Wir bilden d. Reihe zur arithm. Folge und erhalten so die arithmetische Summenformel:

(a_k) mit $a_k = a_0 + k \cdot d$

$$\Rightarrow S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} (a_0 + k d) = \sum_{k=0}^{n} a_0 + d \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{n} k}_{\text{Summenformel, 1. Semester}} =$$

$$\Rightarrow \boxed{S_n = (n+1) \cdot a_0 + d \cdot \frac{n(n+1)}{2}}$$ (arithm. Summenformel / Reihe)

I.5.2 Geometrische Folgen II

Wir betrachten (a_k) mit $a_k = a_0 \cdot q^k$

$$\Rightarrow \text{Geom. Reihe } S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_0 q^k = a_0 \sum_{k=0}^{n} q^k$$

$$S_n = a_0 \sum_{k=0}^{n} q^k \quad \Big| \cdot q \quad (\mathrm{I})$$

$$q\, S_n = a_0 \sum_{k=0}^{n} q^{k+1} \quad (\mathrm{II})$$

$$\xRightarrow[(\mathrm{I})-(\mathrm{II})]{} S_n (1-q) = a_0 (1 - q^{n+1})$$

$$\Rightarrow \boxed{S_n = a_0 \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$$

Für $|q|<1$ ex. nun also d. GW (Wert d. Reihe),
denn mit $q^{n+1} \to 0$ für $n \to \infty$ folgt

$$\boxed{s = a_0 \cdot \frac{1}{1-q}}$$

z. B. $\quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}}$

$q = \frac{1}{2}, \; a_0 = 1 \qquad\qquad = \underline{\underline{2}}$

I.5.2 Bestimmung von Reihenwerten oder Nachweis von Konvergenz

① Teleskopsummen: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_2 + b_2 - b_3 + b_3 - + \ldots + b_n - b_{n+1}$

Folgerichtig ergibt sich mit Hilfe d. GW-Sätze:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (b_k - b_{k+1}) = b_1 - \lim_{n \to \infty} b_n$$

Bsp.: $\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \; ?$

Es ist $\displaystyle\frac{1}{k(k+1)} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{\cancel{k+1}}{k(\cancel{k+1})} - \frac{\cancel{k}}{\cancel{k}(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = \lim_{n\to} \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1$$

② **Monotoniekriterium:**

Betrachte d. Reihe $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)$. Nun existiere ein Index $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_n \in \mathbb{R}_0^+$ für alle $n \geq n_0$ und eine Schranke $S > 0$.

Ist dann $\sum_{n=0}^{N} a_n \leq S \;\forall\, N \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ Reihe konv.

③ **Majoranten- und Minorantenkriterium**

Durch Vergleiche mit bereits bekannten Reihen können wir Aussagen über d. Konvergenz bzw. Divergenz d. gerade untersuchten Reihe machen. Math. formulieren wir das so:

Für eine Reihe $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)$ mit $a_n \in \mathbb{C}$ gelten folg. Konv.aussagen:

- Gibt es eine Folge (b_n) mit $|a_n| \leq b_n$ $\forall\, n \geq n_0$ und konv. $\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$, so konv. auch $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)$ Majorantenkriterium
- Sind alle $a_n \in \mathbb{R}$ und gibt es eine

div. Reihe $\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$ mit $0 \leq b_n \leq a_n$
$\forall n \geq n_0$, so div. auch $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)$

Minorantenkriterium

<u>Bsp.:</u> Für d. Reihe $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ können wir d. harm. Reihe und das Minorantenkrit heranziehen:

Da $\sqrt{n} \leq n \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$.
Weil $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\right)$ div., div. folgerichtig auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Zu unterscheiden ist generell, ob wir den GW bestimmen wollen, oder ob wir nur d. Konvergenz feststellen wollen. Letzteres ist meistens schon schwer genug.
Die Punkte ② und ③ fallen unter d. sog. indirekten Kriterien. Weitere sog. direkte Kriterien zum Konv.nachweis sind:

④ Quotientenkriterium (QK):

Gilt $\forall n \geq n_0 : \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q$ mit $q < 1$, so konv. $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)$ sogar absolut.
d.h. $\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\right)$ konv.

$q > 1 \Rightarrow$ Divergenz ; $q = 1 \Rightarrow$ keine Aussage mögl.

⑤ Wurzelkriterium (WK):

Gilt $\forall n \geq n_0 : \sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ mit $q < 1$, so konv. $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)$ sogar absolut

$q > 1 \Rightarrow$ Divergenz; $q = 1 \Rightarrow$ keine Aussage mögl.

Bsp.:

- geg. $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}\right)$

$$\sqrt[n]{\left|\frac{n^2}{2^n}\right|} = \frac{\sqrt[n]{n^2}}{\sqrt[n]{2^n}}, \text{ also } \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^2}}{\sqrt[n]{2^n}} = \frac{1}{2} < 1$$

WK

$\Rightarrow$ Reihe konv.

- geg. $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\right)$

$$\underset{QK}{\Rightarrow} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1/(n+1)!}{\frac{1}{n!}} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \to 0 < 1.$$

für $n \to \infty$

$\Rightarrow$ Reihe konv.

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$$

II. Differentialrechnung

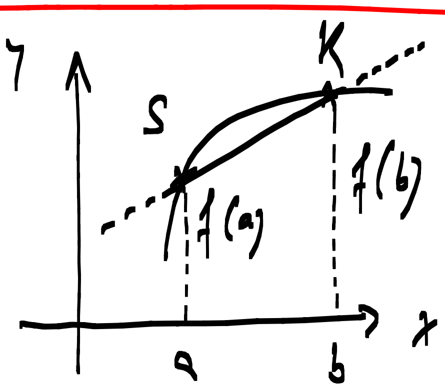
II.1 Differenzen- und Differentialquotient

Die durchschnittliche Änderungsrate

Im Intervall $[a;b]$ hat eine Fkt., beschrieben durch ihren Fkt.term $f(x)$ d. Steigung

$$m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Diese Steigung nennen wir d. durchschnittliche Änd.rate d Fkt f auf dem Intervall $I=[a;b]$ bzw. Differenzenquotient.



Verfeinerung: $b \to a$ (GW bilden): 2 Methoden

1. Methode: x- Methode: $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \to$ GW

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \underbrace{\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) = \frac{df}{dx}\Big|_{x_0}}_{\text{Falls GW ex.}}$$

2. Methode: h- Methode: $a = x_0 \wedge b = x_0 + h$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) = \frac{df}{dx}\Big|_{x_0}$$

Ableitung einer Potenzfkt

Die Abl. d. Fkt $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^n$
mit $n \in \mathbb{N}$ (allg. $\mathbb{R}$)
lautet $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

Gl. d Tangente im Pkt. $P(x_0 | y_0)$:

$$\underset{\text{PSF}}{\Longrightarrow} \quad g(x) = m(x - x_0) + y_0$$

Bei einer Fkt. f: Fkt term $f(x)$ und $S(x_0 | f(x_0))$

$$\underset{\text{PSF}}{\Longrightarrow} \quad t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \quad \text{(Tangentengleichung)}$$

Die PSF liefert die Normalengl.

$$n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0) \quad \text{(Normalengl.)}$$

II. 3 Weitere Ableitungsregeln

- **Summenregel:** u, v diff'bar
  $$(u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x)$$
- **Faktorregel:** $(c \cdot u(x))'$ mit $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
  $$= c \cdot u'(x)$$

- **Produktregel:** $(u(x)\cdot v(x))' = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x)$
  PR

- **Kettenregel:** $f(x) = u(v(x)) = (u \circ v)(x)$
  KR
  $\circ$ verknüpft

  $\Rightarrow f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x) = \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$

- **Quotientenregel:** $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)\,v(x) - u(x)\,v'(x)}{[v(x)]^2}$
  QR

Übung: Leiten Sie d. QR mit der PR und d. KR her

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} = u(x)\cdot(v(x))^{-1}$$

$$f'(x) \underset{PR}{=} u'(x)\cdot(v(x))^{-1} + u(x)\underbrace{(-1)\,(v(x))^{-2}\cdot v'(x)}_{KR} =$$

Erweitern

$$= \frac{u'(x)}{v(x)}\,\frac{v(x)}{v(x)} - \frac{u(x)\,v'(x)}{[v(x)]^2}$$

$$= \frac{u'(x)\,v(x) - u(x)\,v'(x)}{[v(x)]^2}$$