Beispiel:

$$f(x) = (1+x)^a \quad (a \in \mathbb{R}), \quad x_0 = 0$$

Binomische Reihe

$$f(x) = (1+x)^a \implies f(0) = 1$$

$$f'(x) = a(1+x)^{a-1} \implies f'(0) = a$$

$$f''(x) = a(a-1)(1+x)^{a-2} \implies f''(0) = a(a-1)$$

$$\vdots$$

$$f^{(k)}(x) = a(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-k+1)(1+x)^{k-1}$$

$$\Rightarrow f^{(k)}(0) = a(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-k+1)$$

Def.: $\binom{a}{k}$ (lies "a über k")

$$\binom{a}{k} := \frac{a(a-1)(a-2)\cdot\ldots\cdot(a-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k};$$

$$k = 1, 2, \ldots, \quad a \in \mathbb{R}; \quad \binom{a}{0} := 1$$

Mit den so definierten Binomialkoeff. ergeben sich d. Koeff. der MacLaurin-Reihe d. Fkt. $f(x) = (1+x)^a$ in der Form

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \binom{a}{k}; \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$\Longrightarrow$

Binomische Reihe

$$\boxed{(1+x)^a = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} x^k = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \dots \qquad r = 1}$$

1. Fall

Ist a $a = m \in \mathbb{N}$, so sind $\binom{m}{k}$ gewöhnliche Binomialkoeff. Wegen $\binom{m}{k} = 0$ für $k > m$, bricht die zugehörige Reihe nach d. Potenz x^m ab. die MacLaurin-Reihe liefert den binomischen Satz für $(1+x)^m$.

2. Fall

Ist a keine natürliche Zahl, so sind alle Koeff. $a_k = \binom{a}{k} \neq 0$; man erhält unendliche PR. Wichtig sind vor allem einfache rationale Zahlen $a = \frac{p}{q}$ und negative Zahlen $a = -1, -2, \dots$

$a = 1/2$

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 + - \dots \; ; \; r = 1$$

$a = -1$

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - + \dots$$

geom. Reihe

Weitere Anwendungen:

1. Faustformeln

Gesucht ist eine Faustformel für den Gesamtwiderstand zweier parallelgeschalteter Widerstände R_1 und R_2 im Falle $R_1 << R_2$.

Bekanntlich gilt $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$

geom. Reihe

$R_1/R_2 << 1 \Rightarrow$

$$\frac{R_1R_2}{R_1+R_2} = \frac{R_1}{1+\frac{R_1}{R_2}} = R_1\left[1 - \frac{R_1}{R_2} + \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3 + \dots\right]$$

$$\approx R_1\left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right)$$

<u>Bsp.:</u> $R_1 = 5\,\Omega$, $R_2 = 75\,\Omega \Rightarrow R_1/R_2 = 1/15$ und R ist also $14/15$ von R_1 oder aber R_1, um $R_1/15 = 5\,\Omega/15 = 0{,}33\,\Omega$ verringert:

$R = 4{,}67\,\Omega$.

2. Lösen von DGL mittels Potenzreihen

Ges. ist d. Anfang d. PR für d. Lsg d. AWP

$$(*) \quad y' = \frac{3 + 2x + y + 4xy + y^2}{2 + x + 3xy}\ ; \quad y(0) = 1$$

Betrachte $y(x) = y(0) + y'(0) + \frac{y''(0)}{2!}x^3 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \dots$

$$y'(0) = \frac{3+2\cdot 0 + y(0) + 4\cdot 0\cdot y(0) + y^2(0)}{2+0+3\cdot 0\cdot y(0)} = \frac{3}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad y'(2+x+3xy) = 3+2x+y+4xy+y^2 \qquad (*)$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dx}} \quad y''(2+x+3xy) + y'(1+3x+3xy') =$$
$$= 2+y'+4y+4xy'+2yy'$$

und $x=0$, $y(0)=0$, sowie $y'(0)=\frac{3}{2}$ eingesetzt:

$$y''(0)\cdot 2 + \frac{3}{2}\cdot 1 = 2 + \frac{3}{2} \Longrightarrow y''(0)=1$$

Nochmals abgeleitet:

$$y'''\cdot(2+x+3xy) + 2y''\cdot(1+3y+3xy') + y'\cdot(6y'+3xy'') =$$
$$= y''+8y'+4xy''+2y'^2+2y\cdot y''$$

und $x=0$, $y(0)$, $y'(0)=3/2$, sowie $y''(0)=1$

eingesetzt $\Longrightarrow y'''(0)=1$

$$\Longrightarrow \boxed{y(x) = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots = \frac{3}{2}x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots}$$

3. Kinetische Energie eines relativistischen Teilchens

Ein Teilchen habe d. Masse m. Nach Einstein hat es d. Gesamtenergie $E = mc^2$. Die Masse wiederum hängt von d. Geschw. v d. Teilchens ab, es gilt

$$\boxed{m = \frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}},$$

wobei m_0 die Ruhemasse ist. In Ruhe hat das Teilchen d. Energie $E_0 = m_0 c^2$. Die kinetische Energie ist d. Differenz $E_{kin} = E - E_0$. Da $v < c$ ist, wenden wir die Binomische Reihe.

$$(1+x)^a = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} x^k = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \\ + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \ldots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \left(1-(v/c)^2\right)^{-1/2} \xRightarrow[\substack{a = -1/2 \\ x = -(v/c)^2}]{}$$

$$\left(1-(v/c)^2\right)^{-1/2} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)(-1)\left(\frac{v}{c}\right)^2 + \frac{(-1/2)(-3/2)}{2!}\left(\frac{v}{c}\right)^4 + \ldots$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(\frac{v}{c}\right)^4 + \ldots$$

$$\Rightarrow E_{kin} = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - 1\right)$$

$$= m_0c^2\left(\frac{1}{2}(v/c)^2 + \frac{3}{8}(v/c)^4 + \dots\right)$$

$$= \frac{1}{2}m_0v^2 + \frac{3}{8}m_0v^2(v/c)^4 + \dots$$

die erste Korrektur zur klassischen kin. Energie

Und noch ein Beispiel...

<u>Bsp.:</u>

Berechne $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$ bis zur Potenz x^6.

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \dots \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + - \dots$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx \approx \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!}\right)dx$$

$$= x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \frac{x^7}{7\cdot 7!}\Bigg|_0^1 = 1 - \frac{1}{3\cdot 3!} + \frac{1}{5\cdot 5!} - \frac{1}{7\cdot 7!}$$

$$\underbrace{1-\frac{1}{3\cdot 3!}+\frac{1}{5\cdot 5!}-\frac{1}{7\cdot 7!}}_{\approx 0{,}94608} < \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx < \underbrace{1-\frac{1}{3\cdot 3!}+\frac{1}{5\cdot 5!}}_{\approx 0{,}94611}$$

Leibniz-Kriterium

$$|\text{Fehler}| < \left|-\frac{1}{7\cdot 7!}\right| \approx 0{,}00003$$

3. Fourierreihen

Frage: Ist d. Entwicklung eine unendl. Reihe auch nach anderen Fkten. als PR (Taylor-Entwicklung) möglich?
Es erscheint durchaus vorteilhaft, eine periodische Fkt. $f(x)$ in eine unendl. Reihe period. Fkten zu entwickeln.

$f(x+P) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Der kleinste derartige Wert P heißt **Periode** d. Fkt. $f(x)$.

z. B. $\sin(x) = \sin(x+2\pi) = \sin(x+4\pi)$
$= \ldots \Rightarrow P = 2\pi$.

Def.: $f(x)$ heißt in $[a,b]$ **stückweise stetig**, wenn $f(x)$ stetig ist bis auf endl. viele Sprungstellen. Char. Größen einer Sprungstelle x_0 sind die einseitigen GW

$f(x_0+)$ ... **rechtsseitiger GW**

$f(x_0-)$ ... linksseitiger GW

Def.: (Trig. Polynom)

Jede Fkt. $f_k(x) = a\cos kx + b\sin kx$
$= A\cos(kx+\varphi)$

stellt eine **harmonische** Schw. dar mit d.

Periode $P = \frac{2\pi}{k}$

Für Anw. wichtig sind Überlagerungen harm. Schw. d. Form

$$f_k(x) = a_k\cos kx + b_k\sin kx = A_k\cos(kx+\varphi_k) \quad (1)$$
$$k = 1, 2, \dots$$

Def.: Jede Überlagerung harm. Schwingungen d. Form (1) bez. man als trig. Polynom mit d. Grundperiode 2π.
Nimmt man als Absolutglied in d. Form $\frac{a_0}{2}$ hinzu, so erhält man das **trig. Polynom vom Grad n** in d. Form

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx) \quad (2)$$

3.1 Fourierreihen für 2π-per. Fkten.

Jede Fkt. $T_n(x)$ nach (2) stellt eine 2π-per. Fkt. dar. Umgekehrt stellt sich d. Frage, ob man bin vorg. per. Fkt. $f(x)$ durch derartige trig. Polynome mit hinreichend großem n genügend genau annähern kann.

Die Koeff. a_n, b_n d. trig. Polynoms $T_n(x)$ nach (2) sollen so bestimmt werden, dass das mittlere Fehlerquadrat möglichst klein wird

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x) - T_n(x)\right]^2 dx \overset{!}{=} \text{Minimum}$$

Aus dieser Forderung erhält man folgenden

Satz von Fourier

Jede in $-\pi < x < \pi$ def. stückweise stetige Fkt $f(x)$ von praktischer Bedeutung läßt sich darstellen als konvergente trig. Reihe d. Form

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right) \qquad (3)$$

Fourier-Koeff.

mit den Koeff.

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \; ; \; k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx \; ; \; k = 1, 2, 3, \ldots \qquad (4)$$

die Fourierreihe (3) konv. für jedes x gegen

a) $f(x)$ an jeder Stetigkeitsstelle

b) $\frac{1}{2}\left[f(x_0+) + f(x_0-)\right]$ an jeder Sprungstelle x_0.

Bsp.: $f(x) = |x|$ für $-\pi \le x \le \pi$

$$f(x+2\pi) = f(x)$$

$$\overset{(4)}{\Longrightarrow} \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos kx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \cos kx \, dx \, ;$$

$k = 0, 1, 2, \dots$

$$k = 0: \quad a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \, dx = \pi$$

$$k \neq 0: \quad a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \cos kx \, dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x \sin kx}{k} + \frac{\cos kx}{k^2}\right]_0^{\pi}$$

$$\Longrightarrow \quad a_k = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{k^2}\left(\cos k\pi - 1\right) = \frac{2}{\pi}\frac{1}{k^2}\left((-1)^k - 1\right)$$

d.h. $a_1 = -\frac{4}{\pi}$; $a_3 = -\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{9}$; $a_5 = -\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{25}$

$$a_2 = a_4 = a_6 = \dots = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \sin nx \, dx = 0 \qquad n = 1, 2, \dots$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[\cos x + \frac{1}{9} \cos 3x + \frac{1}{25} \cos 5x + \dots \right]$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(2r+1)^2} \cos\left[(2r+1)x\right]$$

3.2 Fourierreihen für Schwingungen mit $T = 2\pi/\omega$

Durch geeignete Subst. lassen sich d. Formeln (3), (4) für 2π-per. Fktn. $f(x)$ übertragen auf zeitabh. Fktn. $f(t)$ mit d. Schw.dauer $T = 2\pi/\omega$.

$$x := \omega t \Rightarrow dx = \omega \, dt$$

$$-\pi < x < \pi \Rightarrow -\frac{T}{2} = -\frac{\pi}{\omega} < t < \frac{\pi}{\omega} = \frac{T}{2}$$

und die 2π-per. Fkt. $f(x)$ in eine T-per. Fkt. $\hat{f}(t)$. $f(x)$ mit $f(x + 2\pi) = f(x)$

$$\Rightarrow f(x(t)) = \hat{f}(t) \text{ mit } \hat{f}(t + T) = \hat{f}(t)$$

Daraus folgt der folgende

Satz Jede Schw. mit Kreisfreq ω und Schw.dauer $T = 2\pi/\omega$ läßt sich darstellen als konv. trig. Reihe d. Form

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right] \tag{5}$$

mit den Koeff.

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega t)\, dt; \quad n = 0,1,2,\dots$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega t)\, dt; \quad n = 1,2,\dots \tag{6}$$

Diese Reihe konv. gegen $f(t)$ an jeder Stetigkeitsstelle und gegen d. arithm. Mittel von links- und rechtss. GW. an jeder Sprungstelle.

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right]$$

$\frac{a_0}{2}$ ... Mittelwert

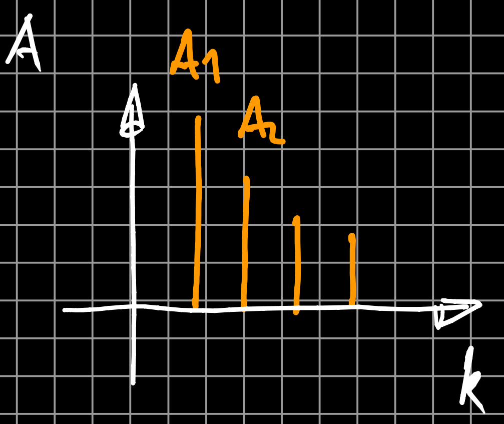
$A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) = a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t)$ ... 1. Harmonische

$A_2 \cos(2\omega t + \varphi_2) = a_2 \cos(2\omega t) + b_2 \sin(2\omega t)$ ... 2. Harmonische

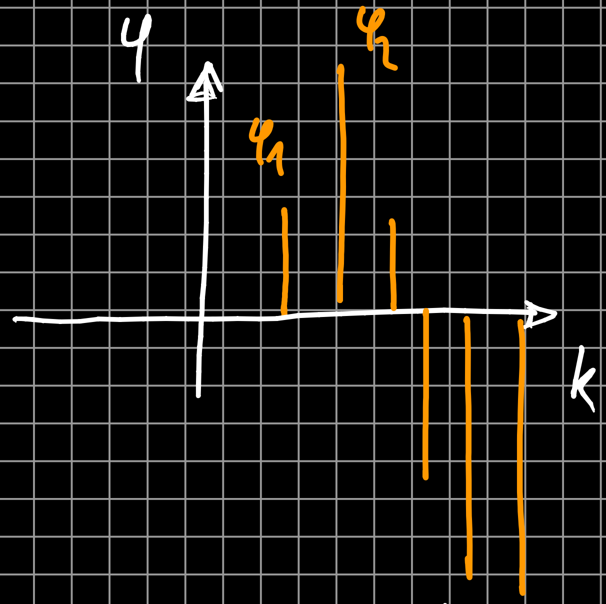
$\vdots$ $\qquad\qquad$ $\vdots$

1. Harmonische – Grundschwingung

höhere Harmonische – Oberschwingungen



Ampitudenspektrum



Phasenspektrum

3.3 Vereinfachungen bei d. Berechnung d. Fourierreihen

Für gerade Fkten, d.h. $f(t) = f(-t)$ ergibt sich eine reine Cosinus-Reihe

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(\omega t)$$

mit $$a_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos(k\omega t)\, dt \; ; \; k = 0, 1, 2, \ldots$$

Für ung. Fkten $f(t)$, d.h. $f(-t) = -f(t)$ ergibt sich eine reine Sinus-Reihe

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega t)$$

mit $$b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin(k\omega t)\, dt \; ; \; k = 1, 2, 3, \ldots$$