I. Folgen und Reihen

Grundsätzliche Spielregeln:

- Spielregel 1:
  ▷ natürliche Zahlen **mit** d. Null
  $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}$
  ▷ natürliche Zahlen **ohne** d. Null
  $\mathbb{N}_{>0} := \{1, 2, 3, \dots\}$

- Spielregel 2: Indices
  Buchstaben n, i, j, k bez. ausschließlich nat. Zahlen

- Spielregel 3: Folgen und Folgenglieder
  ▷ (a_n) ... Zahlenfolge als Ganzes
  ▷ a_n ... n-tes Folgenglied von (a_n)

I.1.1 Darstellungsformen von Folgen

① **rekursive Darstellung**: Aktuelles Folgenglied wird durch eine Kombination d. vorangegangenen Folgenglieder angegeben.

Bsp.: $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ Startwerte

Bildungsgesetz: $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ mit $n \in \mathbb{N}_{>0}$

Daher	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	...
	0	1	1	2	3	5	... „Fibonacci-Folge"

② explizite Darstellung:

z.B. (a_n) mit $a_n = \frac{1}{n}$ $n \in \mathbb{N}_{>0}$

$n \mapsto a_n = a(n)$ ... Fkt. von n

$5 \mapsto \frac{1}{5} = a_5$

I.1.2 Monotonie bei Folgen

Def.:

(a_n) mon. ↑ $:\Longleftrightarrow a_{n+1} \geq a_n \ \forall n$

(a_n) mon. ↓ $:\Longleftrightarrow a_{n+1} \leq a_n \ \forall n$

(a_n) streng mon. st. $:\Longleftrightarrow a_{n+1} > a_n \ \forall n$

(a_n) streng mon. fallend $:\Longleftrightarrow a_{n+1} < a_n \ \forall n$

I.1.3 Nachweis d. Monotonie

① Differenzenkriterium: (DK)

$a_{n+1} - a_n > 0 \ \forall n \Longrightarrow (a_n)$ str mon. ↑

$a_{n+1} - a_n < 0 \ \forall n \Longrightarrow (a_n)$ str mon ↓

② Quotientenkriterium: (QK)

$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \ \forall n \Longrightarrow (a_n)$ str. mon ↑

$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \ \forall n \Longrightarrow (a_n)$ str. mon ↓

Bsp.: ggb. (a_n) mit $a_n = \frac{1-2n}{n}$

$$= \frac{1}{n} - 2$$

DK: $$a_{n+1} - a_n = \left(-2 + \frac{1}{n+1}\right) - \left(-2 + \frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$

$$= \frac{n-(n+1)}{n\cdot(n+1)} = -\frac{1}{\underbrace{n}_{>0}\underbrace{(n+1)}_{>0}} < 0$$

$\Rightarrow (a_n)$ str. mon $\downarrow$.

I.1.4 Beschränktheit

Def.: (a_n) nach oben beschr. $:\Leftrightarrow \exists S \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq S$

(a_n) nach unten beschr. $:\Leftrightarrow \exists s \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}: a_n \geq s$

Bsp.: (a_n) mit $a_n = \frac{1}{n}$: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$

$$\underbrace{0}_{=s} < a_n \leq \underbrace{1}_{=S}$$

$S \ldots$ obere Schranke

$s \ldots$ untere Schranke

I.2 GW einer Folge

I.2.1 Def. d. GW's

Def.: Eine Zahl g heißt GW von (a_n), wenn bei Vorgabe irgendeines bel., positiven ε fast alle Folgenglieder d. Ungleichung $|a_n - g| < \varepsilon$ erfüllen.

Bsp.: (a_n) mit $a_n = \frac{n + (-1)^n}{4n}$ mit $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

$$= \frac{1}{4} + \frac{(-1)^n}{4n}$$

GW: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{4} + \cancel{\frac{(-1)^n}{4n}}^{\,0}\right) = \frac{1}{4}$

Nachweis $g = \frac{1}{4}$ ist d. GW:

$$|a_n - g| = \left|\frac{1}{4} + \frac{(-1)^n}{4n} - \frac{1}{4}\right| = \left|\frac{(-1)^n}{4n}\right| = \boxed{\frac{1}{4n} < \varepsilon}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{4\varepsilon} \quad (n(\varepsilon))$$

n als Fkt. von ε

z. B. Sei $\varepsilon = \frac{1}{1000} \Rightarrow n > \frac{1}{4/1000} = 250$

Nummer, ab der d. Ungl. gilt.

I.2.2 Zwei Sätze und ein paar Grundbegriffe

Satz 1: Eine Folge kann höchstens einen GW haben.

Satz 2: (a_n) mon. u. beschr. $\Longrightarrow$ (a_n) konvergent, sie hat einen GW

Begriffe

- zur Notation: $g = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$
- Eine Folge mit GW nennen wir <u>konv.</u>
- Eine Folge ohne GW — " — <u>div.</u>
- $g = 0$, so nennen wir (a_n) eine <u>Nullfolge</u>.

I.3 Grenzwertsätze

(a_n), (b_n) seien konvergent mit den GW a und b, so sind auch d. Folgen $(a_n \pm b_n)$; $(a_n \cdot b_n)$ und, sofern alle $b_n \neq 0$ und $b \neq 0$, auch d. Folge $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ konv. Es gilt:

- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$

Für rekursive Folgen nützlich:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = g$$

Bsp.: (b_n) mit $b_{n+1} = \frac{1}{2}\left(b_n + \frac{2}{b_n}\right)$ und $b_1 = 2$

Annahme: $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_{n+1} = g$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} b_n + \frac{2}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}\right)$$

$$\Rightarrow \quad g = \frac{1}{2}\left(g + \frac{2}{g}\right) \Rightarrow g^2 = 2$$

$$\Rightarrow \quad g = \sqrt{2}, \text{ da } b_n > 0$$

I.4 Arithmetische und geometrische Folgen

I.4.1 Arithmetische Folgen – Teil I

Rekursiv: (a_n) arithm. $:\Longleftrightarrow a_{n+1} - a_n = d \quad \forall n$

mit $d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

a_0 sei geg.

Explizit: Mit d. rekursiven Darstellung folgt:

$$a_{n+1} = a_n + d = (a_{n-1} + d) + d$$

$$= ((a_{n-2} + d) + d) + d =$$

$$= \ldots = a_0 + \underbrace{d + d + \ldots + d}_{(n+1)\text{-mal}}$$

$$= a_0 + (n+1)\, d$$

Anfangsglied

$\Rightarrow \quad \boxed{a_n = a_0 + nd}$ expl. Darstellung

Hinweis: Für $d > 0$ ist (a_n) str. mon. ↑
Für $d < 0$ ist (a_n) str. mon. ↓

I.4.2 Geometrische Folgen – Teil I

Rekursiv: $n \in \mathbb{N}$; $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

(a_n) geometrisch $:\Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \quad \forall n$

ggb. a_0

Explizit: Wir formen wie in I.4.1 um:

$$a_{n+1} = a_n q = (a_{n-1} \cdot q) \cdot q =$$

$$= ((a_{n-2} \cdot q) \cdot q) \cdot q = \ldots =$$

$$= a_0 \prod_{k=0}^{n} q = a_0 \cdot q^{n+1}$$

$\boxed{a_n = a_0 \cdot q^n}$ explizite Darstellung

Ist $|q| < 1$ gibt es einen GW, für $q < 0$ liegt eine alternierende Folge vor.

Bsp.: $a_n = 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n = (-1)^n \cdot 2 \cdot \frac{1}{3^n}$

$: 2, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3^2}, \ldots$

$$q = -\frac{1}{3} = \frac{-2/3}{2} = \frac{2/3^2}{-2/3} = \dots$$

A Geg. Folge (a_n): 1, 3, 7, 15, 31, 63, ...

a) Bestimme d. zug. Rekursionsformel

$$a_{n+1} = f(a_n)$$

b) Wie lautet das Bildungsgesetz

$$a_n = f(n) \quad ?$$