2.3 Taylor-Reihen

Entwicklung einer eine Fkt. in eine PR

2.3.1 Einführung

Ziel: Fkt $f(x)$ als PR darstellen

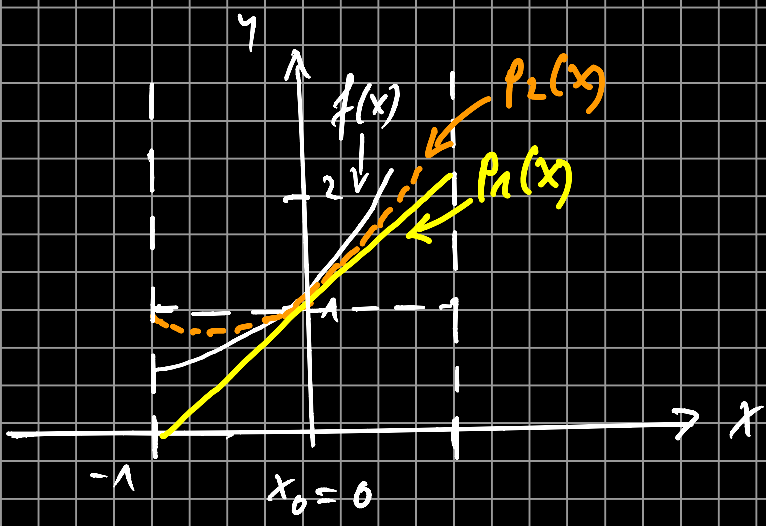
$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad \text{oder} \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$$

Zweck:
- ▷ Annäherung einer Fkt. durch ein Polynom
- ▷ Herleitung von Näherungsformeln
- ▷ Integration durch PR-Entwicklung
- ▷ Näherungsweises Lösen von transzendenten Gl'en

Bsp.: Geom. Reihe

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \ldots \quad \text{konv für } |x| < 1$$

$$= \frac{1}{1-x} = f(x)$$



2.3.2 Entwicklung einer Fkt. in eine PR

Mac Laurinsche Reihe:

Annahme:

1. Entwicklung von $f(x)$ in eine PR vom Typ $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$ ist möglich und eindeutig

2. $f(x)$ ist in einer Umgebung von $x = 0$ bel. oft diff'bar, d.h. $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ können berechnet werden

Ableitungen:

$$f'(x) = a_1 + 2a_1 x + 3a_2 x^2 + 4a_4 x^3 + \dots$$
$$f''(x) = 2a_2 + 6a_2 x + 12 a_4 x^2 + \dots$$
$$f'''(x) = 6a_2 + 24 a_4 x + \dots$$

für $x = 0$:

$$f(0) = a_0$$
$$f'(0) = a_1$$
$$f''(0) = 2a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{f''(0)}{2!}$$
$$f'''(0) = 6a_3 \Rightarrow a_3 = \frac{f'''(0)}{6} = \frac{f''(0)}{3!}$$
$$\vdots$$
$$f^{(n)}(0) = n!\, a_n \Rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Es gilt folgender Satz:

Satz : Satz von Taylor

Die Fkt. $f(x)$ sei in einer Umgebung von x_0 $(n+1)$-mal diff'bar; dann gilt die Taylor-Formel

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x) \quad \text{Restglied},$$

dabei gibt es eine Stelle u zwischen x_0 und x, so dass sich das Restglied $R_n(x)$ darstellen lässt in d. Form $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}}{(n+1)!}(u)\cdot(x-x_0)^{n+1}$

Im Sonderfall $x_0 = 0$ geht die Taylor-Formel über in die Mac Laurin-Formel

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x)$$

mit $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\vartheta x)}{(n+1)!} x^{n+1}$ $\Big\{$ d. Zwischenstelle u lässt sich schreiben als ϑx mit $0 \leq \vartheta \leq 1$

Bemerkungen:

1. Ist $f(x)$ gerade $\Rightarrow$ Reihe hat nur gerade Exp. $(x^0, x^2, x^4, \dots)$

   Ist $f(x)$ ungerade $\Rightarrow$ Reihe hat nur ung. Exp. $(x^1, x^3, \dots)$

2. Ist d. Fkt. $f(x)$ bel. oft diff'bar, so erhält man aus d. Taylor-Formel für $n \to \infty$ die Taylor-Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Gilt dabei $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, so ist die Taylorreihe

eine PR mit dem Konv.bereich

$K := \{x \mid \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0\}$; diese Reihe stellt in K d. Fkt $f(x)$ dar.

Bsp.:

$f(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R}$

$e^x = f(x) = f'(x) = f''(x) = \ldots = f^{(k)}(x) = \ldots$

$f^{(k)}(0) = e^0 = 1 \quad \forall k = 0, 1, 2, \ldots$

$\Rightarrow \quad a_k = \frac{1}{k!}$

$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x) \quad$ mit

$R_n(x) = \frac{e^u x^{n+1}}{(n+1)!} \quad$ mit u zwischen 0 und x

Es gilt $|u| \leq |x|$

$$\Rightarrow |R_n(x)| \leq \frac{e^{|x|}|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}}$$

Konv. für alle $x \in \mathbb{R}$

Insbesondere: $x = 1$:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

Bsp.:

$$\sin x = \sin(0) + \frac{\sin'(0)}{1!}x + \frac{\sin''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\sin^{(n)}(0)}{n!} + R_n(x)$$

$\sin(0) = 0$

$\sin' x = \cos x \Rightarrow \sin'(0) = 1$

$\sin''(x) = -\sin x \Rightarrow \sin''(0) = 0$

$\sin'''(x) = -\cos x \Rightarrow \sin'''(0) = -1$

$\sin^{(4)}(x) = \sin x \Rightarrow \sin^{(4)} 0 = 0$

$$\Rightarrow \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + R_n(x)$$

mit $\quad R_n(x) = \frac{\sin^{(n+1)}(u)}{(n+1)!} x^{n+1}$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + R_n(x)$$

mit $\quad R_n(x) = \frac{\cos^{(n+1)}(u)}{(n+1)!} x^{n+1}$

$|\sin x| \leq 1, \ |\cos x| \leq 1 \implies |\sin^{(n+1)}(u)| \leq 1$

und $|\cos^{(n+1)}(u)| \leq 1$

$$\implies |R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0 \ (n \to \infty)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \quad ; \quad x \in \mathbb{R} \\ \cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \quad ; \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}}$$

$$\boxed{\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad \text{für } -1 < x \leq 1}$$

$x=1$: $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1}$$

Anwendungen:

Bsp.: (Gaußsches Fehlerintegral)

$$G(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

Es gilt: $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad x \in \mathbb{R}$

$x := -t^2 \Rightarrow e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \dots$

$$\Rightarrow G(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt = \int_0^x \left(1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \dots\right) dt$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{2!\cdot 5} - \frac{x^7}{3!\cdot 7} + \dots \quad x \in \mathbb{R}$$

Bsp.: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots}{x} \right) =$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cancel{x}\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\dots\right)}{\cancel{x}}\right)$$

0 0 0

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$$

$$= 1$$

Rechnen mit PR

$$f(x) = \sin x \cdot e^x$$

$$= \left(x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\dots\right)\cdot\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{1}{5!}x^5+\dots\right)$$

$$x \qquad -\frac{1}{3!}x^3 \qquad +\frac{1}{5!}x^5$$

$$x^2 \qquad -\frac{1}{3!}x^4 \qquad +\frac{1}{5}x^6$$

$$\frac{x^3}{2!} \qquad \dots$$

$$x + x^2 + x^3\underbrace{\left(-\frac{1}{3!}+\frac{1}{2!}\right)}_{\frac{1}{3}} + \dots$$

$$= x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots$$

schneller über Multiplikationstafel

$$
\begin{array}{c|c|cccc}
 & b_n \backslash a_n & 0 & 1 & 0 & -1/3! \\
 & & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 \\
\hline
x^0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1/3! \\
x^1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1/3! \\
x^2 & 1/2! & 0 & 1/2! & 0 & -1/2!3! \\
x^3 & 1/3! & 0 & 1/3! & 0 & -\frac{1}{3!3!}
\end{array}
$$

$c_0,\ c_1,\ c_2,\ c_3$

$$c_0 = 0$$

$$c_1 = 0+1 = 1$$

$$c_2 = 0+1+0 = 1$$

$$c_3 = 0+\frac{1}{2!}+0-\frac{1}{3!} = \frac{1}{3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \ldots$$

Übungen:

Welche Funktion wird durch folg. PR dargestellt

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^{n+1}} x^n$?

$$= \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-2x}{3}\right)^n$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}, \quad |z|<1$$

$$= \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad \text{mit} \quad z := -\frac{2x}{3}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{2x}{3}\right)} = \frac{1}{3+2x}$$

Konv.bereich: $|z| = \left|-\frac{2x}{3}\right| = \left|\frac{2x}{3}\right| < 1$

$$\Leftrightarrow |x| < \frac{3}{2} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < x < \frac{3}{2}$$

Übung: S. 73, A 2) A 3)

A2) a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{k+1}{k!}}_{=:a_k} x^k$

$$r = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k+1}{k!} \cdot \frac{(k+1)!}{k+2}\right)$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left(\frac{(k+1)\cancel{k!}(k+1)}{\cancel{k!}(k+2)}\right)$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left(\frac{(k+1)^2}{k+2}\right) = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k^2+2k+1}{k+2}\right)$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left(\frac{\cancel{k}(k+2+\overset{\to 0}{\frac{1}{k}})}{\cancel{k}(1+\underset{\to 0}{\frac{2}{k}})}\right) = \infty$$

$\Rightarrow$ Konvergenz: $|x| < \infty \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

$0! := 1 \quad ; \quad 1! = 1$

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$

$(n+1)! = n!\,(n+1)$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^2} x^k$ c) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^k}{k} (x-1)^k$

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)!}{k^k} (x+1)^k$

zu d) $r = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{(k-1)!}{k^k} \cdot \frac{(k+1)^{k+1}}{k!} \right)$

$= \lim_{k\to\infty} \left(\frac{\cancel{(k-1)!}\,(k+1)(k+1)^k}{k^k\,\cancel{(k-1)!}\,k} \right)$

$= \lim_{k\to\infty} \left[\frac{k+1}{k} \cdot \left(\frac{k+1}{k}\right)^k \right]$

$= \lim_{k\to\infty} \left[\underbrace{\left(1 + \frac{1}{k}\right)}_{\to 1} \underbrace{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k}_{\to e} \right] = \underline{\underline{e}}$

$\Rightarrow$ konv. $|x+1| < e$

c) $r = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{(-1)^k\, 2^k}{k} \cdot \frac{k+1}{(-1)^{k+1}\, 2^{k+1}} \right|$

$$= \lim_{k\to\infty} \left(\frac{\cancel{2^k}\,(k+1)}{k\,\cancel{2^k}\cdot 2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ Konv.bereich $\quad |x-1| < \frac{1}{2}$

3b) $$f(x) = \frac{x}{2+x} = \frac{x}{2}\cdot \frac{1}{\left(1-\left(-\frac{x}{2}\right)\right)} =$$

$$= \frac{x}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{2}\right)^k = \frac{x}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k} x^k =$$

$$= \frac{x}{2}\left[1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 - + \ldots\right]$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{8}x^3 - + \ldots$$

$$\left|-\frac{x}{2}\right| < 1 \iff -2 < x < 2$$

3c) $$\left(e^{-x}\right)^2 = e^{-x}\cdot e^{-x} = e^{-2x}$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$$

$x \to -2x$: $$e^{-2x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2x)^k}{k!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^k}{k!} x^k \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \dots$$

$$(x \in \mathbb{R})$$

<u>Bsp.:</u> $y'' + 3y' + ay = e^x + x$

hom.: $\lambda^2 + 3\lambda + a = 0$

$$\lambda_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4a}}{2}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{-3 + \sqrt{9-4a}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{-3 - \sqrt{9-4a}}{2}$$

R.S. $r(x) = e^x + x$

$$-3 \pm \sqrt{9-4a} = 0$$

$$\Rightarrow \pm\sqrt{9-4a} = +3$$

$$\Rightarrow 9 - 4a = 9 \Rightarrow \boxed{a = 0}$$