1. Gegeben ist die stückweise definierte Funktion f.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{falls } x < -5 \\ 4x+1 & \text{falls } -5 \le x < 4 \\ 2\sqrt{x} & \text{falls } 4 \le x \end{cases}$$

   Berechne

   (a) $f(0)$ (b) $f(-10)$ (c) $f(4)$ (d) $f(1)$ (e) $f(-5)$

2. Ist die Funktion f an der Stelle x_0 stetig?

   (a) $f(x) = 4x+3$ $\quad x_0 = 0$

   (b) $f(x) = \sqrt{x^2}$ $\quad x_0 = 0$

   (c) $f(x) = 1/x$ $\quad x_0 = -1$

   (d) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x \ge 0 \end{cases}$ $\quad x_0 = 4$

   (e) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{für } x \ne 1 \\ 2 & \text{sonst} \end{cases}$ $\quad x_0 = 1$

   (f) $f(x) = \begin{cases} 4x-5 & \text{für } x \le 3 \\ 2x+1 & \text{für } x > 3 \end{cases}$ $\quad x_0 = 3$

   (g) $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x} & \text{für } x \ne 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ $\quad x_0 = 0$

3. An welchen Stellen ihres Definitionsbereichs ist die Funktion f nicht differenzierbar?

   (a) $f(x) = \sqrt{(x-3)^2}$

   (b) $f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}-2 & \text{für } 0 < x < 1 \\ \ln x & \text{für } x \ge 1 \end{cases}$

   (c) $f(x) = \sqrt{5-x^2}$

4. Für welchen Wert von a ist die Funktion an der Stelle $x_0 = 2$ stetig?

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2+3x+1 & \text{für } x < 2 \\ x^3+ax-4 & \text{für } x \ge 2 \end{cases}$$

5. Für welche Werte der Parameter a und b ist die Funktion f an der Stelle $x_0 = 0$ differenzierbar?

$$f(x) = \begin{cases} a\sin x + b\cos x + b + 1 & \text{für } x < 0 \\ b\mathrm{e}^{x} + a\mathrm{e}^{-x} + 4x & \text{für } x \ge 0 \end{cases}$$

1. (a) $f(0) = 4 \cdot 0 + 1 = 1$
   (b) $f(-10) = (-10)^2 = 100$
   (c) $f(4) = 2\sqrt{4} = 4$
   (d) $f(1) = 4 \cdot 1 + 1 = 5$
   (e) $f(-5) = 4 \cdot (-5) + 1 = -19$

2. (a) stetig, da alle Polynomfunktionen stetig sind.
   (b) stetig, da es sich um eine Verkettung stetiger Funktionen handelt.
   (c) Nicht stetig, da die Funktion an der Stelle $x_0 = -1$ nicht definiert ist. Eine Stellen, an der man durch Null dividiert, nennt man in der Mathematik auch eine *Singularität*.
   (d) stetig da $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = f(4)$ (von links wie auch von rechts).
   (e) stetig, da $f(1) = 2$ und $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}(x+1) = 2$
   (f) stetig, da $f(3) = 4 \cdot 3 - 5 = 7$ und $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} (2x+1) = 7$
   (g) nicht stetig, da $f(0) = 0$ und $\lim_{x\to 0^-} \mathrm{e}^{-1/x} = \mathrm{e}^{\infty} = \infty$

3. (a) Die Funktion f ist an der Stelle $x = 3$ nicht differenzierbar.
   (b) $f'(x) = \begin{cases} 1/\sqrt{x} & \text{für } 0 < x < 1 \\ 1/x & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$ problematische Stelle: $x_0 = 1$:
   $f'(1) = \dfrac{1}{1} = 1$ und $\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 1 \quad \Rightarrow \quad$ differenzierbar
   (c) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{5-x^2}} \cdot (-2x) = \dfrac{-x}{\sqrt{5-x^2}}$
   Die Funktion f ist an den Stellen $x = \sqrt{5}$ und $x = -\sqrt{5}$ nicht differenzierbar. (die Steigung an diesen Stellen ist unendlich gross.)

4. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = f(2) \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2^-} (2x^2 + 3x + 1) = 8 + 2a - 4 \Rightarrow 15 = 4 + 2a \Rightarrow a = 5.5$

5. (a) Die Grenzwerte der Steigungen müssen an der Stelle x_0 übereinstimmen:
   $$f'(x) = \begin{cases} a\cos x - b\sin x & \text{für } x < 0 \\ b\mathrm{e}^x - a\mathrm{e}^{-x} + 4 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$
   $$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = f'(0) \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0^-} (a\cos x - b\sin x) = b\mathrm{e}^0 - a\mathrm{e}^0 + 4$$
   $$\Rightarrow \quad a = b - a + 4 \quad \Rightarrow \quad 2a - b = 4 \quad (**)$$
   (b) Die Grenzwerte der Funktionswerte müssen an der Stelle x_0 übereinstimmen:
   $$\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} (a\sin x + b\cos x + b + 1) = b\,\mathrm{e}^0 + a\,\mathrm{e}^0 + 4 \cdot 0$$
   $$\Rightarrow b + b + 1 = b + a \quad \Rightarrow \quad b - a = -1 \quad (*)$$
   Lösung von $(*)$ und $(**)$: $a = 3$, $b = 2$