DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg Stuttgart

Stützkurs Mathematik WIW – Übungen Tag 1

Datum: 29.11.2010

*****LÖSUNGSVORSCHLAG*****

Themen:

Substitution, Betragsgleichungen, Wurzelgleichungen, Logarithmus und Potenzen, Terme aufstellen und umformen

---

Umfang:	8 Aufgaben
Hilfsmittel:	Sind keine notwendig. Eine Formelsammlung und ein nicht programmierbarer Taschenrechner können aber verwendet werden.

Aufgabe A1 (Substitution):

Lösen Sie die angegebenen Gleichungen.

a) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

b) $\left(2\sqrt{x} - 3\right) + 3 = \frac{2}{\sqrt{x}} + \sqrt{9}$

c) $e^{x-1} + 1 = 2e^{1-x}$

d) $\left(\ln(x)\right)^2 - 4 \cdot \ln(x) = -1$

Lösung:

a) Wir setzen $u := x^2$ und erhalten dadurch die Gleichung

$$u^2 - 3u + 2 = 0.$$

Diese lösen wir mit der Mitternachtsformel:

$$u_{1/2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}.$$

Wir erhalten die beiden Lösungen $u_1 = 1$ und $u_2 = 2$. Durch die Rücksubstitution $x = \pm\sqrt{u}$ folgen hiermit alle Lösungen der eigentlichen Gleichung:

$$x_{1/2} = \pm 1 \text{ und } x_{3/4} = \pm\sqrt{2}.$$

b) Nach der linken Seite der Gleichung müssen wir $x \geq 0$ fordern. Da $\sqrt{x}$ auf der rechten Seite auch im Nenner zu finden ist, muss sogar $x > 0$ sein. Da $\sqrt{9} = 3$, erhalten wir durch die Subtraktion der Zahl 3 den Ausdruck

$$2\sqrt{x} - 3 = \tfrac{2}{\sqrt{x}} \underset{\cdot\sqrt{x}}{\Leftrightarrow} 2x - 3\sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow 2x - 3\sqrt{x} - 2 = 0.$$

Wir setzen nun $u := \sqrt{x}$ und es folgt, dass

$$2u^2 - 3u - 2 = 0.$$

Mit der Mitternachtsformel erhalten wir

$$u_{1/2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4}.$$

Damit finden wir die Lösungen $u_1 = -\frac{1}{2}$ und $u_2 = 2$. Da die Wurzel einer Zahl als positiv definiert ist, folgt aus $u^2 = x$ nur die Lösung $x_1 = 4$ für unsere Gleichung. Die Probe (= Einsetzten der Lösung in die Gleichung) bestätigt diese Lösung als echte Lösung.

c) Da $e^{f(x)} > 0$ ist für alle x, können wir ohne Einschränkungen mit den e-Termen multiplizieren. Es ist

$$e^{x-1} + 1 = 2e^{1-x} \Leftrightarrow e^{x-1} + 1 = 2e^{-(x-1)} \Leftrightarrow e^{x-1} + 1 = \frac{2}{e^{x-1}}.$$

Wir multiplizieren mit e^{x-1} durch und stellen die Gleichung noch etwas um und erhalten dadurch

$$\underbrace{e^{2x-2}}_{=e^{x-1} \cdot e^{x-1}} + e^{x-1} - 2 = 0.$$

Wir substituieren $u := e^{x-1}$ und es folgt hiermit

$$u^2 + u - 2 = 0.$$

Mit der Mitternachtsformel ergibt sich

$$u_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}.$$

Die Lösungen sind also $u_1 = -2$ und $u_2 = 1$. Die Rücksubstitution lautet $\ln(u) + 1 = x$. Da der Numerus (hier: u) positiv und nicht 0 sein muss, erhalten wir lediglich die Lösung $x_1 = \ln 1 + 1 = 0 + 1 = 1$.

d) Der Numerus muss größer als 0 sein, d.h. die Definitionsmenge ist hier $D = (0; \infty)$. Um $(\ln(x))^2 - 4 \cdot \ln(x) = -1$ zu lösen, setzen wir $u := \ln(x)$. Damit erhalten wir

$$u^2 - 4u = -1 \Leftrightarrow u^2 - 4u + 1 = 0.$$

Wir jagen die Mitternachtsformel auf die Gleichung:

$$u_{1/2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}.$$

Die Rücksubstitution mit $e^u = x$ liefert die Lösungen $x_1 = e^{2-\sqrt{3}}$ und $x_2 = e^{2+\sqrt{3}}$. Beide liegen innerhalb des Definitionsbereichs der Gleichung.

□

Aufgabe A2 (Betragsgleichung mit Parameter):

Lösen Sie die folgende Betragsgleichung.

$$|x-2|+|x+3| = n \cdot x \text{ mit } n \in \mathbb{N}.$$

Für welche n gibt es keine Lösung?

Lösung:

Die kritischen Stellen der Gleichung sind $x_A = -3$ und $x_B = 2$. Es sind

$$(x+3)\begin{cases} <0 & x<-3 \\ \geq 0 & -3 \leq x < 2 \\ >0 & x \geq 2 \end{cases} \text{ und } (x-2)\begin{cases} <0 & x<-3 \\ <0 & -3 \leq x < 2 \\ \geq 0 & x \geq 2 \end{cases}.$$

Wir betrachten die einzelnen Gleichungen:

$\underline{x<-3:}$

Hier wird aus $|x-2|+|x+3| = n \cdot x$ die Gleichung

$$-(x-2)+[-(x+3)] = nx \Leftrightarrow -x+2-x-3 = nx \Leftrightarrow -1 = (n+2)\cdot x \Leftrightarrow -\frac{1}{n+2} = x.$$

Da $-\frac{1}{n+2} > -3$ für alle $n \in \mathbb{N}$, erhalten wir hier keine Lösungen der Gleichung.

$\underline{-3 \leq x < 2:}$

Hier wird aus $|x-2|+|x+3| = n \cdot x$ die Gleichung

$$-(x-2)+(x+3) = nx \Leftrightarrow -x+2+x+3 = nx \Leftrightarrow 5 = nx \Leftrightarrow \frac{5}{n} = x.$$

Für $n=0$ ist $\frac{5}{n}$ nicht definiert, für $n=1$ und $n=2$ ist $\frac{5}{n} > 2$. Für alle anderen $n \in \{3;4;5;...\}$ ist $\frac{5}{n} \in [-3;2)$ und wir haben eine Lösung vorliegen.

$\underline{x \geq 2:}$

Hier wird aus $|x-2|+|x+3| = n \cdot x$ die Gleichung

$$(x-2)+(x+3) = nx \Leftrightarrow x-2+x+3 = nx \Leftrightarrow 1 = (n-2)\cdot x \Leftrightarrow \frac{1}{n-2} = x\,.$$

Für $n=2$ ist $\frac{1}{n-2}$ nicht definiert. Für alle anderen n ist $\frac{1}{n-2} < 2$ und damit liegt keine weitere Lösung vor.

Wir erhalten also für $n \geq 3$ für jedes n eine Lösung der Gleichung und die lautet $x = \frac{5}{n}$.

□

Aufgabe A3 (Betragsgleichungen):

Lösen Sie die folgenden Betragsgleichungen.

a) $\sqrt{|x|-4} + |x| = 6$

b) $|x^2 - 9| + x = 3$

c) $\dfrac{1}{|x-2|} + (x-2)^2 = 0$

d) $|x^2+1| - |x^2-1| = 2$

Lösung:

a) Durch den Wurzelterm müssen wir fordern, dass $|x| \geq 4$, d.h. $x \leq -4$ oder $x \geq 4$. Wir betrachten die beiden Fälle:

$\underline{x \leq -4:}$

Hier lautet die Gleichung

$$\sqrt{-x-4} - x = 6 \Leftrightarrow \sqrt{-x-4} = 6 + x\,.$$

Wir quadrieren und erhalten

$$-x-4 = 36 + 12x + x^2 \Leftrightarrow x^2 + 13x + 40 = 0\,.$$

Mit der Mitternachtsformel folgt

$$x_{1/2} = \frac{-13 \pm \sqrt{169-160}}{2} = \frac{-13 \pm 3}{2}.$$

Wir erhalten also die Lösungen $x_1 = -8$ und $x_2 = -5$. Beide liegen innerhalb des betrachteten Intervalls. Wir machen die Probe:

$$\sqrt{-(-8)-4} - (-8) = \sqrt{4} + 8 = 10 \neq 6 \text{ und } \sqrt{-(-5)-4} - (-5) = \sqrt{1} + 5 = 6 = 6.$$

Somit ist hier nur $x_2 = -5$ eine Lösung unserer Betragsgleichung.

$\underline{x \geq 4:}$

Hier lautet die Gleichung

$$\sqrt{x-4} + x = 6 \Leftrightarrow \sqrt{x-4} = 6 - x.$$

Wir quadrieren beide Seiten und erhalten

$$x - 4 = 36 - 12x + x^2 \Leftrightarrow x^2 - 13x + 40.$$

Wieder liefert uns die Mitternachtsformel die Lösungen dieser quadratischen Gleichung:

$$x_{1/2} = \frac{13 \pm \sqrt{169-160}}{2} = \frac{13 \pm 3}{2}.$$

Die Lösungen lauten hier somit $x_1 = 5$ und $x_2 = 8$. Beide liegen innerhalb des betrachteten Intervalls. Wir machen die Probe:

$$\sqrt{5-4} + 5 = \sqrt{1} + 5 = 6 = 6 \text{ und } \sqrt{8-4} + 8 = \sqrt{4} + 8 = 10 \neq 6.$$

Hier ist also $x_1 = 5$ die einzige Lösung unserer Betragsgleichung.

Somit haben wir insgesamt die Lösungen $x_I = -5$ und $x_{II} = 5$ für die gegebene Gleichung gefunden.

b) Die kritischen Stellen sind hier $x_A = -3$ und $x_B = 3$. Es ist

$$\left(x^2-9\right)\begin{cases} \geq 0 & x \leq -3 \\ < 0 & -3 < x < 3 \\ \geq 0 & x \geq 3 \end{cases}$$

Wir betrachten die verschiedenen Intervalle.

$\underline{x \leq -3, x \geq 3:}$

Die zu lösende Gleichung lautet hier

$$x^2 - 9 + x = 3 \Leftrightarrow x^2 + x - 12 = 0\,.$$

Die Mitternachtsformel liefert uns

$$x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2}\,.$$

Die Lösungen lauten also $x_1 = -4$ und $x_2 = 3$. Diese liegen auf den betrachteten Intervallen und sind somit Lösungen der Betragsgleichung.

$\underline{-3 < x < 3:}$

Die zu lösende Gleichung lautet hier

$$-\left(x^2-9\right) + x = 3 \Leftrightarrow -x^2 + 9 + x = 3 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0\,.$$

Bemühen wir die Mitternachtsformel, so erhalten wir

$$x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}\,.$$

Die Lösungen lauten hier also $x_1 = -2$ und $x_2 = 3$.

Somit haben wir insgesamt die drei Lösungen $x_I = -4$, $x_{II} = -2$ und $x_{III} = 3$ für unsere Betragsgleichung gefunden.

c) Die kritische Stelle ist hier $x_A = 2$. Da $\frac{1}{|x-2|}$ für $x = 2$ nicht definiert ist, betrachten wir diese Stelle nicht. Es ist $x - 2 < 0$ für $x < 2$ und $x - 2 > 0$ für $x > 2$. Wir betrachten die einzelnen Intervalle:

$\underline{x < 2:}$

Hier haben wir die Gleichung

$$\frac{1}{-(x-2)} + (x-2)^2 = 0$$

zu lösen. Es ist $-1 + (x-2)^3 = 0$ und damit $(x-2)^3 = 1$. Diese Gleichung wird lediglich von $x = 3$ gelöst. Da $3 > 2$ liegt aber keine Lösung unserer Betragsgleichung vor.

$\underline{x > 2:}$

Hier haben wir die Gleichung

$$\frac{1}{x-2} + (x-2)^2 = 0$$

zu lösen. Es ist $1 + (x-2)^3 = 0$ und damit $(x-2)^3 = -1$. Diese Gleichung wird nur von $x = 1$ gelöst. Da $1 < 2$ liegt wiederum keine Lösung unserer Betragsgleichung vor. Somit existiert gar keine Lösung derselben!

d) Hier sind die kritischen Stellen $x_{A/B} = \pm 1$. Der Term $x^2 + 1$ ist sowieso positiv für alle x. Somit müssen wir nur den zweiten Summanden etwas genauer unter die Lupe nehmen:

$$(x^2 - 1)\begin{cases} \geq 0 & x \leq -1 \\ < 0 & -1 < x < 1 \\ \geq 0 & x \geq 1 \end{cases}$$

Wir betrachten die einzelnen Intervalle.

$x \le -1, x \ge 1:$

Hier lautet die zu lösende Gleichung

$$x^2 + 1 - (x^2 - 1) = 2 \Leftrightarrow 1 + 1 = 2 = 2 .$$

Diese ist immer erfüllt, womit alle $x \ge 1$ und alle $x \le -1$ Lösung der Betragsgleichung sind.

$-1 < x < 1:$

Hier lautet die zu lösende Gleichung

$$x^2 + 1 - [-(x^2 - 1)] = 2 \Leftrightarrow x^2 + 1 + x^2 - 1 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 1 .$$

Diese Lösungen liegen nicht im betrachteten Intervall, so dass keine weiteren Lösungen der Betragsgleichung mehr von uns gefunden werden. Es bleibt bei Folgendem:

Die Lösungen der Betragsgleichung sind alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \le -1$ oder $x \ge 1$.

□

Aufgabe A4 (Blattformat Oktav):

Welche Seitenlängen hat ein rechteckiges Blatt Papier, das eine Fläche von einem Quadratmeter hat und dessen längere Seite sich zur kürzeren verhält, wie die Summe der beiden Seitenlängen zur längeren Seite? (**Stichwort:** Goldener Schnitt)

Lösung:

Es sei l die lange Seite und k die kurze Seite. Es ist dann laut Aufgabentext

$$\frac{l}{k} = \frac{l+k}{l} \Rightarrow l^2 = lk + k^2 \Rightarrow l^2 - lk - k^2 = 0.$$

Wir lösen die Gleichung mit Hilfe der Mitternachtsformel nach l auf:

$$l_{1/2} = \frac{k \pm \sqrt{k^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(-k^2\right)}}{2} = \frac{k \pm \sqrt{k^2 + 4k^2}}{2} = \frac{k \pm \sqrt{5} \cdot k}{2}.$$

Uns interessiert nur die Lösung mit dem Pluszeichen, da nur hier die Streckenlänge positiv ist, was wir natürlich voraussetzen sollten. Also haben wir

$$l = \frac{1+\sqrt{5}}{2} k .$$

Da wir nun wissen, dass $l \cdot k = 1$ m², können wir mit dem gefundenen Ergebnis eine der beiden Seiten berechnen.

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} k^2 = 1 \Rightarrow k = \sqrt{\frac{2}{1+\sqrt{5}}} \approx 0{,}7862 \text{ m.}$$

Damit ist dann

$$l = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{1+\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \approx 1{,}2720 \text{ m.}$$

□

Aufgabe A5 (Termvereinfachung):

Vereinfachen Sie den angegebenen Term so weit wie möglich.

$$\sum_{k=2}^{5}\left(\ln\sqrt[k]{e}\right)+\ln\left(\frac{1}{2}\cdot\ln\left(\sqrt{e^4}\right)\right)+5\cdot\ln\left(\sqrt[8]{\frac{e+e^{-1}}{e}\cdot\frac{1}{1+e^2}}\right)$$

Lösung:

$$\sum_{k=2}^{5}\left(\ln\sqrt[k]{e}\right)+\ln\left(\frac{1}{2}\cdot\ln\left(\sqrt{e^4}\right)\right)+5\cdot\ln\left(\sqrt[8]{\frac{e+e^{-1}}{e}\cdot\frac{1}{1+e^2}}\right)=\sum_{k=2}^{5}\left(\ln\left(e^{\frac{1}{k}}\right)\right)+\ln\left(\frac{1}{2}\cdot\ln\left(e^2\right)\right)$$

$$+5\cdot\ln\left(\sqrt[8]{\left(1+\frac{1}{e^2}\right)\cdot\frac{1}{1+e^2}}\right)=\sum_{k=2}^{5}\left(\frac{1}{k}\underbrace{\ln e}_{=1}\right)+\underbrace{\ln\left(\underbrace{\ln e}_{=1}\right)}_{\ln 1=0}+5\cdot\ln\left(\sqrt[8]{\frac{e^2+1}{e^2}\cdot\frac{1}{1+e^2}}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$$

$$+5\cdot\ln\left(\underbrace{\left(e^{-2}\right)^{\frac{1}{8}}}_{=e^{-\frac{1}{4}}}\right)=1\tfrac{17}{60}-\tfrac{5}{4}\ln e=1\tfrac{17}{60}-\tfrac{5}{4}=\tfrac{1}{30}.$$

□

Aufgabe A6 (Logarithmusgleichungen):

Bestimmen Sie den jeweiligen Definitionsbereich und die Lösungen der angegebenen Logarithmusgleichungen. Die Gleichungen sind nach x aufzulösen.

a) $\ln(x-1)-\ln\left(\sqrt{x}+1\right)=1$

b) $\sqrt{\ln(x-4)}=t$

c) $\ln\left(t^2-x^2\right)-\ln(t+x)=1$

Lösung:

a) Der Numerus muss stets positiv und nicht 0 sein, d.h. $D=(1;\infty)$ nach dem ersten Summanden, der zweite bringt nichts Neues. Nach den Logarithmusgesetzen formen wir um:

$$\ln(x-1)-\ln\left(\sqrt{x}+1\right)=1\Leftrightarrow\ln\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}+1}\right)=1\Leftrightarrow\ln\left(\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\cdot\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}+1}\right)=1$$

$$\Leftrightarrow\ln\left(\sqrt{x}-1\right)=1\Leftrightarrow\sqrt{x}-1=e\Rightarrow x=(e+1)^2$$

Da $(e+1)^2\in D$ haben wir die einzige Lösung gefunden.

b) Es muss auf jeden Fall $t \geq 0$ gelten, denn so ist die Wurzel definiert. Des Weiteren muss $x-4 \geq 1$ sein, denn sonst wird der Radikand $\ln(x-4)$ negativ. Also ist die Definitionsmenge $D=[5;\infty)$. Wir erhalten durch Quadrieren $\ln(x-4)=t^2$ und damit $x=e^{t^2}+4$. Für alle $t \geq 0$ ist $e^{t^2}+4 \in D$ und somit eine Lösung der Gleichung.

c) Es muss gelten, dass $x^2 < t^2$, was wir aus dem ersten Summanden ersehen und ebenso muss gelten, dass $t+x>0 \Leftrightarrow x>-t$. Wir lösen die Gleichung mit Hilfe der Logarithmusgesetze:

$$\ln\left(t^2-x^2\right)-\ln(t+x)=1 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{(t-x)\cdot(t+x)}{t+x}\right)=1 \Leftrightarrow \ln(t-x)=1.$$

Damit folgt, dass $x=t-e$ ist. Da $x>-t$ folgt hiermit, dass $t-e>-t \Leftrightarrow t>\frac{e}{2}$. Es lässt sich sogar $t \geq \frac{e}{2}$ nachweisen, indem man $x^2 \to t^2$ betrachtet oder L'Hospital verwendet.

□

Aufgabe A7 (Kugel kontra Kegel):

Die Oberfläche einer Kugel sei identisch der Mantelfläche eines Kegels. Des Weiteren sei die Kegelhöhe gleich dem Kugeldurchmesser. Welcher Körper hat das größere Volumen?

Lösung:

Die Oberfläche einer Kugel ist gegeben durch $O_K = 4\pi r_K^2$. Der Mantel eines Kegels berechnet sich mit $M_{Ke} = \pi r_{Ke} s$. Eine weitere Angabe ist, dass der Kugeldurchmesser gleich der Kegelhöhe ist, also $d_K = 2r_K = h_{Ke}$. Damit haben wir nun

$$O_K = M_{Ke} \Rightarrow 4\pi r_K^2 = \pi r_{Ke} s \Rightarrow r_{Ke} = \frac{4r_K^2}{s}.$$

Wir haben nach dem Kegelradius aufgelöst, da wir diesen zur Berechnung des Kegelvolumens benötigen. Es fehlt noch die Mantellinie s. Es ist

$$s=\sqrt{h_{Ke}^2+r_{Ke}^2}=\sqrt{(2r_K)^2+\left(\frac{4r_K^2}{s}\right)^2} \Rightarrow s^2 = 4r_K^2+\frac{16r_K^4}{s^2} \Rightarrow s^4-4r_K^2 s^2-16r_K^4=0.$$

Wir substituieren $u := s^2$ und erhalten dadurch

$$u^2 - 4r_K^2 u - 16r_K^4 = 0\,.$$

Diese Gleichung lösen wir mit der Mitternachtsformel.

$$u_{1/2} = \frac{4r_K^2 \pm \sqrt{16r_K^4 + 64r_K^4}}{2} = \frac{4r_K^2 \pm \overbrace{\sqrt{80}}^{=\sqrt{16\cdot 5}}\, r_K^2}{2} = \left(2 \pm 2\sqrt{5}\right) r_K^2\,.$$

Da wir noch rücksubstituieren müssen, interessiert uns nur die Lösung mit dem Plus, welche positiv ist. Damit haben wir

$$s = \sqrt{2 + 2\sqrt{5}} \cdot r_K\,.$$

Damit ist dann der Kegelradius gegeben:

$$r_{Ke} = \frac{4r_K^2}{\sqrt{2+2\sqrt{5}} \cdot r_K} = \frac{4}{\sqrt{2+2\sqrt{5}}}\, r_K\,.$$

Die gesuchten Volumina sind:

- Kugel: $V_K = \frac{4}{3}\pi r_K^3 \approx 4{,}188790 r_K^3$.
- Kegel: $V_{Ke} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{4}{\sqrt{2+2\sqrt{5}}}\, r_K\right)^2 \cdot 2r_K = \frac{16}{3+3\sqrt{5}}\pi r_K^3 \approx 5{,}177629 r_K^3$.

Somit besitzt der Kegel das größere Volumen.

Exakt rechnet man:

$$\frac{16}{3+3\sqrt{5}} > \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{16}{4} > \frac{3+3\sqrt{5}}{3} \Rightarrow 4 > 1 + \sqrt{5} \Rightarrow 3 > \sqrt{5}$$, ist wahr, also $V_{Ke} > V_K$.

Aufgabe A8 (Wurzelgleichungen):

Bestimmen Sie die Definitionsbereiche und die Lösungen der angegebenen Gleichungen. Vergessen Sie die Probe nicht!

a) $\sqrt{x-5} = \sqrt{x+4} - 3$

b) $\sqrt{x^2-16} + \sqrt{x-4} = 0$

c) $\sqrt{x^2-16} - \sqrt{x+4} = 0$

d) $\sqrt{x^2-16} + \sqrt{x^2-9} = \sqrt{7\cdot(x+2)}$

Lösung:

a) Die Radikanden müssen immer größer gleich 0 sein. Damit folgt einerseits $x \geq 5$ aus dem Term $\sqrt{x-5}$ und andererseits $x \geq -4$ aus dem Term $\sqrt{x+4}$. Da beide Radikanden gleichzeitig größer gleich 0 sein müssen, ist $D = \{x | x \geq -5\}$ oder $D = [5;\infty)$.

Wir lösen die Wurzelgleichung: Durch Quadrieren erhalten wir

$$x-5 = x+4-2\cdot 3\cdot\sqrt{x+4}+9 \Leftrightarrow 3 = \sqrt{x+4}.$$

Nochmaliges Quadrieren liefert $9 = x+4 \Leftrightarrow x_L = 5$. Es ist $x_L \in D$ und die Probe liefert $\sqrt{5-5} = \sqrt{5+4} - 3 = 0$, womit x_L wirklich die Lösung der Wurzelgleichung ist.

b) Wir bestimmen die Definitionsmenge: Aus dem ersten Summanden ersehen wir, dass $x \geq 4$ oder $x \leq -4$ sein muss. Aus dem zweiten folgt, dass nur $x \geq 4$ gilt, womit die Definitionsmenge bestimmt ist zu $D = [4;\infty)$. Wir formen um und quadrieren:

$$\sqrt{x^2-16} = -\sqrt{x-4} \Rightarrow x^2-16 = x-4 \Leftrightarrow x^2-x-12 = 0.$$

Die Mitternachtsformel liefert

$$x_{1/2} = \frac{1\pm\sqrt{1+48}}{2} = \frac{1\pm 7}{2}.$$

Damit haben wir die Lösungen $x_1 = -3$ und $x_2 = 4$ gefunden. Es ist nur $x_2 \in D$ und wir machen auch nur hier die Probe:

$$\sqrt{4^2 - 16} + \sqrt{4 - 4} = 0 + 0 = 0.$$

Somit haben wir die einzige Lösung der Wurzelgleichung gefunden. Es ist $x_L = x_2 = 4$.

c) Wir bestimmen die Definitionsmenge: Aus dem ersten Summanden ersehen wir, dass $x \geq 4$ oder $x \leq -4$ sein muss. Aus dem zweiten folgt, dass $x \geq -4$ gelten muss, womit die Definitionsmenge bestimmt ist zu $D = [4; \infty) \cup \{-4\}$. Wir formen um und quadrieren:

$$\sqrt{x^2 - 16} = \sqrt{x + 4} \Rightarrow x^2 - 16 = x + 4 \Leftrightarrow x^2 - x - 20 = 0.$$

Die Mitternachtsformel liefert

$$x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 80}}{2} = \frac{1 \pm 9}{2}.$$

Damit haben wir die Lösungen $x_1 = -4$ und $x_2 = 5$ gefunden. Es sind $x_1 \in D$ und $x_2 \in D$. Wir machen die Probe:

$$\sqrt{(-4)^2 - 16} - \sqrt{-4 + 4} = 0 + 0 = 0 \text{ und } \sqrt{5^2 - 16} - \sqrt{5 + 4} = 3 - 3 = 0.$$

Somit haben wir die Lösungen der Wurzelgleichung gefunden. Es sind $x_{L1} = x_1 = -4$ und $x_{L2} = x_2 = 5$.

d) Aus dem ersten Term auf der linken Seite folgt, dass $x \geq 4$ oder $x \leq -4$ sein muss. Aus dem zweiten Kandidaten folgt, dass $x \geq 3$ oder $x \leq -3$ sein muss. Und aus der rechten Seite ersehen wir, dass $x \geq -2$ gelten muss. Wir erhalten somit die Definitionsmenge $D = [4; \infty)$, da nur hier alle drei Terme definiert sind. Wir quadrieren nun beide Seiten nach einer kleinen Umformung:

$$\sqrt{x^2-16}+\sqrt{x^2-9}=\sqrt{7\cdot(x+2)} \Leftrightarrow \sqrt{x^2-16}=\sqrt{7\cdot(x+2)}-\sqrt{x^2-9}$$
$$\Rightarrow x^2-16=7\cdot(x+2)-2\cdot\sqrt{7\cdot(x+2)}\cdot\sqrt{x^2-9}+x^2-9$$
$$\Leftrightarrow -16=7x+14-2\cdot\sqrt{7\cdot(x+2)}\cdot\sqrt{x^2-9}-9$$
$$\Leftrightarrow -21=7x-2\cdot\sqrt{7\cdot(x+2)}\cdot\sqrt{x^2-9}$$
$$\Leftrightarrow 7x+21=2\cdot\sqrt{7\cdot(x+2)}\cdot\sqrt{x^2-9}$$

Wir quadrieren und erhalten dadurch und mit $7x+21=7\cdot(x+3)$

$$49\cdot(x+3)^2=4\cdot 7\cdot(x+2)\cdot(x^2-9)$$
$$\Leftrightarrow 49\cdot(x+3)^2=4\cdot 7\cdot(x+2)\cdot(x-3)\cdot(x+3)$$

Hier erkennen wir die erste Lösung $x_1=-3$. Dividieren wir nun durch $(x+3)$ so haben wir

$$49\cdot(x+3)=4\cdot 7\cdot(x+2)\cdot(x-3) \Leftrightarrow 7x+21=4\cdot(x+2)\cdot(x-3).$$

Ganz umgeformt erhalten wir schließlich die quadratische Gleichung

$$4x^2-11x-45=0.$$

Mit der Mitternachtsformel ergeben sich die Lösungen:

$$x_{2/3}=\frac{11\pm\sqrt{121+720}}{8}=\frac{11\pm 29}{8}.$$

Wir haben also die weiteren Lösungen $x_2=-\frac{9}{4}$ und $x_3=5$ gefunden. Nur x_3 liegt im Definitionsbereich und wir machen hierfür die Probe:

Links: $\sqrt{5^2-16}+\sqrt{5^2-9}=\sqrt{9}+\sqrt{16}=3+4=7$

Rechts: $\sqrt{7\cdot(5+2)}=\sqrt{49}=7$

Die Probe gelingt, $x_L=x_3=5$ ist die einzige Lösung der Wurzelgleichung.

□