(61) **Satz: Überlagerungssatz**
("Hauptsatz", Superpositionsprinzip)

Ist $y_i(x)$ irgendeine Lsg. d. inh. Gl. $L[y]=f$, so liefert $y_i(x)+y_h(x)$ genau d. sämtlichen Lsgen d. inh Gl. $L[y]=f$, wenn $y_h(x)$ alle Lsgen d. hom. Gl. $L[y]=0$ durchläuft.

$$\left\{\begin{matrix}\text{Allg. Lsg} \\ \text{inhomogen}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\text{Allg. Lsg} \\ \text{homogen}\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\text{Spez. Lsg.} \\ \text{inhomogen}\end{matrix}\right\}$$

1.5.2 Lineare Abhängigkeit von Fktn, Wronski – Determinante, Fundamentalsystem (FS)

Geg. $\varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x)$

Def: Gilt $C_1\varphi_1 + \dots C_k\varphi_k \equiv 0$ im Intervall (a,b) mit $(C_1, \dots, C_k) \neq (0, \dots, 0)$, so heißen $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ **linear abhängig (l.a.)** im Intervall (a,b)

Folgt aus $C_1\varphi_1 + \dots + C_k\varphi_k \equiv 0$ in (a,b), dass $C_1 = C_2 = \dots = C_k = 0$, so heißen $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ **linear unabhängig (l.u.)** in (a,b).

Beispiele:

1.) $1, \sin^2 x, \cos^2 x$; $1 - \sin^2 x = \cos^2 x \equiv \quad \forall x$

$c_1 = 1, \; c_2 = -1, \; c_3 = -1$

$1 \cdot 1 - \sin^2 x - \cos^2 x \equiv 0$

$\Rightarrow$ die Fktn. $1, \sin^2 x, \cos^2 x$ sind l. a. in $(-\infty, \infty)$

2.) $1, x, x^2, \dots, x^m$ l. u. in jedem Intervall (a,b)

denn: $c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \dots + c_{m+1} x^m \equiv 0$ in (a,b)

$\Rightarrow$ Polynom mit ∞ vielen NS in (a,b),

F.S. d. Algebra $\Rightarrow c_1 = c_2 = \dots = c_{m+1} = 0$

3.) $1, \cos 2x, \sin^2 x$ l. a. :

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$

Wie lässt sich lineare Abh./Unabh. feststellen?

Die Fktn $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ seien $(n-1)$-mal diff'bar und es gelte

$c_1 \varphi_1 + \dots + c_n \varphi_n = 0$

Durch Differenzieren erhält man

$c_1 \varphi_1' + c_2 \varphi_2' + \dots + c_n \varphi_n' = 0$

$c_1 \varphi_1'' + c_2 \cdot \varphi_2'' + \dots + c_n \varphi_n'' = 0$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

$$c_1 \varphi_1^{(n-1)} + c_2 \varphi_2^{(n-1)} \dots + c_n \varphi_n^{(n-1)} = 0$$

Homogenes LGS

Koeff.-determinante

$$\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_n \\ \varphi_1' & \varphi_2' & \dots & \varphi_n' \\ \vdots & & & \\ \varphi_1^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & \dots & \varphi_n^{(n-1)} \end{vmatrix} =: W\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} =: W(x)$$

Wronski Determinante

Sind nun $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ l.a. in $(a,b) \Rightarrow$
Es gibt eine nichttriviale Lsg. $c_1, \dots, c_n \Rightarrow$
$W \equiv 0$ in (a,b).

Gilt andererseits $W(x_0) \neq 0$ für ein $x_0 \in (a,b)$, so folgt $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ und $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ l.u..

Man kann zeigen:

Sind nun $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ nicht irgendwelche diff'bare Fkten, sondern Lsgen von $L[y] = 0$, so kann man zeigen:

$$\boxed{\begin{array}{l} y_1(x),\dots,y_n(x) \text{ l.a.} \iff \forall x\in(a,b): W(x)\equiv 0 \\ y_1(x),\dots,y_n(x) \text{ l.u.} \iff \exists x_0\in(a,b): W(x_0)\neq 0 \end{array}}$$

Def.:

Ein System von n l.u. Lsgen d DGL $L[y]=0$ heißt **Fundamentalsystem (FS)** von $L[y]$.

Satz:

1. Es gibt stets ein FS d. hom. DGL $L[y]=0$.
2. Ist $y_1(x),\dots,y_n(x)$ ein FS und $y=\varphi(x)$ irgendeine Lsg. von $L[y]=0 \Longrightarrow$ $\varphi(x)\equiv K_1y_1(x),\dots,K_ny_n(x)$ mit gewissen Konst. $K_1,\dots,K_n$.

Folgerung 1:

Ist $y_1,\dots,y_n$ ein FS, so ist $y=C_1y_1+\dots+C_ny_n$ d. allg. Lsg. von $L[y]=0$.

Folgerung 2:
Die Lsgen d. hom. DGL $L[y]=0$ bilden einen (reellen) Vektorraum d. Dimension n.
Jedes FS ist eine Basis dieses Vektorraumes.

1.5.3 Homogene lin. DGLen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Geg.:
$$L[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$
$a_1, \dots, a_n$ konstant

Bsp.: Schwingungsgl.: $\ddot{x} + \frac{D}{m} x = 0$

Ziel: Bestimmung eines FS

Ansatz: $y = e^{\lambda x}$

λ soll so bestimmt werden, dass erfl. $L[e^{\lambda x}] = 0$.

λ zunächst unbestimmte Konstante.

$L[e^{\lambda x}]$:
$$y = e^{\lambda x}$$
$$y' = \lambda e^{\lambda x}$$
$$y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}$$

$$L[e^{\lambda x}] = \lambda^n e^{\lambda x} + a_1 \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + \dots + \lambda a_{n-1} e^{\lambda x} + a_n e^{\lambda x}$$

$$\equiv e^{\lambda x} \cdot g_n(\lambda), \text{ wobei}$$

$$g_n(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

$g_n(\lambda) \sim$ Charakteristisches Polynom

d. hom. DGL $L[y] = 0$

$e^{\lambda x} \neq 0 \ \forall x \Rightarrow g_n(\lambda) = 0$ alg. Gl. n-ten Grades

Fund.satz d. Algebra

$\exists$ Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_k$: $g_n(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\mu_1} (\lambda - \lambda_2)^{\mu_2} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_k)^{\mu_k}$

λ_i NS mit Vielfachheit μ_i $\left(\sum_{i=1}^{k} \mu_i = n \right)$

$\Rightarrow e^{\lambda_i x}$ ist eine spez. Lsg von

$L[y] = 0, \quad i = 1, \dots, k$

1. Fall: $g_n(\lambda)$ besitzt n einfache NS $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

$\Rightarrow y_1 := e^{\lambda_1 x}, y_2 := e^{\lambda_2 x}, \dots, y_n = e^{\lambda_n x}$ sind

n versch. Lsgen.

einfache reelle NS

Es gilt $W\{e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x}\} \neq 0$

$\Rightarrow \{y_1, \dots, y_n\}$ ist FS

$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}$ allg. Lsg.

Alle λ_i reell $\Rightarrow y$ reell

Wenn komplexe NS auftreten, so immer in konjugiert komplexen Paaren.

einfache komplexe NS

Sei etwa $\lambda_1 = \alpha + j\beta$

$\lambda_2 = \alpha - j\beta = \overline{\lambda_1}$

Es gilt:

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{(\alpha + j\beta)x} = e^{\alpha x} e^{j\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + j \sin\beta x)$$

$$= e^{\alpha x}\cos\beta x + j e^{\alpha x}\sin\beta x$$

$$=: z_1 + j z_2$$

$$y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{(\alpha - j\beta)x} = e^{\alpha x}\cos\beta x - j e^{\alpha x}\sin\beta x =: z_1 - j z_2$$

$$z_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2), \quad z_2 = \frac{1}{2j}(y_1 - y_2)$$

▷ $z_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ und $z_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$ sind Lsgen von $L[y] = 0$

$$L[z_1] = L\left[\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2\right] = \frac{1}{2}\underbrace{L[y_1]}_{=0} + \frac{1}{2}\underbrace{L[y_2]}_{=0} = 0$$

$$L[z_2] = L\left[\frac{1}{2j}y_1 - \frac{1}{2j}y_2\right] = \frac{1}{2j}\underbrace{L[y_1]}_{=0} - \frac{1}{2j}\underbrace{L[y_2]}_{=0} = 0$$

▷ $\{z_1, z_2, y_3, \dots, y_n\}$ ist FS

mit $W\{y_1, \dots, y_n\} \neq 0 \Longrightarrow W\{z_1, z_1, y_3, \dots, y_n\}$

Das ergibt folg. Rezept:

Bei kompl. NS $\lambda_{1/2} = \alpha \pm j\beta$ kann man die beiden kompl. wertigen Fkten $e^{(\alpha + j\beta)x}$, $e^{(\alpha - j\beta)x}$ durch Fkten. $e^{\alpha x}\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$ ersetzen und bleibt so im Reellen.

Beispiel 1: $\quad y'' - y = 0$

Ansatz: $y = e^{\lambda x}$, $y' = \lambda e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$

$$\Rightarrow \underbrace{e^{\lambda x}}_{\neq 0} \underbrace{[\lambda^2 - 1]}_{g(\lambda) \sim \text{cha. Polynom}} = 0$$

$$g(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = \pm 1$$

$$\Rightarrow y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{x}$$
$$y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{-x}$$
FS

$$\Rightarrow \boxed{y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}}$$ allg. Lsg.

Beispiel 2: $y'' + \omega^2 y = 0$
(harm. Oszillator, $\omega > 0$)

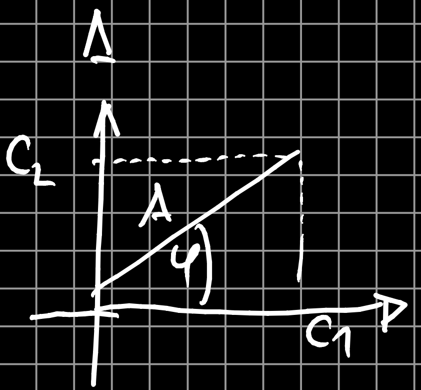
$$y = e^{\lambda x} \Rightarrow \lambda^2 + \omega^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = \pm j\omega$$

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= e^{\lambda_1 x} = e^{j\omega x} = \cos(\omega x) + j\sin(\omega x) \\ y_2 &= e^{\lambda_2 x} = e^{-j\omega x} = \cos(\omega x) - j\sin(\omega x) \end{aligned}\right\} \text{FS}$$

bzw. Übergang zu reellem FS:

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= \cos(\omega x) \\ z_2 &= \sin(\omega x) \end{aligned}\right\} \text{FS}$$

$$\boxed{y = C_1 \sin(\omega x) + C_2 \cos(\omega x)} \quad \text{allg. Lsg.}$$



oder:

$$A := \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \qquad \tan\varphi = \frac{C_2}{C_1} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} C_1 = A\cos\varphi \\ C_2 = A\sin\varphi \end{array}$$

$$y = (A\cos\varphi)\sin(\omega x) + (A\sin\varphi)\cos(\omega x)$$

$$\underset{\text{Add.-theorem}}{\Longrightarrow} \quad \boxed{y = \sin(\omega x + \varphi)} \quad \text{allg. Lsg.}$$

Beispiel 3: $y'' + 3y' - 10y = 0$

$$y = e^{\lambda x} \Longrightarrow \underbrace{\lambda^2 + 3\lambda - 10}_{= g(\lambda) \,\sim\, \text{cha. Pol.}} = 0$$

$$\Longrightarrow \lambda_1 = 2, \; \lambda_2 = -5$$

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = e^{2x} \\ y_2 = e^{-5x} \end{array}\right\} \text{FS}$$

$$\boxed{y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-5x}}$$ allg. Lsg.

Beispiel 4: $y''' - 7y' + 6y = 0$

$y = e^{\lambda x} \Longrightarrow \lambda^3 - 7\lambda + 6 = 0$

$\lambda = 1$ ist NS (raten!)

Horner Schema:

	1	0	−7	6
$\lambda = 1$:	$\cancel{1}$	1	1	6
	1	1	−6	0

$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$

$\Longrightarrow \lambda_2 = 2$

$\lambda_3 = -3$

$$\boxed{y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-3x}}$$ allg. Lsg.

2. Fall: Das char. Pol. $g(\lambda)$ besitzt mehrfache NS

$$g(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\mu_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_k)^{\mu_k}, \quad \sum_{i=1}^{k} \mu_i = n, \quad k < n$$

Sei etwa λ_1 eine μ-fache NS mit $\mu > 1$.

Dann sind $e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, x^2 e^{\lambda_1 x}, \dots, x^{\mu-1} e^{\lambda_1 x}$

μ verschiedene Lsgen von $L[y] = 0$.

mehrfache reelle NS

Bilanz:

Für d. NS $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ mit den Vielfachheiten $\mu_1, \dots, \mu_k$ ergeben sich d. Lsgen:

$$\underbrace{e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, \dots, x^{\mu_1 - 1} e^{\lambda_1 x}}_{\mu_1\text{-Funktion}}, \dots, \underbrace{e^{\lambda_k x}, xe^{\lambda_k x}, \dots, x^{\mu_k - 1} e^{\lambda_k x}}_{\mu_k\text{-Funktion}}$$

Das sind insgesamt $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_k = n$ Lsgen

Beweisbar:

Diese n Lsgen bilden ein FS.

Ist $\lambda = \alpha + j\beta$ eine kompl. NS $(\beta \neq 0)$ von $g(\lambda)$, so ist auch $\alpha - j\beta$ NS von g.

mehrfache komplexe NS

Die beiden kompl. Lsgen

$$x^r e^{(\alpha + j\beta)x}, \quad x^r e^{(\alpha - j\beta)x}$$

sind dann durch d. reellen Lsgen

$$x^r e^{\alpha x}\cos(\beta x),\quad x^r e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

ersetzbar.

$$\Downarrow$$

> Die lin. hom. Dgl $L[y]=0$ mit konst. Koeff. besitzt stets ein elementar angebbares Fundamentalsystem.

Beispiel 5: $y^{(4)}+y'''-3y''-5y'-2y=0$

$y=e^{\lambda x}$: $\lambda^4+\lambda^3-3\lambda^2-5\lambda-2=0$

Horner:

	1	1	−3	−5	−2
$\lambda=-1$		−1	0	3	2
	1	0	−3	−2	$\boxed{0}$
$\lambda=-1$		−1	1	2	
	1	−1	−2	$\boxed{0}$	
$\lambda=-1$		−1	2		
	1	−2	$\boxed{0}$		

also $\left(\lambda^4+\lambda^3-3\lambda^2-5\lambda-2\right) = (\lambda+1)^3(\lambda-2)$

FS: $\left\{\underbrace{e^{-x},\ xe^{-x},\ x^2e^{-x}}_{\text{da } \lambda=-1 \text{ 3-fache NS}},\ e^{2x}\right\}$

$$\boxed{y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 x^2 e^{-x} + C_4 e^{2x}}$$ allg. Lsg.

Beispiel 6: $y^{(5)} - 2y^{(4)} + 2y''' - 4y'' + y' - 2y = 0$

$y = e^{\lambda x} \Rightarrow g(\lambda) \sim$ char. Pol.

$$g(\lambda) = \lambda^5 - 2\lambda^4 + 2\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda - 2$$
$$= (\lambda-2)(\lambda^2+1)^2$$

NS: $2, j, j, -j, -j$

FS: $\left\{e^{2x}, e^{jx}, xe^{jx}, e^{-jx}, xe^{-jx}\right\}$

oder: $\left\{e^{2x}, \cos x, \sin x, x\cos x, x\sin x\right\}$

$$\boxed{y = C_1 e^{2x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x + C_4 x \cos x + C_5 x \sin x}$$

allg. Lsg.

HA.: Brücken, Bd. 6, S. 85/86

A 8 – A 10