I Komplexe Zahlen

I.1 Übersicht über Mengen

I.1.1 Grundlagen

Def. Menge:
Eine Menge ist d. Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen (Cantor).

▷ Symbolisches:

$x \in M$: x ist Element von M

$x \notin M$: x ist kein Element von M

▷ Beschreibung von Mengen:

- Aufzählung: $M = \{$Hund, Katze, Schlange, Maus$\}$
- Aufzählung mit Auslassungen:
  $M = \{2, 4, 6, \dots, 48, 50\}$

  Vorsicht: unpräzise und unsauber

  $M = \{x \mid x \text{ ist gerade}, 2 \leq x \leq 50\}$

  "für die gilt" beschreibende Form

▷ <u>Die leere Menge:</u> $M = \{\ \}$ oder $M = \emptyset$

▷ <u>Teilmengen:</u>

A heißt Teilmenge von B: $A \subseteq B$

Betonung, dass A eine echte Teilmenge von B: $A \subset B$ oder $A \subsetneq B$

$B \supset A$ oder $B \supseteq A$

▷ Die leere Menge gehört zu jeder Menge:

$\emptyset \in M$

↑ jede bel. Menge

▷ Wann sind Mengen gleich?

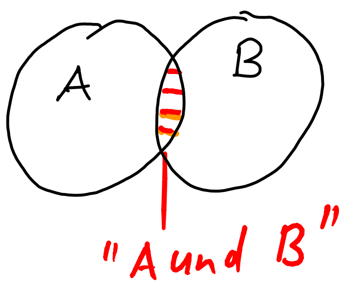
$A = B :\Longleftrightarrow A \subseteq B$ und $B \subseteq A$

I.1.2 Mengen und Operatoren

(wie man mit Mengen arbeitet)

zur Veranschaulichung Venn-Diagramme:

Bsp.:



↳ $A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

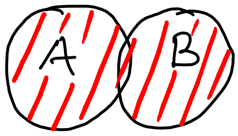
logisches $\wedge$ „und"

Aussagen

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	1

0 = falsch
1 = wahr

- <u>Vereinigung</u>: $A \cup B$ „A vereinigt mit B"



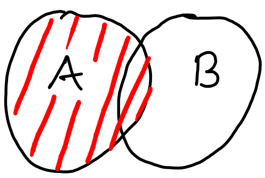
$$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

logisches „oder":

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

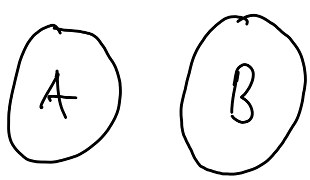
- Differenz: $A \setminus B$, „A ohne B"

$$A \setminus B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$



- <u>Disjunkte Mengen</u>:

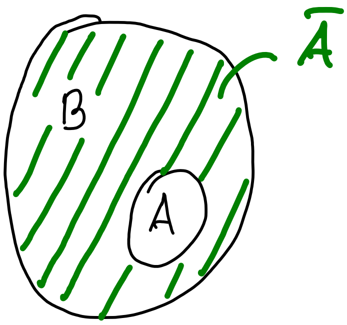
A und B disjunkt $:\Longleftrightarrow$ $A \cap B = \emptyset$



Ist A echte Teilmenge von B, d.h. $A \subset B$, dann bez. $\bar{A} := B \setminus A$

das <u>Komplement</u> von A bzgl. B

Es ist $A \cup A = B$ und $\bar{A} \cap A = \emptyset$



▷ <u>weitere Rechenregeln:</u>

<u>Kommutativgesetz:</u>
$$M_1 \cup M_2 = M_2 \cup M_1$$
$$M_1 \cap M_2 = M_2 \cap M_1$$

<u>Assoziativgesetze:</u>
$$M_1 \cup (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cup M_2) \cup M_3$$
$$M_1 \cap (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cap M_2) \cap M_3$$

<u>Distributivgesetze:</u>
$$M_1 \cap (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3)$$
$$M_1 \cup (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3)$$

<u>Beweis</u> d. 1. Distributivgesetzes:

zu zeigen (<u>z.z.</u>) $M_1 \cap (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_2)$

$x \in M_1 \cap (M_2 \cup M_3) \iff x \in M_1 \wedge x \in (M_2 \cup M_3)$

$\iff x \in M_1 \wedge (x \in M_2 \vee x \in M_3)$

es ist $\underset{①}{A \wedge (B \vee C)} \iff \underset{②}{(A \wedge B) \vee (A \wedge C)}$

A	B	C	B ∨ C	A ∧ B	A ∧ C	①	②
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

$\iff (x \in M_1 \wedge x \in M_2) \vee (x \in M_1 \wedge x \in M_3)$

$\iff x \in (M_1 \cap M_2) \vee x \in (M_1 \cap M_3)$

$\iff x \in (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3)$ □

I.1.3 Gesetze von de Morgan

Grundmenge G und Teilmengen A und B

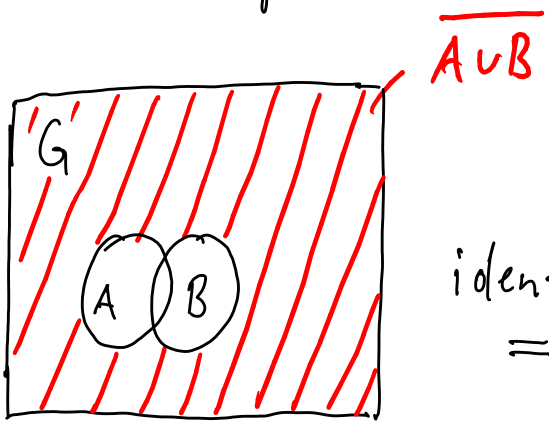
Es gilt:

a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

b) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

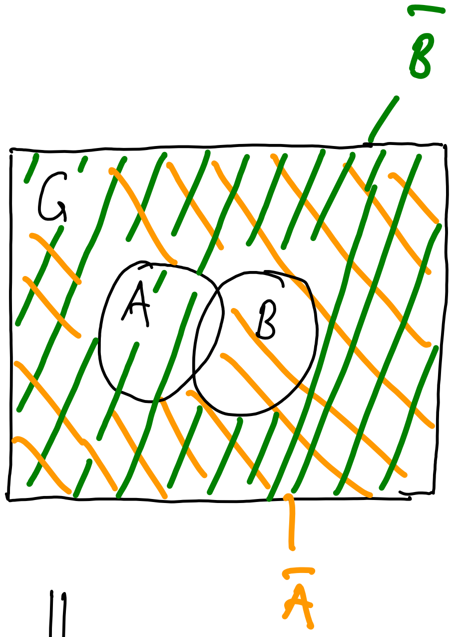
Im Venn-Diagramm:

a)

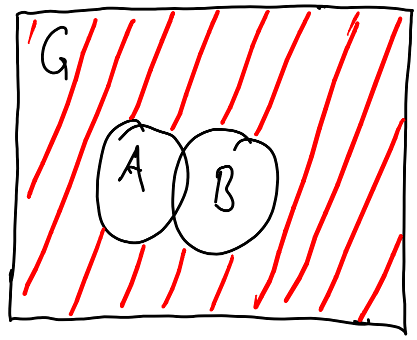


identisch

=



$\Downarrow$ Schnitt



Kein Beweis!

Beweis:

(1) Sei $x \in \overline{A\cup B} \Rightarrow x \notin A\cup B$

$\Rightarrow x\notin A \wedge x \notin B \Rightarrow x\in \bar A \wedge x \in \bar B$

$\Rightarrow x \in \bar A \cap \bar B \Rightarrow \overline{A\cup B} \subseteq \bar A\cap\bar B$

(2) Sei $x\in \bar A\cap\bar B \Rightarrow x\notin A \wedge x\notin B$

$\Rightarrow x\notin A\cup B \Rightarrow x\in\overline{A\cup B}$

$\Rightarrow \bar A\cap \bar B\subseteq \overline{A\cup B}$

Aus (1) und (2) folgt: $\overline{A\cup B} = \bar A\cap\bar B$ $\square$

http://www.micbaum.de
email: micbaum@gmx.de

I.1.4 Das kartesische Produkt

Das kartesische Prod $A \times B$ zweier Mengen A und B ist d. Menge aller <u>geordneten Paare</u> (a,b) mit $a \in A$ und $b \in B$.

$$A \times B := \{ (a,b) \mid a \in A \wedge b \in B \}$$

Dies ist auch eine Menge. Innerhalb d. Paare kommt es zwar auf d. Reihenfolge an, die Paare selbst sind aber in d. Menge nicht angeordnet. Wegen d. Festlegung d. Reihenfolge ist auch

$$A^n := \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{n\text{-mal}}$$ definiert

Bekannt: $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ $\quad$ $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

(x,y) $\quad$ (x,y,z)

I. 2 Von natürlich zu komplex

▷ Natürlich:

Die Menge $\mathbb{N}_{>0} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

ist d. Menge d. natürlichen Zahlen.

Sind $x, y \in \mathbb{N}_{>0}$, dann sind auch $x + y \in \mathbb{N}_{>0}$

und ebenso $x \cdot y \in \mathbb{N}_{>0}$.

ABER: $x - y$ i. A. $\notin \mathbb{N}_{>0}$

▷ ganze Zahlen:

- Gegenzahl: Sei $a \in \mathbb{N}_{>0}$, dann definiert man $-a$ als d. Gegenzahl zu a bzgl. d. Addition (additives Inverses) und es gilt:

  $$a + (-a) = 0$$

  mit 0 als neutralem Element d. Addition

Def.: Die Menge

$$\mathbb{Z} := \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

bez. wir als d. Menge d. ganzen Zahlen.

Hier: $a, b \in \mathbb{Z}$, dann $a \pm b \in \mathbb{Z}$

und $a \cdot b \in \mathbb{Z}$

ABER: $\frac{a}{b}$ i.A $\notin \mathbb{Z}$

▷ rationale Zahlen:

Hinzufügen d. Kehrwertes einer Zahl liefert das multiplikative Inverse für eine jede Zahl (ohne 0) und wir erhalten die Menge

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p, q \in \mathbb{Z} \wedge q \neq 0 \right\}$$

Hier $+, -, \cdot, :$ Mappen alle

ABER: Problem durch fortschreitendes Multiplizieren

$$\hookrightarrow \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-mal}} =: a^n = c$$

umgekehrt $c = \overset{?}{\cdot}{}^n$ | Umkehroperation Radizieren

$$\Rightarrow \sqrt[n]{c} = ? = a$$

Frage: Wenn $\sqrt{c} = a$, ist dann $a \in \mathbb{Q}$?

Antwort: Nein, Erweiterung notwendig!

Es gibt irrationale Zahlen

$\hookrightarrow$ $\sqrt{2}$ ist eine solche Zahl

Man zeige: $\sqrt{2}$ ist irrational

Indirekter Beweis:

Annahme: $\sqrt{2}$ ist rational, d.h. $\sqrt{2}$ schreibt sich in gekürzter Bruchdarstellung $\sqrt{2} = \frac{r}{s}$ mit $r, s \in \mathbb{N}_{>0}$, $ggT(r,s) = 1$.

Man schließt nun folgendermaßen:

$$\sqrt{2} = \frac{r}{s} \Rightarrow 2s^2 = r^2 \Rightarrow 2 \mid r^2 \Rightarrow 2 \mid r$$

(da 2 Primzahl),

etwa $r = 2t$

$$\Rightarrow \sqrt{2} = \frac{2t}{s} \Rightarrow 2 = \frac{4t^2}{s^2} \Rightarrow s^2 = 2t^2 \Rightarrow 2 \mid s^2 \Rightarrow 2 \mid s$$

Also $2 \mid r$ und $2 \mid s \Rightarrow ggT(r,s) \neq 1 \Rightarrow \lightning$ Annahme

$$\Rightarrow \sqrt{2} \text{ ist irrational } \square$$

$\Rightarrow$ NEU: Irrationale Zahlen: $\mathbb{I}$

$\hookrightarrow$ es ergibt sich $\mathbb{R} := \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$

$\Rightarrow$ Reelle Zahlen

Teilmengen d. reellen Zahlen: Intervalle

$[a,b] := \{x \mid a \leq x \leq b\}$ abgeschlossenes Intervall

$(a,b) := \{x \mid a < x < b\} =:]a,b[$ offenes Intervall

$(a,b]$; $[a,b)$ halboffene Intervalle