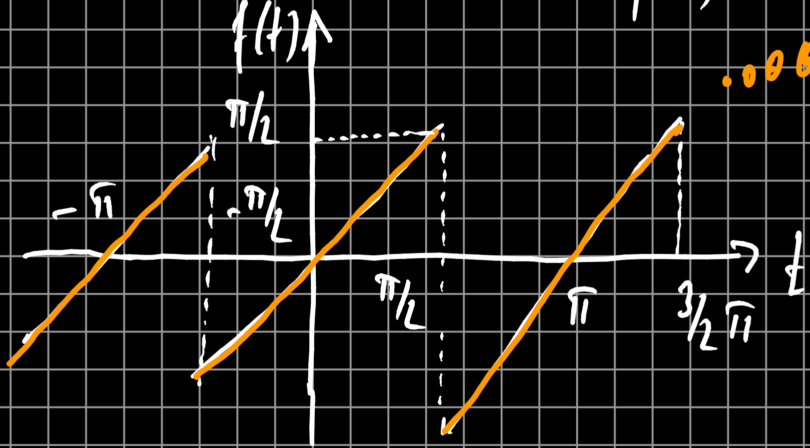
Bsp.: Geg. π-per. Fkt. $f(t) = t$
mit $-\frac{\pi}{2} \leq t < \frac{\pi}{2}$; $T = \pi$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2$
$f(t+T) = f(t)$

Bestimme Fourierreihe von $f(t)$:



Sägezahnschw.

$f(-t) = -f(t)$
ung. Fkt.

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} t \cos(k\omega t)\, dt = 0 \quad ; \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin(k\omega t)\, dt = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} t \cdot \sin(2kt)\, dt \quad ; \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

$$b_k = \frac{4}{\pi} \left[\frac{\sin(2kt)}{4k^2} - \frac{t\cos(2kt)}{2k} \right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{4}{\pi} \left[\underbrace{\frac{\sin(\pi k)}{4k^2}}_{=0} - \frac{\pi}{2} \frac{\cos(k\pi)}{2k} \right] = -\frac{1}{k} \cos(k\pi) =$$

$$= -\frac{1}{k} (-1)^k = (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$$

$\Rightarrow$ Summenfkt.: $s(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \sin(2kt)$

$$= \sin(2t) - \frac{1}{2}\sin(4t) + \frac{1}{3}\sin(6t) + - \dots$$

$s(t)$ konv. an allen Stetigkeitsstellen gegen $f(t)$ und an allen Sprungstellen x_0 gegen $\frac{1}{2}\left[f(x_0+) + f(x_0-)\right]$; in unserem Fall gegen Null.

Komplexe Rechnung

3.4 Komplexe Darstellung

3.4.1 Komplexe Fourier-Reihe

Mit Hilfe d. Eulerschen Formeln

$$\left\{\begin{aligned} e^{jkx} &= \cos kx + j\sin kx \\ e^{-jkx} &= \cos kx - j\sin kx \end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{aligned} \cos kx &= \frac{1}{2}\left(e^{jkx} + e^{-jkx}\right) \\ \sin kx &= -\frac{j}{2}\left(e^{jkx} - e^{-jkx}\right) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

läßt sich d. trig. Reihe

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right)$$

wie folgt umformen:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{a_k}{2}\left(e^{jkx} + e^{-jkx}\right) - j\frac{b_k}{2}\left(e^{jkx} - e^{-jkx}\right)\right]$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k - jb_k}{2} e^{jkx} + \frac{a_k + jb_k}{2} e^{-jkx}\right)$$

Mit den Bezeichnungen (z und z^* sind zueinander konj. komplexe Größen)

$$\boxed{\begin{array}{l} c_0 = \frac{a_0}{2} \\ c_k = \frac{1}{2}(a_k - j b_k) \;;\; c_{-k} = c^* = \frac{1}{2}(a_k + j b_k) \\ k = 1, 2, \ldots \end{array}} \quad (2)$$

ergibt sich weiter

$$f(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{jkx} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} e^{-jkx}$$

Wegen $\sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} e^{-jkx} = \sum_{k=-1}^{-\infty} c_k e^{jkx}$

läßt sich dieser Ausdruck darstellen als zweiseitige Summe

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jkx}} \quad (3)$$

Die komplexe Fourier-Reihe (3) enthält komplexe Summanden. Paarweises Zusammenfassen d. Glieder $c_k e^{jkx}$ und $c_{-k} e^{-jkx}$ führt auf die gewohnte reelle Gestalt

$$c_{-k} e^{-jkx} + c_k e^{jkx} = c_k^* \left(e^{jkx}\right)^* + c_k e^{jkx} =$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\left\{ c_k e^{jkx} \right\} =$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\left\{ \frac{1}{2}(a_k - j b_k)(\cos kx + j \sin kx) \right\} =$$

$$= a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

Die komplexen Größen c_k $(k \in \mathbb{Z})$ aus (2) heißen **komplexe Fourier-Koeffizienten**. Aus c_k erhält man die reellen Fourier-Koeff.

$$\boxed{\begin{aligned} a_k &= 2\,\mathrm{Re}\{c_k\} = c_k + c_{-k}; \quad k = 0,1,2 \\ b_k &= -2\,\mathrm{Im}\{c_k\} = j(c_k - c_{-k}) \\ & \qquad k = 1,2,3,\ldots \end{aligned}} \qquad (3)$$

Bei symm. Fkten vereinfacht sich auch die komplexe Fourierreihe:

$f(t)$ gerade $\Longleftrightarrow$ reelle Cos-Reihe $\Longleftrightarrow$ c_k reell

$f(t)$ ung. $\Longleftrightarrow$ reelle Sin-Reihe $\Longleftrightarrow$ c_k rein imag.

<u>Direkte Ermittlung d. kompl. Fourier-Koeff.</u>

$$c_0 = \frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

$$c_k = \frac{1}{2}(a_k - j b_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\, dx$$

$$- \frac{j}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx\, dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left(\cos kx - j \sin kx\right) dx \underset{(1)}{=}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-jkx}\, dx$$

Satz Für jede 2π-per. Fkt. $f(x)$ erhält man die Fourier-Reihe in kompl. Form

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jkx}} \quad (4)$$

mit $$\boxed{c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-jkx}\, dx; \quad k \in \mathbb{Z}} \quad (5)$$

Mit d. Subst. $x := \omega t$
Dann folgt der

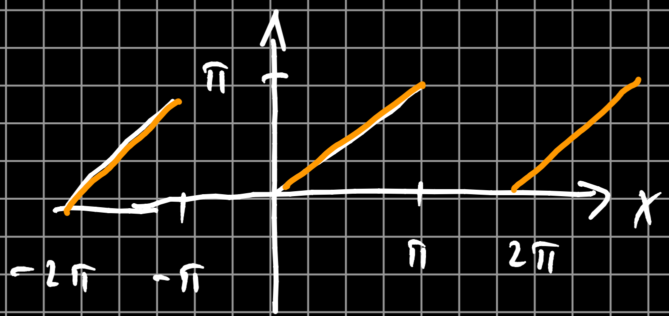
Satz Jede Schw. $f(t)$ mit Kreisfreq. ω und Schw.dauer $T = 2\pi/\omega$ lässt sich als konv. Reihe der Form

$$\boxed{f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega t}; \quad \omega = 2\pi/T} \quad (6)$$

mit den Koeff.

$$\boxed{c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt\,; \quad k \in \mathbb{Z}} \qquad (7)$$

Bsp.: $$f(x) = \begin{cases} 0 & : -\pi < x < 0 \\ x & : 0 < x < \pi \end{cases}$$



$$f(x + 2\pi) = f(x)$$

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} x\, dx = \frac{\pi}{4}$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} x\, e^{-jkx}\, dx = \frac{e^{-jkx}}{2\pi k^2} (jkx + 1) \Bigg|_{x=0}^{\pi}$$

$$= \frac{e^{-jkx}}{2\pi \cdot k^2} (jk\pi + 1) - \frac{1}{2\pi \cdot k^2}\,; \quad e^{-jk\pi} = (-1)^k$$

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2k} \cdot j & : k = 2, 4, \ldots \\ -\frac{1}{\pi k^2} - \frac{1}{2k} \cdot j & : k = 1, 3, \ldots \end{cases}$$

Die reellen Fourier-Koeff. erhält man aus (3):

$$a_0 = 2\,\mathrm{Re}\{c_0\} = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = 2\,\mathrm{Re}\{c_n\} = \begin{cases} 0 & : n = 2,4,6,\dots \\ -\frac{2}{\pi n^2} & : n = 1,3,5,\dots \end{cases}$$

$$b_n = -2\,\mathrm{Im}\{c_n\} = \begin{cases} -\frac{1}{n} & : n = 2,4,6,\dots \\ \frac{1}{n} & : n = 1,3,5,\dots \end{cases}$$

$$\Longrightarrow f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left(\cos x + \frac{1}{9}\cos 3x + \frac{1}{25}\cos 5x + \dots\right)$$

$$+ \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + - \dots$$

Prüfungsaufg. vom 12.12.2008

$$\dddot{y} - \ddot{y} + \dot{y} - \quad = 0$$

$$y = z_1$$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{y} \quad & \dot{z}_1 = z_2 \\ \ddot{y} = \quad & \dot{z}_2 = z_3 \\ \dddot{y} = \quad & \dot{z}_3 = z_1 - z_2 + z_3 \end{aligned}}$$

Normalform

$$\Rightarrow \quad \dot{\vec{z}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{=:A} \vec{z}$$

EW berechnen: $\quad |A - \lambda E| = 0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{Entw 1. Zeile}}{=}$$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda\left((-\lambda)(1-\lambda)+1\right) - (0-1)$$

$$= \lambda^2(1-\lambda) - \lambda + 1 = -\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\boxed{\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = 0}}_{=:\, p(\lambda) \text{ char. Pol (3. Grades)}}$$

$\underline{\text{z.z}}$ $\lambda_1 = 1$ ist ein EW.

$p(1) = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$ ✓

Horner:

	1	-1	1	-1
$\lambda_1 = 1$):	*	1	0	1
	1	0	1	0

$$\Rightarrow (\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1) : (\lambda - 1) = \lambda^2 + 1$$

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{2/3} = \pm j$$

EV zum EW $\lambda_1 = 1$:

$$(A - E)\vec{v} = \vec{0}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ |\cdot 1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$v_3 = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow v_2 = \alpha$$

$$\Rightarrow v_1 = \alpha$$

$$\vec{v}^{(1)} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ EV-Raum zum EW $\lambda_1 = 1$.

$$\underset{\alpha = 1}{\Rightarrow} \vec{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Suche kompl. EV zum EW $\lambda_2 = j$

$(A - jE)\vec{v} = \vec{0}$

$$\begin{array}{ccc|cl} -j & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & -j & 1 & 0 & \\ 1 & -1 & 1-j & 0 & | \cdot j \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|cl} -j & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & -j & 1 & 0 & | \cdot (-1-j) \\ 0 & 1-j & 1+j & 0 & | \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} -j & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -j & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{v_3 = \beta,\ \beta \in \mathbb{R}}$

$-j v_2 = -\beta \Rightarrow \boxed{v_2 = \frac{\beta}{j} = -j\beta}$

$-j v_1 - j\beta = 0 \Rightarrow \boxed{v_1 = -\beta}$

$\Rightarrow \tilde{\vec{v}} = \beta \begin{pmatrix} -1 \\ -j \\ 1 \end{pmatrix}$ Für $\beta = 1$: $\tilde{\vec{v}} = \begin{pmatrix} -1 \\ -j \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Lsg. vektor $\vec{y}^{(1)} = e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\tilde{\vec z} = e^{jt}\begin{pmatrix}-1\\-j\\1\end{pmatrix}$$

$$= (\cos t + j\sin t)\begin{pmatrix}-1\\-j\\1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-\cos t - j\sin t\\ \sin t - j\cos t\\ \cos t + j\sin t\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}-\cos t\\ \sin t\\ \cos t\end{pmatrix}}_{=:\vec y^{(2)}} + j\underbrace{\begin{pmatrix}-\sin t\\ -\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}}_{\vec y^{(3)}}$$

Aufspalten in Real- u. Im.-Teil

allg. Lsg

$$\boxed{\vec y(t) = C_1 e^t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix}-\cos t\\ \sin t\\ \cos t\end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix}-\sin t\\ -\cos t\\ \sin t\end{pmatrix} \quad \text{mit } C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}}$$

Bem.: Die Vektoren $\left\{ e^t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\cos t\\ \sin t\\ \cos t\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\sin t\\ -\cos t\\ \sin t\end{pmatrix} \right\}$ bilden ein F.S., denn

man verifiziert leicht, dass $\begin{vmatrix} e^t & -\cos t & -\sin t\\ e^t & \sin t & -\cos t\\ e^t & \cos t & \sin t \end{vmatrix} =$

$= e^t + e^t = e^{2t} \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$