Teilklausur Mathematik 1

BA Stuttgart

Technik - Elektrotechnik

Dozenten : Kessler, Baum, Schmid (TEL Gr. 1, 2, 3)

Zeit : 40 min + 5 min Einlesezeit

Hilfsmittel :
- nicht programmierbarer Taschenrechner
- 5 DIN A4 Seiten handgeschriebene Formelsammlung (keine Kopien!)

Hinweis :
- Verwenden Sie für jede Aufgabe einen eigenen Bogen !
- Schreiben Sie Ihren Namen auf jeden Bogen !
- Verwenden Sie keinen Rotstift !
- Die Aufgabenblätter sind mit abzugeben !

Aufgabe 1 (Grundlagen : 8 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösungsmenge ! Die Grundmenge ist $\mathbb{R}$.

a) $-16 = -9 \cdot (x-2)^2$

b) $6x^2 - x^3 = 9x$

c) $x^3 - 3x + 2 = 4x + 8$

d) $|x-1| \geq |x+3|$

e) $\sqrt{2x^2-1} + x = 0$

Aufgabe 2 (Analytische Geometrie : 14 Punkte)

Gegeben sind die Punkte $A(1|2|3)$, $B(6|7|0)$, $C(-2|5|3)$, $S(4|0|0)$.

a) Zeigen Sie : Das Dreieck ABC ist rechtwinklig !
Wie groß sind die drei Innenwinkel α, β und γ dieses Dreiecks ? Wie groß ist sein Flächeninhalt ?

b) Finden Sie einen weiteren Punkt D, so dass die vier Punkte A, B, C und D Eckpunkte eines Rechtecks sind !
(Hier ist eine Planskizze sinnvoll !)

c) S ist die Spitze einer Pyramide mit dem Dreieck ABC als Grundfläche.
Berechnen Sie den Volumeninhalt dieser Pyramide !

d) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene $\mathcal{E}$ in Normalenform, die orthogonal zur Ebene durch A, B und C ist sowie die Gerade durch A und C enthält !

Aufgabe 3 (Matrizen : 5 + 13 = 18 Punkte)

3.1 Bewerten Sie die folgenden Aussagen mit 1 für wahr oder 0 für falsch !

a) Jedes LGS mit genauso vielen Gleichungen wie Variablen ist eindeutig lösbar !

b) Ist eine Matrix invertierbar, dann hat sie genauso viele Zeilen wie Spalten !

c) $\underline{A} \cdot \underline{B} = \underline{A} \cdot \underline{C} \implies \underline{B} = \underline{C}$!

d) Ist $\underline{A} \cdot \underline{B} = \underline{B} \cdot \underline{A}$, dann ist $\underline{A}$ oder $\underline{B}$ Vielfaches einer Einheitsmatrix !

e) Wenn die Matrix $\underline{U}$ invertierbar ist, und das Produkt $\underline{U}^{-1} \cdot \underline{A} \cdot \underline{U}$ definiert ist, dann gilt :

$$(\underline{U}^{-1} \cdot \underline{A} \cdot \underline{U})^{10012006} = \underline{U}^{-1} \cdot \underline{A}^{10012006} \cdot \underline{U} \quad !$$

3.2 Gegeben ist das LGS

$$\begin{aligned} x_1 + p\,x_2 - x_3 &= p+1 \\ 2x_1 + (2p+1)\,x_2 - (p+2)\,x_3 &= 3p+4 \\ 3x_1 + (1+2p)\,x_2 - (2+p)\,x_3 &= 5+3p \end{aligned}$$

mit dem Parameter $p \in \mathbb{R}$.

a) Vereinfachen Sie das LGS mithilfe des Gauß-Jordan-Verfahrens so weit wie für beliebige Parameterwerte möglich !

b) Für welche $p \in \mathbb{R}$ ist das LGS
b1) eindeutig lösbar ?
b2) unlösbar ?
b3) mehrdeutig lösbar ?

c) Geben Sie die allgemeine Lösung im Fall b3) in vektorieller Form an !

Viel Erfolg

Name : (bitte ausfüllen!)

---

erreichte Punktzahl

Aufgabe 1 :		(von 8)
Aufgabe 2 :		(von 14)
Aufgabe 3 :		(von 18)
insgesamt :		(von 40)

Lösungen (Ma1 TK 10.01.2006)

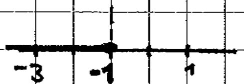
zu A1 : [8]

a) (1) $-16 = -9\cdot(x-2)^2 \Leftrightarrow x-2 = \mp\frac{4}{3} \Rightarrow \mathbb{L} = \left\{\frac{2}{3};\frac{10}{3}\right\}$ 1

b) (1,5) $6x^2 - x^3 = 9x \Leftrightarrow x\cdot(x^2-6x+9)=0 \underset{0,5}{\Leftrightarrow} x\cdot(x-3)^2=0 \Rightarrow \mathbb{L}=\{0;3\}$ 1

c) (3) $x^3-3x+2 = 4x+8 \Leftrightarrow 0 = x^3-7x-6 = (x+1)\cdot(x^2-x-6)$
$= (x+1)(x+2)(x-3) \Rightarrow \mathbb{L} = \{-2;-1;3\}$ 3

d) (1) $|x-1| \geq |x+3| \Leftrightarrow |x-1| \geq |x-(-3)|$



$\Rightarrow \mathbb{L} =]-\infty;-1]$ 1

e) (1,5) $\sqrt{2x^2-1} + x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2-1} = -x \Rightarrow 2x^2-1 = x^2 \Leftrightarrow x^2 = 1$ 0,5
$\underset{\text{Probe}}{\Rightarrow} x = -1$ bzw. $\mathbb{L} = \{-1\}$ 1

zu A2 : [14]

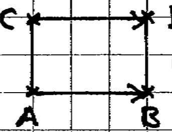
a) (6) $\vec{AB} \underset{0,5}{=} \begin{pmatrix}5\\5\\-3\end{pmatrix}$ und $\vec{AC} \underset{0,5}{=} \begin{pmatrix}-3\\3\\0\end{pmatrix}$ mit $\vec{AB}\bullet\vec{AC} = 5\cdot(-3)+5\cdot3+(-3)\cdot0 = 0 \Rightarrow \alpha = 90^\circ$ 1

$\vec{BA} \underset{0,5}{=} \begin{pmatrix}-5\\-5\\3\end{pmatrix}$ und $\vec{BC} \underset{0,5}{=} \begin{pmatrix}-8\\-2\\3\end{pmatrix} \Rightarrow \beta = \arccos\left(\frac{\vec{BA}\bullet\vec{BC}}{|\vec{BA}|\cdot|\vec{BC}|}\right) = \arccos\left(\frac{59}{\sqrt{59}\cdot\sqrt{77}}\right)$
$\approx 28{,}91^\circ$ 1

$\Rightarrow \gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 90^\circ - \beta \approx 61{,}09^\circ$ 1

Flächeninhalt : $\frac{1}{2}\cdot|\vec{AB}|\cdot|\vec{AC}| = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{59}\cdot 3\sqrt{2} = \frac{3}{2}\sqrt{118} \approx 16{,}29$ (FE) 1

b) (2)



1 $\vec{OD} = \vec{OC} + \vec{AB} = \begin{pmatrix}-2\\5\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\5\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\10\\0\end{pmatrix} \Rightarrow D(3|10|0)$! 1

(fürs Rechteck ABDC !)

c) (4) $V \underset{0,5}{=} \frac{1}{6}\,|(\vec{AB}\times\vec{AC})\bullet\vec{AS}|$ mit $\vec{AB}\times\vec{AC} = \begin{pmatrix}5\\5\\-3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-3\\3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\9\\30\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}3\\3\\10\end{pmatrix}$ 1

und $\vec{AS} = \begin{pmatrix}4-1\\0-2\\0-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-2\\-3\end{pmatrix}$ 0,5 $\Rightarrow V = \frac{1}{6}|3\cdot(9-6-30)| = \frac{27}{2} = 13{,}5$ (VE) 1 1

d) (2) $\mathcal{E}$ mit $\vec{n}_{\mathcal{E}} \sim (\vec{AB}\times\vec{AC})\times\vec{AC} = 3\begin{pmatrix}3\\3\\10\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-3\\3\\0\end{pmatrix} = 9\begin{pmatrix}3\\3\\10\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = 9\begin{pmatrix}-10\\-10\\6\end{pmatrix}$

also z.B. $\vec{n}_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix}5\\5\\-3\end{pmatrix}$ 1 $\Rightarrow \mathcal{E} : \begin{pmatrix}5\\5\\-3\end{pmatrix}\bullet\left[\vec{x} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right] = 0$! 1

zu A3 :

3.1 [5] a) (1) 0 b) (1) 1 c) (1) 0 d) (1) 0 (auch $\underline{B} = \underline{A}^{-1}$) e) (1) 1

3.2 [13] a) (7) 2 (Reihenfolge) + 1

			x_1	x_2	x_3		
			3	2p+1	−(p+2)	3p+5	$\mid - Z_2$
			2	2p+1	−(p+2)	3p+4	$\mid - 2\cdot Z_3$
			1	p	−1	p+1	2
1	−1	0	1	0	0	1	
0	1	−2	0	1	−p	p+2	
0	0	1	1	p	−1	p+1	$\mid - Z_1 - p\cdot Z_2$ 2
1	0	0	1	0	0	1	
0	1	0	0	1	−p	p+2	Endschema
−1	−p	1	0	0	(p+1)(p−1)	−p·(p+1)	

b) (4) 1) eindeutig für $p \in \mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ 2 2) nicht für $p = 1$ (0 = −2 ↯) 1
3) mehrdeutig für $p = -1$ (0 = 0 ✓) 1

c) (2) Für $p = -1$ ist

1 $Z_1 : x_1 = 1$
$Z_2 : x_2 = 1 - x_3 \Leftrightarrow \mathbb{L}_{p=-1} : \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\cdot x_3$ 1
$Z_3 : x_3 = x_3$ $x_3 \in \mathbb{R}$