III. Exponentialfktn. und Hyperbelfktn.

III.1 Grundlagen

Potenzgesetze:

① $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

② $a^n : a^m = a^{n-m}$

③ $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

④ $a^n : b^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

⑤ $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

Exponentialfktn.

Fktn. f_a mit $f_a(x) = a^x$,

wobei $a \in \mathbb{R}^+$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt, nennen wir Exponentialfktn.

III.2 Ableitungen d. Exp fktn.

1.) $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$

2.) $g(x)$ diff'bare Fkt.; $f(x) = e^{g(x)}$

$\Rightarrow f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x)$

3.) $f_a(x) = a^x$ mit $a > 0$

$\Rightarrow f_a'(x) = \ln a \; e^{x \ln a} = \ln a \cdot a^x$

$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \ln a}$

Z.z.: $f_a(x) = a^x \Rightarrow f_a'(x) = \ln a \cdot a^x$

h-Methode:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{a^{x+h}-a^x}{h} = a^x\,\frac{a^h-1}{h}$$

Grenzübergang: $\lim\limits_{h\to 0}\left(a^x\cdot\frac{a^h-1}{h}\right) = a^x \underbrace{\lim\limits_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}}_{\text{GW } a_g}$

Existiert d. GW a_g, so erhalten wir für d Abl

$$a^x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h} = a^x\cdot a_g = f_a'(x)$$

$$\frac{a^h-1}{h} = \frac{e^{h\ln a}-1}{h}$$

$$z := e^{h\ln a}-1 \Longleftrightarrow e^{h\ln a} = 1+z$$

$$\xRightarrow[\ln]{} h\ln a = \ln(1+z)$$

$$\Rightarrow \frac{e^{h\ln a}-1}{h} = \frac{z}{\frac{\ln(1+z)}{\ln a}} = \frac{(\ln a)\cdot z}{\ln(1+z)} = \ln a\cdot\frac{1}{\frac{\ln(1+z)}{z}}$$

$$\xRightarrow[\lim]{} \lim_{h\to 0}\frac{e^{h\ln a}-1}{h} = \ln a\cdot\frac{1}{\lim\limits_{z\to 0}\frac{\ln(1+z)}{z}}$$

$h\to 0 \Rightarrow z\to 0$

Zur Berechnung d. GW $\lim\limits_{z\to 0} \frac{\ln(1+z)}{z}$ setzen

wir nun $z := \frac{1}{n}$

$$\Rightarrow \lim_{z\to 0} \frac{\ln(1+z)}{z} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \ln\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{e}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n =: e$$

$$= \ln\Big\{\underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{e}\Big\} =$$

$$= \ln e = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{e^{h\ln a}-1}{h} = \ln a \cdot \frac{1}{1} = \ln a = a_g$$

oder $\lim\limits_{h\to 0} \frac{a^h-1}{h} = \ln a = a_g$ $\square$

$$\Rightarrow y = a^x \Rightarrow y' = a^x \cdot \ln a$$

Für $a = e \Rightarrow y = e^x \Rightarrow y' = e^x$

Wichtiger GW:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x \quad \forall x\in\mathbb{R}}$$

Bsp.: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\cancel{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\cancel{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)}\right)^n =$

$$\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{e}{e^{-1}} = e^2$$

III. 3 Wachstum

III. 3.1 Lineares Wachstum

Eine erste Differentialgleichung (DGL) (siehe Kap. V): $f'(t) = m = \text{const.}$

$$\overset{}{\underset{\int}{\Longrightarrow}} \quad f(t) = m \cdot t + \underbrace{C}_{\text{Anfangsbestand}} \quad \text{und } m, C \in \mathbb{R}$$

siehe Kap IV

$$C = f(0)$$

III. 3.2 Exponentielles / Natürliches W.

Bestand zum Zeitpkt t: $f(t)$

Δt ⋮ warten

Neuer Bestand: $f(t + \Delta t)$

Der Zuwachs beträgt somit $f(t+\Delta t)-f(t)$

$\sim f(t)$ und

$\sim \Delta t$

Die Proportionalität ermöglicht folgenden Ansatz:

$$f(t+\Delta t)-f(t) = k\cdot\Delta t\cdot f(t)$$

$$\Rightarrow \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t} = k\cdot f(t) \quad \Big| \ \Delta t \to 0$$

$$\Rightarrow f'(t) = k\cdot f(t)$$

Aus III. 2 ist nun bekannt, dass

$$h(t) = a\cdot e^{g(t)} \Rightarrow h'(t) = a\cdot g'(t)\, e^{g(t)} = g'(t)\cdot h(t)$$

Durch Vergleich folgt:

$$g'(t) = k \underset{\int}{\Longrightarrow} g(t) = k\cdot t + C$$

Natürliches oder exp. W.

Ein Wachstum nennen wir exponentiell oder natürlich, wenn eine Fkt f die DGL

$$f'(t) = k\cdot f(t) \quad \text{erfüllt.}$$

Dabei nennen wir $k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ die Wachstumskonst. für $k>0$ oder Zerfallskonst. für $k<0$.

Die die DGL lösenden Fkten heißen demnach

Wachstums- oder Zerfallfkt. Dies sind Fkten. f mit

$$f(t) = a e^{kt}$$

Das $a \in \mathbb{R}$ repräsentiert den Fkt.wert zum Zeitpkt $t=0$, denn $f(0) = a e^{k \cdot 0} = a e^{0} = a$

Nimmt d. Bestand pro Zeitschritt um $p\,\%$ zu / ab, so gilt

$$k = \ln\left(1 \pm \frac{p}{100}\right)$$

III. 3.3 Beschränktes Wachstum

Beschr. W. kann d. DGL $f'(t) = k(S - f(t))$ mit $k > 0$ gehorchen. Dabei ist S die Schranke oder Grenze, der sich d. Bestand $f(t)$ für $t \to \infty$ annähert. Die Fkt. f mit

$$f(t) = S - a e^{-kt}$$

ist die zugehörige Wachstumsfkt. und löst die DGL.

III. 3.4 Logistisches W.

DGL: $f'(t) = k \cdot \boxed{f(t)} \cdot (S - B(t))$

$$\Rightarrow \quad f(t) = \frac{a \cdot S}{a + (S-a)\, e^{-k \cdot S \cdot t}} \quad \text{mit } a = f(0)$$