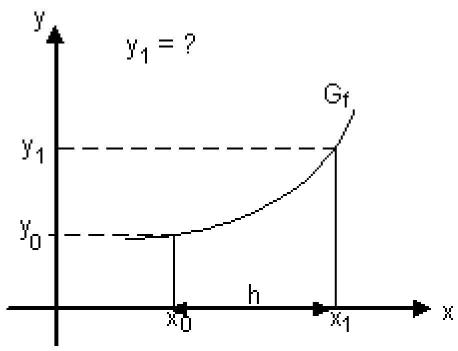
Numerische Lösung von Differentialgleichungen

(s. auch Applet auf www.mathematik.ch)

Voraussetzungen und Zielsetzung

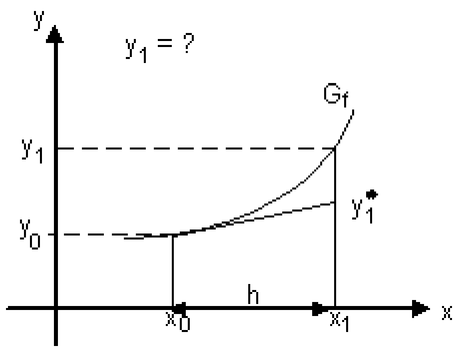
Wir kennen bereits von früher her die Differentialgleichung (DGL) $y' = g(y) = ky$ mit ihrer exakten Lösungsgesamtheit $y = f(x) = Ce^{kx}$ ($C \in \mathbb{R}$)
Wir werden uns später mit weiteren Differentialgleichungen befassen und ihre exakten Lösungen suchen. Hier geht es um die numerische Lösung.



Voraussetzung: Gegeben sei eine DGL der Form $y' = g(x,y)$ mit der Anfangsbedingung $y_0 = f(x_0)$. (Startpunkt (x_0 / y_0))

Gesucht: Funktionswert $y_1 = f(x_1)$ an der Stelle $x_1 = x_0 + h$

1. Methode von Euler (Linearisierung)



$y_0' = g(x_0, y_0)$ gibt die Steigung der Tangente an den (gesuchten) Graphen G_f im Punkt (x_0 / y_0) an.

Daher gilt: $\dfrac{y_1{}^* - y_0}{x_1 - x_0} = g(x_0, y_0)$

Mit $h = x_1 - x_0$ folgt:

$$\boxed{y_1 \approx y_1{}^* = y_0 + h\, g(x_0, y_0) := y_0 + h\, g_0}$$

Berechnet man auf diese Weise y_2 für $x_2 = x_1 + h$, dann y_3 usw., so wird der Fehler i.a. viel zu gross, d.h. das Euler-Verfahren ist in der Praxis unbrauchbar.

2. Methode von Heun

Man integriert die Differentialgleichung $y' = \dfrac{dy}{dx} = g(x,y)$ auf beiden Seiten über das Intervall $[x_0, x_1]$ nach x :

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{dy}{dx}\, dx = \int_{x_0}^{x_1} g(x,y)\, dx$$

$f(x_1) - f(x_0) = y_1 - y_0 = \int_{x_0}^{x_1} g(x,y)\,dx$, also $\quad y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x_1} g(x,y)\,dx$

Das bestimmte Integral $\int_{x_0}^{x_1} g(x,y)\,dx$ wird nun mit Hilfe der Trapezregel für n = 1 (s. Numerische Integration T(1)) berechnet:

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}\left(g(x_0, y_0) + g(x_1, y_1) \right)$$

Dabei ist zu beachten, dass der (unbekannte!) Wert y_1 benützt werden muss. Dieser Wert wird mit Hilfe der Euler-Methode durch y_1^* approximiert:
$y_1^* = y_0 + h\, g(x_0, y_0) := y_0 + h\, g_0$

Definiert man $g_1^* := g(x_1, y_1^*)$, so gilt in der Kurzform:

$$\boxed{\text{Methode von Heun:} \quad y_1 = y_0 + \frac{h}{2}(g_0 + g_1^*) \quad \text{mit} \quad y_1^* = y_0 + h\, g_0}$$

Damit kann nun analog y_2 für $x_2 = x_1+h$, dann y_3 usw. berechnet werden. Eventuell muss die Schrittweite h bei den weiteren Schritten angepasst werden!

Beispiel

Gegeben: DGL $y' = g(x,y) = -xy$, $\quad x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $h = 0.1$, also $x_1 = 0.1$

Gesucht: $y_1 = f(0.1) = ?$

Lösung:

$g_0 = g(x_0, y_0) = g(0,1) = -0 \cdot 1 = 0$, $\quad y_1^* = 1 + 0.1 \cdot 0 = 1$ (Lösung nach Euler!)

$g_1^* = g(x_1, y_1^*) = g(0.1,1) = -0.1$

$y_1 \approx y_0 + \frac{h}{2}(g_0 + g_1^*) = 1 + 0.05 \cdot (0 - 0.1) = \underline{0.995}$

{Nebenbei: Die exakte Lösung der DGL mit der genannten Anfangsbedingung ist $y = f(x) = e^{\frac{-x^2}{2}}$, der 'exakte' Wert für y_1 also $y_1 = 0.9950124792\ldots$ }

Aufgabe:
Man gehe vom obenstehendem Beispiel und vom Wert $y_1 = 0.995$ für $x_1 = 0.1$ aus und berechne mit der Methode von Heun den Wert $y_2 = f(0.2)$.

3. Methode von Runge-Kutta

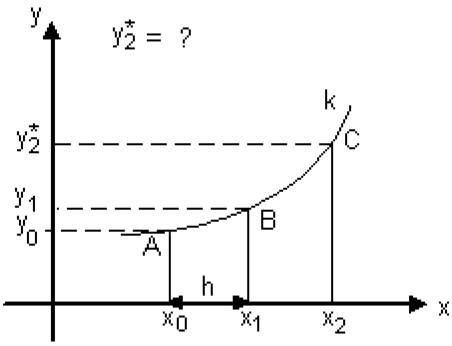
Wie bei der Methode von Heun integriert man die Differentialgleichung $y' = g(x,y)$. Das bestimmte Integral wird nun aber nicht mit der Trapez- sondern mit der Simpsonregel (s. Numerische Integration S(2)) berechnet. Dies bedingt aber, dass man über das Doppelintervall $[x_0, x_2]$ mit $x_2 = x_0 + 2h$ integrieren muss. Folglich muss zusätzlich der Wert $y_1 = f(x_1) = f(x_0 + h)$ bekannt sein. Dieser Wert y_1 wird mit dem Verfahren von Heun berechnet. Es gilt dann:

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x_2} g(x,y)\,dx = y_0 + \frac{h}{3}\left(g(x_0, y_0) + 4g(x_1, y_1) + g(x_2, y_2^*) \right)$$

mit y_2^* als Näherungswert für das gesuchte y_2.

Abgekürzt: $y_2 := y_0 + \frac{h}{3}\left(g_0 + 4g_1 + g_2^* \right)$

Zur Berechnung von y_2^*:



Da man $A(x_0, y_0)$, wegen der Methode von Heun $B(x_1, y_1)$ und die Werte der Ableitungen $f'(x_0) = g(x_0,y_0) = g_0$ und $f'(x_1) = g(x_1,y_1) = g_1$ kennt, so kann man den Graphen G_f durch eine Polynomfunktion k dritten Grades annähern:

k: $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Man erhält die folgenden vier Gleichungen für die vier Unbekannten a, b, c und d:

$y_0 = ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d$

$y_1 = ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d$ mit $x_1 = x_0 + h$

$g_0 = 3ax_0^2 + 2bx_0 + c$

$g_1 = 3ax_1^2 + 2bx_1 + c$ mit $x_1 = x_0 + h$

Als Resultat für y_2^* folgt:

$y_2^* = P(x_2) = P(x_0 + 2h) = 5y_0 - 4y_1 + 2h\,g_0 + 4h\,g_1$ (Beweis als Aufgabe!)

Es gilt also für y_2:

$y_2 = y_0 + \frac{h}{3}\left(g_0 + 4g_1 + g_2^* \right)$ mit $y_2^* = 5y_0 - 4y_1 + 2h\,g_0 + 4h\,g_1$

Setzt man den gemäss Methode von Heun berechneten Wert für y_1

$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}\left(g_0 + g_1^* \right)$ mit $y_1^* = y_0 + h\,g_0$ bei y_2^* ein, so gilt:

$$\begin{aligned} y_2^* &= 5y_0 - 4\left(y_0 + \tfrac{h}{2}(g_0 + g_1^*)\right) + 2h\,g_0 + 4h\,g_1 = \\ &= 5y_0 - 4y_0 - 2h\,g_0 - 2h\,g_1^* + 2h\,g_0 + 4h\,g_1\,, \end{aligned}$$

also $y_2^* = y_0 - 2h\,g_1^* + 4h\,g_1$ mit $y_1^* = y_0 + h\,g_0$

Nun fasst man die zwei Integrationsschritte zu einem einzigen zusammen, d.h. 2h wird durch h, g_1 durch $g_{1/2}$, y_1 durch $y_{1/2}$, g_2 durch g_1 und y_2 durch y_1 ersetzt:

$$y_{1/2}^* = y_0 + \frac{h}{2} g_0 \,,\quad y_{1/2} = y_0 + \frac{h}{4}(g_0 + g_{1/2}^*), \quad y_1^* = y_0 - h\, g_{1/2}^* + 2h\, g_{1/2}$$
$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}(\, g_0 + 4g_{1/2} + g_1^*)\,)$$

Mit den folgenden Definitionen für k_1 bis k_4 erhält man so die Formeln für die Methode 'Runge-Kutta 1. Art':

$$k_1 := h\, g_0 = h\, g(x_0, y_0) \quad,\quad k_2 := h\, g(x_0 + \tfrac{h}{2}, y_0 + \tfrac{k_1}{2}) \,,$$
$$k_3 := h\, g(x_0 + \tfrac{h}{2}, y_0 + \tfrac{k_1}{4} + \tfrac{k_2}{4}) \,,\quad k_4 := h\, g(x_0 + h, y_0 - k_2 + 2k_3)$$

$$\mathbf{y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(\, k_1 + 4k_3 + k_4)}$$

In der DMK-Formelsammlung stehen die (praxisnäheren) Formeln für die Methode 'Runge-Kutta 2. Art':

$$i := 0$$
$$k_1 := h\, g(x_i, y_i) \quad,\quad k_2 := h\, g(x_i + \tfrac{h}{2}, y_i + \tfrac{k_1}{2}) \,,$$
$$k_3 := h\, g(x_i + \tfrac{h}{2}, y_i + \tfrac{k_2}{2}) \,,\quad k_4 := h\, g(x_i + h, y_i + k_3)$$
$$i := i+1$$
$$x_i = x_{i-1} + h$$

$$\mathbf{y_i = y_{i-1} + \frac{1}{6}(\, k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)}$$

Beachten Sie eine eventuelle Steuerung der Schrittweite!

Beispiel (nach Runge-Kutta 2. Art)

Gegeben: DGL $y' = g(x,y) = -\,xy$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $h = 0.1$, also $x_1 = 0.1$

Gesucht: $y_1 = f(0.1) = ?$

Lösung:

$k_1 = h\, g(x_0, y_0) = -0.1 \cdot 0 \cdot 1 = 0$, $k_2 = h\, g(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}) = -0.1 \cdot 0.05 = -0.005$

$k_3 = h\, g(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}) = -0.1 \cdot 0.05 \cdot 0.9975 = -0.0049875$

$k_4 = h\, g(x_0 + h, y_0 + k_3) = -0.1 \cdot 0.1 \cdot 0.9950125 = -0.009950125$

$y_1 \approx y_0 + \frac{1}{6}(\, k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 1 + \frac{1}{6}(-0.029925125) \approx \underline{0.99501247917}$