Stoffplan:

- ▷ Gewöhnliche DGL (24 UE)
- ▷ Potenzreihen (10 UE)
- ▷ Fourierreihen (10 UE)

Wdh

Integralrechnung – Integrationstechniken

1. Partielle Integration

$$\boxed{\int u'v\,dx = uv - \int uv'\,dx}$$

Bsp.: $$\int \underbrace{x}_{v} \cdot \underbrace{e^x}_{u'} dx = e^x \cdot x - \int e^x \cdot 1\,dx$$

$$= xe^x - e^x + C$$

$$= e^x(x-1) + C$$

$$\int \underbrace{x}_{u'} \cdot \underbrace{\ln x}_{v}\,dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \int \frac{1}{2}x^{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{2}\int x \, dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C$$

2. Integration durch Substitution

$$\boxed{\begin{aligned} &\int f(x)\,dx = \int f(g(t))\, g'(t)\, dt \\ &\text{mit } x = g(t) \text{ und } \frac{dx}{dt} = g'(t), \\ &\text{d.h. } dx = g'(t)\, dt \end{aligned}}$$

Bsp.: $\int x e^{x^2} dx = \int \cancel{x} \cdot e^{z} \frac{dz}{2\cancel{x}} =$

$$\boxed{\begin{aligned} &z := x^2 \\ &\frac{dz}{dx} = 2x \\ &dx = \frac{dz}{2x} \end{aligned}}$$

$$= \frac{1}{2}\int e^z \, dz = \frac{1}{2} e^z + C =$$

$$\underset{R.S}{=} \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln|f(x)| + C}$$

z. B. $\int \tan x = -\int \frac{-\sin x}{\cos x} \, dx =$

$$= -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \frac{x}{1+x^2} \, dx = \frac{1}{2}\int \frac{2 \cdot x}{1+x^2} \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln|f(x)| + C$$

mit Leibniz-Symbolik

$y = f(x)$

$$\int \frac{\frac{dy}{\cancel{dx}}}{y}\,\cancel{dx} = \int \frac{dy}{y} = \ln|y| + C$$

$$\boxed{\int f(x)\, f'(x)\, dx = \frac{1}{2} f^2(x) + C}$$

In der Leibniz-Symbolik:

$y = f(x)$

$$\int y \frac{dy}{\cancel{dx}}\,\cancel{dx} = \int y\, dy = \frac{1}{2} y^2 + C$$

<u>Bsp.:</u> $\int \underbrace{\sin x}_{f} \cdot \underbrace{\cos x}_{f'}\, dx = \frac{1}{2} \sin^2(x) + C$

3. Integration durch PBZ

Bsp.: a) $$\int \frac{x}{(x-1)(x+2)}\,dx$$ ..ó

zwei einfache reelle NS

Ansatz lt. Tabelle:

$$\frac{x}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

Bestimme A, B z. B. mit K.V.

b) $$\int \frac{x}{(x-1)^2}\,dx$$ ..ó

doppelte reelle NS

Ansatz lt. Tabelle:

$$\frac{x}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2}$$

A, B durch K.V.

c) $$\int \frac{1}{x^2+2x+3}\,dx$$ ..ó

keine reelle Nenner-NS

$$= \int \frac{1}{\underbrace{x^2+2x+1}_{(x+1)^2} + 3 - 1}\, dx =$$

$$= \int \frac{dx}{(x+1)^2 + 2}$$

... $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$

$$= \int \frac{dx}{2\left[\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1\right]}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} =$$

$z := \frac{x+1}{\sqrt{2}}$

$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$dx = \sqrt{2}\, dz$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2} \int \frac{dz}{z^2+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan(z) + C$$

$$\underset{R.S.}{=} \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + C$$

Linear Substitution:

$a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0$

$$\boxed{\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C}$$

Bsp.:

$$\int (2x+1)^5\,dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}(2x+1)^6 + C$$

$$= \frac{1}{12}(2x+1)^6 + C$$

$$\int e^{ax+b}\,dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$$

$$\int \sin(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$$

1. Gewöhnliche Differentialgleichungen (DGL)

1.1 Einführung

Bsp. für das Auftreten von DGL:

Bsp. 1: **Temperaturausgleich**

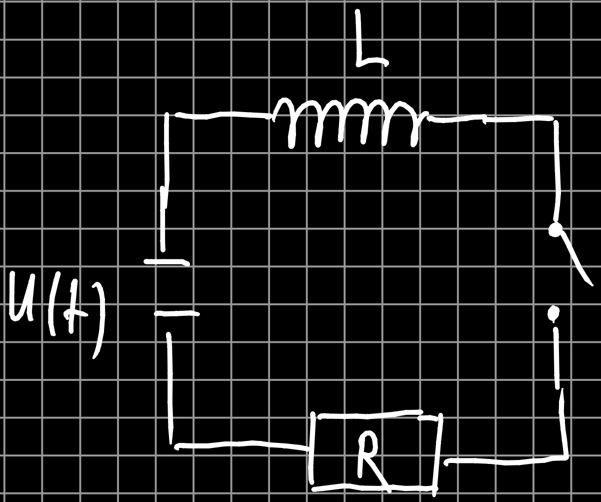
$y = y(t) \sim$ Temperatur d. Körpers z. Zt. t

$a \sim$ Umgebungstemperatur

$$\frac{dy}{dt} = \dot{y} = -k(y-a), \quad y(t_0) = y_0 > a$$

Newtonsches Abkühlungsgesetz

Bsp. 2: **Einschaltvorgang**



Stromkreis mit einem Ohmschen Widerstand R und einem induktiven Widerstand (Spule, Ind. koeff. L)

$t \sim$ Zeit

$U(t) \sim$ angelegte Spannung

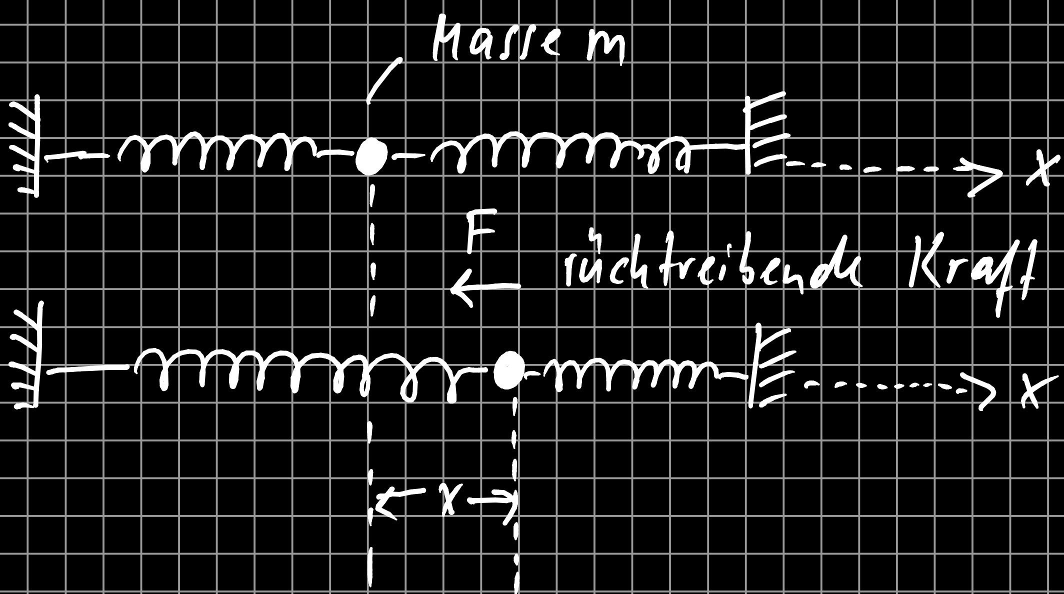
$I(t) \sim$ fließender Strom

$$\underbrace{L\frac{dI}{dt}}_{U_L} + \underbrace{R \cdot I}_{U_R} = U(t), \quad I(0) = 0$$

Kirchhoffsches Gesetz

$$\iff L\dot{I} + RI = U(t)$$

Bsp. 3: Ungedämpfte harmonische Schwingung



Federschwingung: Rücktreibende Kraft (F) ist prop. zur Auslenkung $(-x)$

$$F = m\ddot{x} = D(-x) \qquad D \sim \text{Federkonstante}$$

$$m\ddot{x} + Dx = 0$$

HOOKEsches-Gesetz

$$x(t_0) = x_0 \;, \quad \dot{x}(t_0) = v_0$$

Definition 1

Eine **Differentialgleichung** (DGL) ist eine Gl. zwischen einer abhängigen Veränd., ihren Differentialquotienten nach den unabh. Veränd. und diesen selbst.

gewöhnliche DGL: Es tritt nur eine unabh. Veränd. x auf, abh. Veränd. $y(x)$ = ges. Fkt.

allgemeine Form:

$$\left.\begin{aligned} &\text{implizit: } F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \\ &\text{explizit: } y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

partielle DGL: mehrere unabh. Veränd., z.B. x, y, z

$w(x, y, z)$ abh. Veränd. = ges. Fkt.

allg. Form:

$$F(x, y, z, w, w_x, w_y, w_z, w_{xx}, w_{xy}, \dots) = 0$$

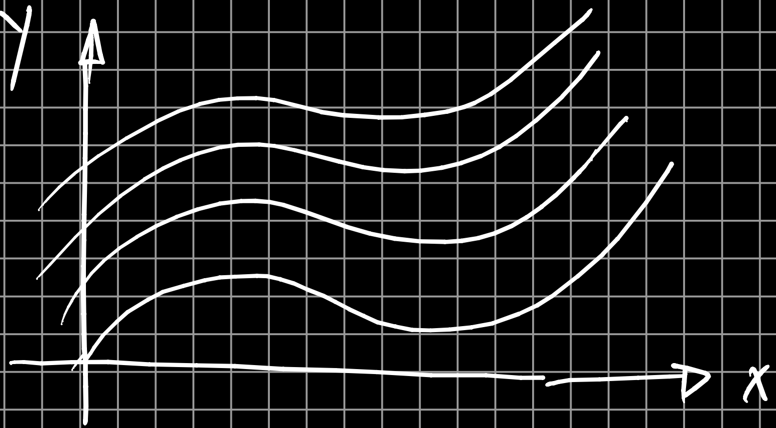
Ordnung einer DGL = Ordnung d. höchsten in d. DGL auftretenden Abl. d. ges. Fkt

Definition 2:

Jede Fkt $y = f(x)$, die in einem Intervall mind. n mal diff'bar ist, heißt Lösung (oder Integral) d. DGL in I, wenn sie, samt ihrer Abl. in (1) eingesetzt, diese Gleichung in I für alle x erfüllt.

Allgemeine Lsg der DGL: Lsg. mit n willkürlichen Konstanten, die sich nicht durch weniger Konstante ersetzen lassen.

Bsp.: Ist $F(x)$ eine Stammfkt von $f(x)$, so hat die "einfachste DGL" $y' = f(x)$ die allg. Lsg. $y = F(x) + C$ mit einer bel. Konstante



Bsp.: $m\ddot{x} + Dx = 0 \quad |:(m \neq 0)$

$$\ddot{x} + \underbrace{\frac{D}{m}}_{=:\omega^2} x = 0 \qquad \omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

allg. Lsg. $\quad x(t) = C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t)$

$$= A \cos(\omega t + \varphi)$$

Partikuläre Lsg. d. DGL: entsteht durch spezielle (feste) Wahl d. Konstanten.

Bsp.: (D) $y' = 2x \; ; \; y(0) = 1$

$$y = 2\int x \, dx = x^2 + C$$ allg. Lsg. von (D)

$$y(0) = C \overset{!}{=} 1 \Rightarrow C = 1$$

$$\Rightarrow y = x^2 + 1$$ part. Lsg. von (D)

singuläre Lsg. d. DGL:

Lsg., die nicht durch eine spezielle Wahl d. Konstanten aus d. allg. Lsg. erhältlich ist.

Bsp.: $F(x, y, y') = y'^2 - 4xy' + 4y = 0$

$$y = Cx - \frac{C^2}{4}$$ allg. Lsg

$C \sim$ frei wählbare Konstante

$$y = 2x - 1$$ part. Lsg. $(C = 2)$

$$y = x^2$$ singuläre Lsg.

Probe: $y' = 2x$

$$(2x)^2 - 4x \cdot \overbrace{2x}^{y'} + 4 \cdot x^2 =$$

$$4x^2 - 8x^2 + 4x^2 = 0 \checkmark$$

DGL und Kurvenscharen

▷ einparametrige Kurvenschar

$$y = \varphi(x, C) \qquad (1)$$

Scharparameter C

$$y' = \frac{d}{dx}\varphi(x, C) \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) C eliminieren

$$\Downarrow$$

$$F(x, y, y') = 0 \qquad \text{DGL d. Schar}$$

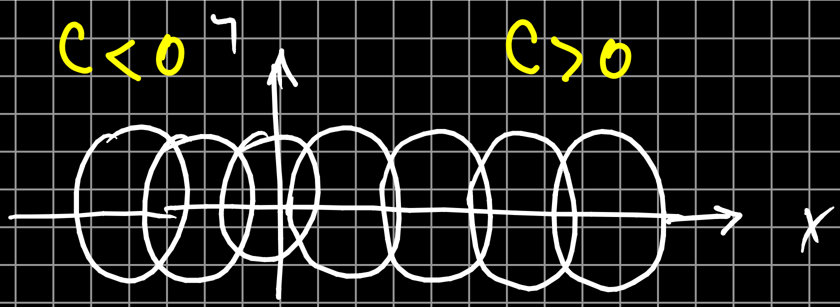
Bsp.: $(x-C)^2 + y^2 = 1 \quad (1)$ Kreisschar

$$\underset{\frac{d}{dx}}{\Longrightarrow} \quad 2(x-C) + 2y \cdot y' = 0$$

$$\Longrightarrow \quad x - C + yy' = 0$$

$$\Longrightarrow \quad C = x + yy' \quad (2)$$

$$\underset{(2) \text{ in } (1)}{\Longrightarrow} \quad y^2 y'^2 + y^2 = 1 \qquad \text{DGL d. Schar}$$



$$(x-c)^2+y^2=1 \qquad M(c|0)$$
$$r=1$$

1.2 Gewöhnliche DGL 1. Ordnung

1.2.1 Richtungsfeld, Existenz und Eindeutigkeit

$$y' = f(x,y)$$

f ordnet jedem Punkt (x,y) einen Anstieg $y' = f(x,y)$ zu

Definition:
(x_0, y_0, y_0') heißt **Linienelement** d. DGL $y' = f(x,y)$, wenn $y_0' = f(x_0, y_0)$.

Richtungsfeld := Gesamtheit d. Linienelemente

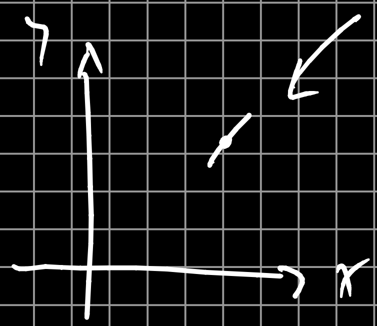
$f(x,y) = K \sim$ **Isoklinenschar** d. DGL

$y' = f(x,y)$

$K =$ Scharparameter

Bsp.:

$$y' = \frac{x}{y} = f(x,y)$$

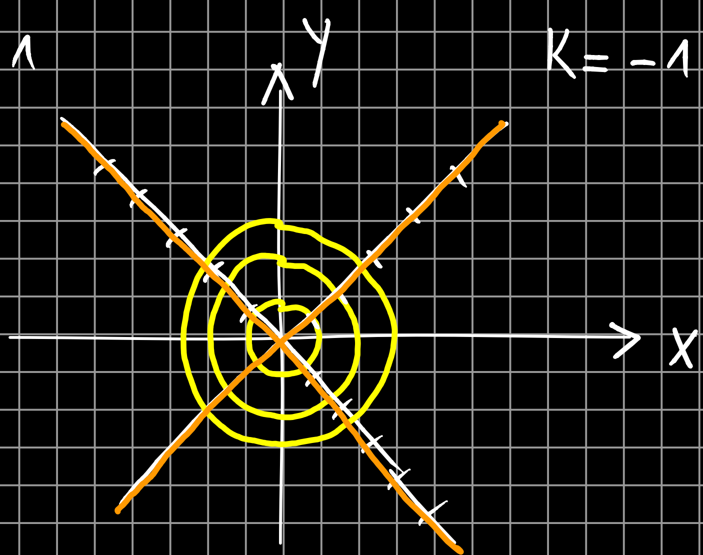


Linienelement
Punkt und Steigung

$$f(x,y) = -\frac{x}{y} = K$$

$$\Longrightarrow \quad y = -\frac{1}{K}x \qquad K \neq 0$$

$K=1$ $\qquad$ $K=-1$



Lsgen. sind konz. Kreise, um den Ursprung.