I. Folgen und Reihen

I.1 Grundlagen

Grundsätzliche Spielregeln:

- Spielregel 1: Zur Symbolik
  - natürliche Zahlen mit der Null:

    $\mathbb{N} :=$
  - natürliche Zahlen ohne die Null:

    $\mathbb{N}_{>0} :=$

- Spielregel 2: Indizes

  Die Buchstaben n, i, j, k bezeichnen ausschließlich natürliche Zahlen, wenn nichts anderes erwähnt ist

- Spielregel 3: Folgen und Folgenglieder
  - (a_n)
  - a_n

I.1.1 Darstellungsformen von Folgen

① rekursive Darstellung: Aktuelles Folgenglied wird durch eine Kombination der vorangegangenen Folgenglieder angegeben

Beispiel:

② explizite Darstellung: Angabe erfolgt direkt durch eine Formel mit $a_n = a(n)$, d.h. die Folgenglieder werden in Abhängigkeit vom Index (hier: n) angegeben

Beispiel:

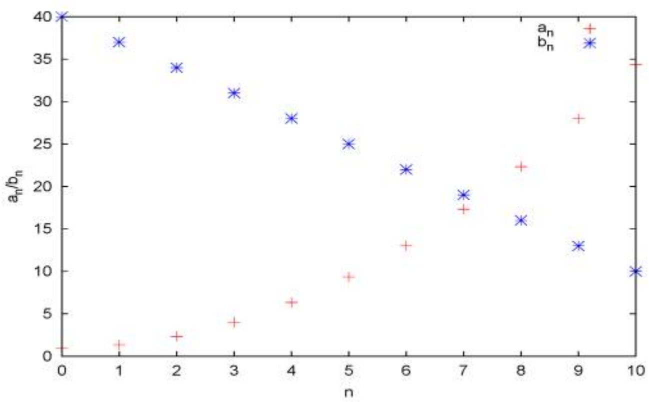
Es folgt die Untersuchung von Folgen.

I 1 2 Monotonie bei Folgen

Definition:

Beispiel: $a_n = 1 + \frac{n^2}{3}$; $b_n = 40 - 3n$

Wert



Nummer Folgenglied

I.1 3 Nachweis der Monotonie

Mögliche Kriterien.

1. **Differenzenkriterium.**

$$a_{n+1} - a_n \left\{ \right.$$

2. **Quotientenkriterium:**

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \left\{ \right.$$

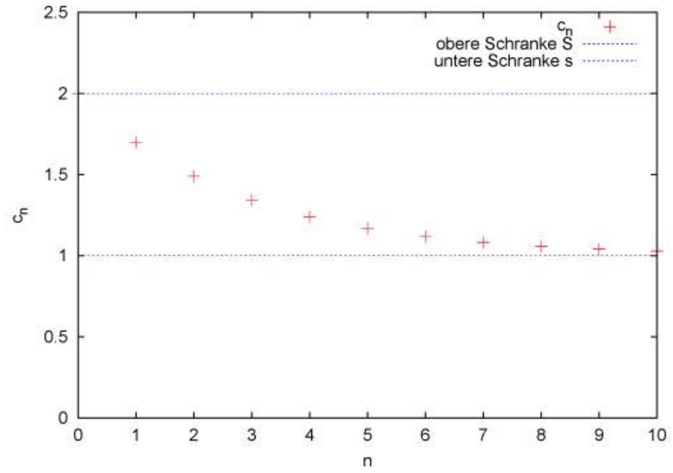
Beispiel (a_n) mit $a_n = \frac{1-2n}{n}$

Anwenden des Differenzenkriteriums:

I.1.4 Beschränktheit

Definition:

Beispiel. Gegeben ist (c_n) mit $c_n = 1 + 0{,}7^n$ und $n \in \mathbb{N}$.



Zu den Begriffen.

-
-
-

I.2 Grenzwert einer Folge

I.2.1 Definition des Grenzwertes

Definition:

? FRAGE ? Wie weise ich nach, dass es nur endlich viele Folgenglieder nicht in den sog. ε-Schlauch schaffen?

! ANTWORT!

Beispiel: (a_n) mit $a_n = \dfrac{n + (-1)^n}{4n}$ mit $n \in \mathbb{N}_{>0}$

Ermittlung des Grenzwertes (Limes):

[siehe hierzu Kap I.3]

Nachweis:

I.2.2 Zwei Sätze und ein paar Begriffe

Satz 1:

Satz 2:

Begriffe, die man können sollen muss:

- zur Notation. $g = \lim_{n \to \infty} a_n$
- eine Folge mit Grenzwert nennen wir konvergent.
- eine Folge ohne Grenzwert nennen wir divergent.
- $g=0$, so nennen wir (a_n) eine Nullfolge.

I.3 Grenzwertsätze

zwingende Voraussetzung!

Sind die Folgen (a_n) und (b_n) beide konvergent mit den Grenzwerten a und b, so sind auch die Folgen $(a_n \pm b_n)$, $(a_n \cdot b_n)$ und, sofern alle $b_n \neq 0$ und $b \neq 0$, auch die Folge $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ konvergent. Es gilt:

-
-
-

Für rekursive Folgen nützlich:

Beispiel: Die Folge (b_n) mit $b_{n+1} = \frac{1}{2}\left(b_n + \frac{2}{b_n}\right)$ und $b_1 = 2$ ist konvergent mit dem Grenzwert g. Bestimmen Sie diesen.

I.4 Arithmetische und geometrische Folgen

I.4.1 Arithmetische Folgen – Teil I

Rekursiv. Es ist $n \in \mathbb{N}$ und $d \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Für eine arithmetische Folge (a_n) gilt

a_0 ist hierbei gegeben.

Explizit.

explizite Darstellung.

Hinweis.

I.4.2 Geometrische Folgen – Teil I

Rekursiv: Es ist $n \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Für eine geometrische Folge (a_n) gilt

Gegeben ist wieder a_0.

Explizit.

explizite Darstellung:

I 5 Vollständige Induktion

Die vollständige Induktion wurde bereits im 1. Semester behandelt. Zur Erinnerung lösen Sie bitte die folgende Aufgabe

Übung: Zeigen Sie: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n\,(n+\frac{1}{2})\,(n+1)}{3}$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

I.5.1 Arithmetische Folgen II

Neuer Begriff: **Reihe**

Auch bei dieser neuen Zahlenfolge können wir nach dem Grenzwert fragen.

!WICHTIG! Hat (s_n) einen Grenzwert, so muss (a_k) eine Nullfolge sein. Ist aber (a_k) eine Nullfolge, so hat (s_n) nicht zwangsläufig einen Grenzwert!

Beispiel:

Wir bilden die Reihe zur arithmetischen Folge und erhalten so die **arithmetische Summenformel**:

(a_k) mit $a_k = a_0 + k\cdot d$

$\Rightarrow$ $\boxed{}$

I 5.2 Geometrische Folgen II

Wir betrachten (a_k) mit $a_k = a_0 q^k$.

$\Rightarrow$ Geometrische Reihe:

Wir wollen nun einen praktischeren Ausdruck für den letzten Term finden:

Für $|q| < 1$ existiert nun also ein Grenzwert (Wert der Reihe), denn mit $q^{n+1} \to 0$ für $n \to \infty$ folgt

$\boxed{}$

I.5.3 Bestimmung von Reihenwerten oder Nachweis von Konvergenz

Die Bestimmung des Grenzwertes einer Reihe ist i.A viel schwerer als bei einer „normalen" Folge. Es ist vielmehr so, dass der Wert einer Reihe nur in seltenen Fällen bestimmt werden kann. Solche Fälle wollen wir uns hier anschauen.

1 **Teleskopsummen** Haben Partialsummen einer Reihe die Form von Teleskopsummen, so heben sich durch die paarweise unterschiedlichen Vorzeichen der beteiligten Summanden alle weg bis auf den ersten und den letzten.

Teleskopsummen:

Folgerichtig ergibt sich mit Hilfe der Grenzwertsätze:

Beispiel. Bestimmen Sie den Wert der Reihe $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

② **Monotoniekriterium.**
Wir betrachten die Reihe $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)$. Nun existiere ein Index $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_n \in \mathbb{R}_0^+$ für alle $n \geq n_0$ und eine Schranke $S>0$. Ist dann

so konvergiert die Reihe.

③ **Majoranten- und Minorantenkriterium:**
Durch Vergleiche mit bereits bekannten Reihen können wir Aussagen über die Konvergenz bzw. Divergenz der gerade untersuchten Reihe machen. Mathematisch formulieren wir das so:

Für eine Reihe $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)$ mit $a_n \in \mathbb{C}$ (sogar komplex!) gelten folgende Konvergenzaussagen:

-
-

__Beispiel:__

Zu unterscheiden ist generell, ob wir den Grenzwert bestimmen wollen oder ob wir nur die Konvergenz feststellen wollen. Letzteres ist meistens schon schwer genug.
Die Punkte ② und ③ fallen unter die sog. indirekten Kriterien. Weitere sog. direkte Kriterien zum Konvergenznachweis sind:

④ **Quotientenkriterium:**

⑤ **Wurzelkriterium.**

Beispiele: • Für die Reihe $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}\right)$ gilt

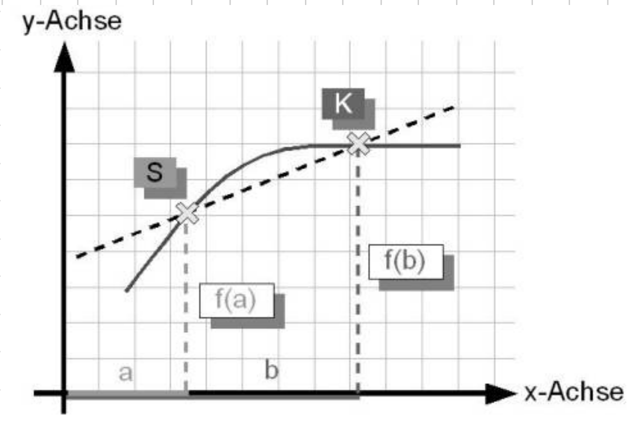
• Für die Reihe $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\right)$ gilt

II. Differentialrechnung

II.1 Differenzen- und Differentialquotient

Die durchschnittliche Änderungsrate

Skizze zur Änderungsrate:



Verfeinerung: $b \to a$ (Grenzwert bilden): 2 Methoden

1. Methode: x-Methode $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \longrightarrow$ Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{df}{dx}\Big|_{x_0} = f'(x_0)$$

2. Methode: h-Methode: $a = x_0 \land b = x_0 + h$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

ZUSATZ A

Beispiel (optional): Ableiten mit der x-Methode

Vorgegeben: Funktion f mit $f(x) = x^3$

$$\hookrightarrow f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{}$$

für $x \to x_0$ unbestimmter Ausdruck „$\frac{0}{0}$"

Umgangen wird das Ganze mit dem Horner-Schema oder der Polynomdivision.

Einschub: Horner-Schema → Extra-PDF Zusatz A1

Mit Polynomdivision:

Jetzt ist die Grenzwertberechnung möglich.

Mit Horner-Schema: Auswerten von $f(x) = 3x^3 - 3x_0^3$ für $x - x_0 = 0 \Rightarrow x = x_0$

↑ Laufvariable

Koeffizienten:

ZUSATZ ENDE A

I.2 Die Ableitung einer Potenzfunktion und die Tangentengleichung

gesucht: $f'(x)$ von $f(x) = x^n$ (mit $n \in \mathbb{N}_{>0}$, später $\in \mathbb{R}$)

Herleitung mit h-Methode und Binomialkoeffizient → ZUSATZ B

Ableitung einer Potenzfunktion:

Da die Ableitung einer Funktion an einer Stelle x_0 als Steigung der Funktion bzw. ihres Schaubildes in diesem Punkt $S(x_0 / f(x_0))$ interpretiert werden kann (siehe Überlegungen zum Differenzialquotienten), können wir über die **Punkt-Steigungs-Form (PSF)** für Geraden direkt die Tangente an das Funktionsschaubild in S aufstellen, d.h. den Funktionsterm angeben.

Gegeben. Steigung m und Punkt $S(x_0/y_0)$ ⇒ PSF:

$$g(x) = m\cdot(x-x_0)+y_0 = mx + \underbrace{y_0 - m x_0}_{y\text{-Achsenabschnitt}}$$

Bei einer Funktion f: Funktionsterm $f(x)$ und $S(x_0 / \underbrace{f(x_0)}_{y_0})$ gegeben:

übertragen

Tangente in S an Schaubild K_f von f.

$$t(x) = f'(x_0)\cdot(x-x_0) + f(x_0)$$

Tangentengleichung

EXTRA: Sind zwei Geraden orthogonal zueinander (schneiden sich im rechten Winkel), so gilt für ihre Steigungen m_1 und m_2, dass

$$m_1 \cdot m_2 = -1.$$

Angewandt auf die eben aufgestellte Tangente erhalten wir hiermit die sog. Normalensteigung:

$$m_t \cdot m_n = -1 \iff m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{f'(x_0)}$$

Die PSF liefert die Normalengleichung:

$$n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x-x_0)+f(x_0)$$

Normalengleichung

Herleitung Potenzfunktionsableitung (optional): || ZUSATZ B

Gegeben: f mit $f(x) = x^n$

Pascalsches Dreieck, Binomialkoeffizienten

h-Methode: $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

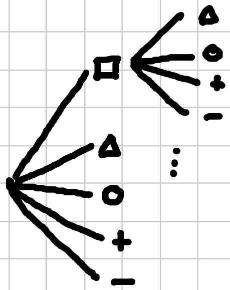
$$= \frac{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} x^{n-k}\cdot h^k - x^n}{h}$$

Exkurs: Binomialkoeffizient

$\underbrace{\square \ \triangle \ \bigcirc \ + \ -}$ 5 Elemente

Wie viele Möglichkeiten gibt es, 3 von ihnen auszuwählen?

$\Rightarrow$ Baumdiagramm:



← $5-1=4$ Stück

...

Bei 3 Zügen:
$5 \cdot 4 \cdot 3$ Möglichkeiten

Fakultät

Andere Notation: $5 \cdot 4 \cdot 3 = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \dfrac{\boxed{5!}}{2!} = \dfrac{5!}{(5-3)!}$

Allgemein:

Was ist, wenn die Reihenfolge nicht zählt?

□ △ ○
□ ○ △
△ □ ○
△ ○ □
○ □ △
○ △ □

$3! = 6$ Möglichkeiten der Anordnung
$\Rightarrow$ Diese sind abzudividieren

von oben

Also: $\dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = \dfrac{5!}{3!\,2!} = \dfrac{5!}{3! \cdot (5-3)!}$

Allgemein:

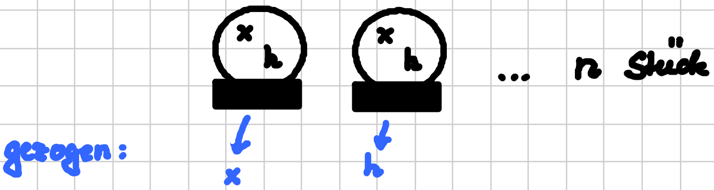
Übertragen wir das auf $(x+h)^n$:

$$(x+h)^n = \underbrace{(x+h) \cdot (x+h) \cdot \ldots \cdot (x+h)}_{n \text{ Faktoren}}$$

Ausmultipliziert ergibt das $\boxed{?}\, x^n + \boxed{?}\, x^{n-1} h + \boxed{?}\, x^{n-2} \cdot h^2 + \ldots + \boxed{?}\, x h^{n-1} + \boxed{?}\, h^n$ unbekannte Koeffizienten

(*)

Mit dem Urnenmodell aus der WT können wir die „?" bestimmen:



WICHTIG: Aus n Urnen werden k-mal x und $(n-k)$-mal h gezogen. Aus welchen, das ist egal (keine Reihenfolge)!

$\Rightarrow$ Wenn man k-mal x ziehen will, dann geschieht dies auf $\binom{n}{k}$ Arten, weil die Multiplikation und Addition kommutativ sind. Das sind gerade die „?" in (*).

$$\Rightarrow \binom{n}{0}\cdot x^n + \binom{n}{1} x^{n-1}\cdot h + \ldots + \binom{n}{n-1}\cdot x\cdot h^{n-1} + \binom{n}{n}\cdot h^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\cdot x^{n-k} h^k$$

Exkurs Ende

zurück zur Herleitung:

$$\frac{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} x^{n-k} h^k - x^n}{h} = \frac{\cancel{\overbrace{\binom{n}{0}}^{=1}\cdot x^n} + \overbrace{\binom{n}{1}}^{=n}\cdot x^{n-1}\cdot h + \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k} x^{n-k} h^k \cancel{- x^n}}{h}$$

$$= \frac{n\cdot x^{n-1}\cdot h + \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\cdot x^{n-k}\cdot h^k}{h} \underset{h \text{ kürzen}}{=} n\cdot x^{n-1} + \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\cdot x^{n-k}\cdot h^{k-1}$$

$h, h^2, h^3, \ldots, h^{n-1}$

Grenzwert bilden:

$$\lim_{h\to 0}\left(n\, x^{n-1} + \cancel{\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\cdot x^{n-k}\cdot h^{k-1}}\right) = n\, x^{n-1} = f'(x)$$

jeder einzelne Summand $\to 0$, Grenzwertsätze

$\square$

ZUSATZ ENDE B

II.3 Weitere Ableitungsregeln

- **Summenregel:**

- **Faktorregel:**

- **Produktregel:**
  PR

- **Kettenregel:**
  KR

- **Quotientenregel:**
  QR

Übung: Leiten Sie die QR mit der PR und der KR her.

Einschub: Herleitungen der Regeln mit der h-Methode → Extra-PDFs + Bedeutung der Ableitungen

Zusatz C

III. Exponentialfunktionen und Hyperbelfunktionen

III.1 Grundlagen

Potenzgesetze:
1
2
3
4
5

5 Potenzgesetze

Exponentialfunktionen

III.2 Ableiten von Exponentialfunktionen

Die Herleitungen zu den folgenden Regeln sind im Anschluss zu finden.

Ableitung einer Exponentialfunktion mit Basis e:

Ableitung einer Exponentialfunktion:

Herleitung (optional): ZUSATZ

h-Methode.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{a^{x+h}-a^x}{h} = a^x \cdot \frac{a^h-1}{h}$$

Grenzübergang: $\lim\limits_{h\to 0}\left(a^x \cdot \frac{a^h-1}{h}\right) = a^x \cdot \underbrace{\lim\limits_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}}_{\text{Grenzwert } a_g}$

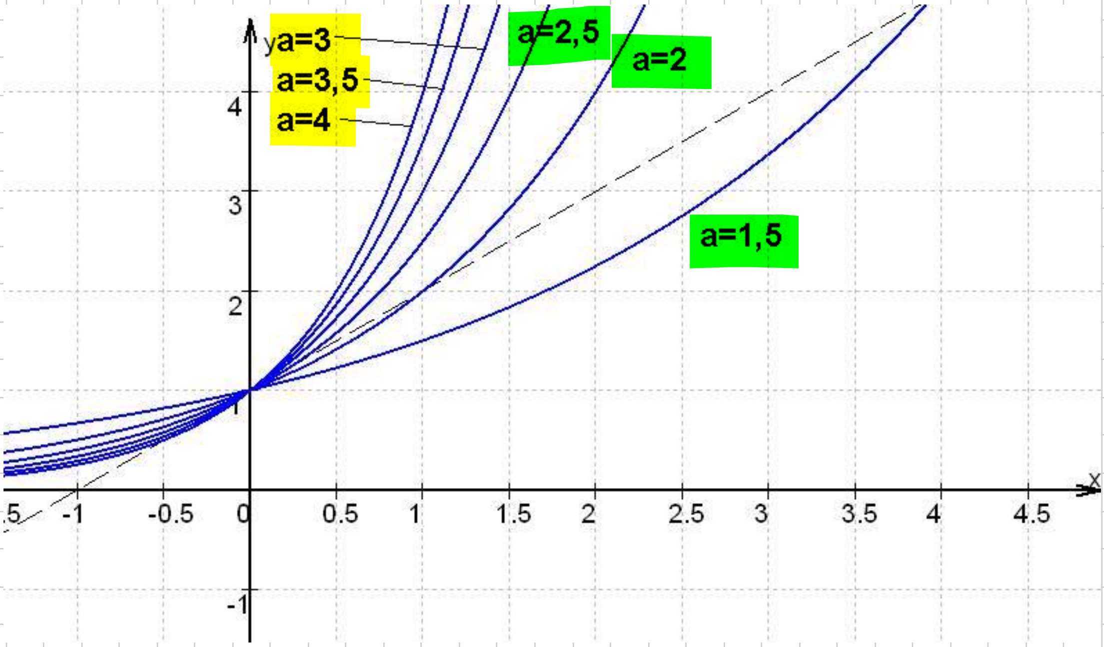
Existiert der Grenzwert a_g, so erhalten wir die Ableitung

$$a^x \cdot \lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h} = a^x \cdot a_g = f_a'(x)$$

Wunsch. Ableitung möglichst einfach, d.h $a_g = 1$, denn dann ist

Jn diesem Fall ist $f_a'(0) = 1$. Hiermit wollen wir arbeiten

Wir betrachten die Schaubilder einiger Exponentialfunktionen:



Fast immer (bis auf den gesuchten Wert von a) hat $y = x+1$ zwei Schnittpunkte mit den Graphen der Exponentialfunktionen. Die Abbildung zeigt, dass dieser bestimmte Wert von a im Intervall (2,5;3) liegen muss! Wir sehen

$$h_+ := \frac{1}{n} \text{ mit } n \in \mathbb{N}_{>0}$$
$$h_- := -\frac{1}{n+1} \text{ mit } n \in \mathbb{N}_{>0}$$

Konstruktion zweier Punktfolgen!

Die Punktfolgen sind (P_{n+}) und (P_{n-}):

Offensichtlich ist $\lim_{n\to\infty} P_{n+} = \lim_{n\to\infty} P_{n-} = P(0|1)$. Gleichzeitig gilt aber

$$f_a\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{n}$$

Überlegung mit Punkt P_{n+}

$$\Rightarrow a^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n}, \text{ also } a = a(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Analog erhalten wir mit P_{n-} den Ausdruck

$$\bar{a} = \bar{a}(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Dies sind zwei Basenfolgen (a_{n+}) und (a_{n-}) Aussagen über diese Folgen sind:

-
-
-

Den letzten Punkt wollen wir nachweisen:

Abschätzung. Weil $\left.\begin{array}{l}(a_{n-})\text{ smf}\\(a_{n+})\text{ smw}\\a_{n-} > a_{n+}\end{array}\right\} \Rightarrow$

Daher ist

$\square$

Die Eulersche Zahl:

Vermutung: $a = e$ ist die gesuchte Basis.

↳ Nachweis von $f'(x) = f(x) = e^x$ notwendig!

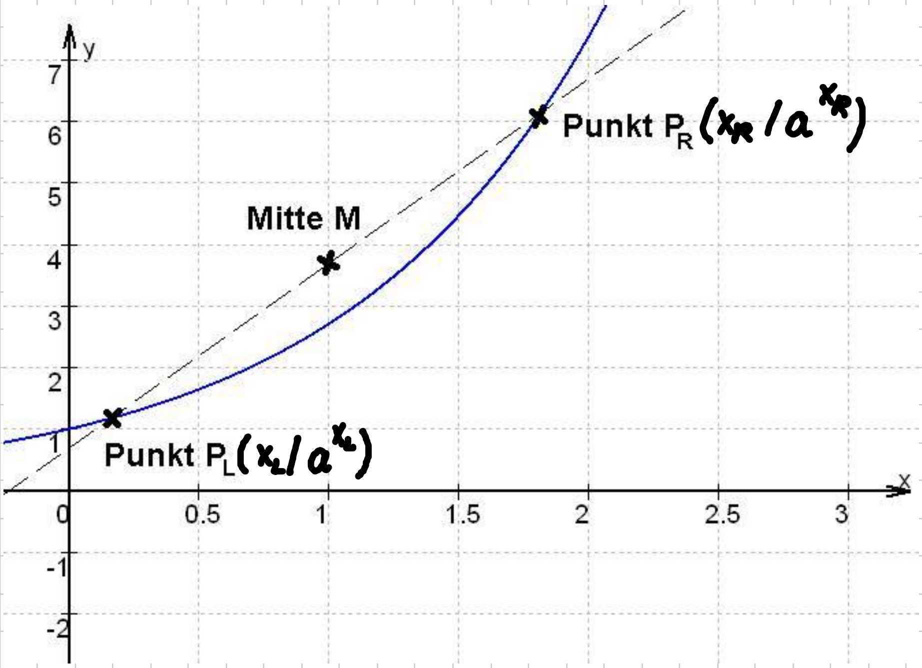
Erneut bemühen wir die h-Methode:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{e^{x+h}-e^x}{h} = e^x \cdot \frac{e^h-1}{h}$$

zu zeigen: $\lim\limits_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = 1$

Diesen Nachweis erbringen wir mit dem sog. Einschlusskriterium. Wichtig ist hier zusätzlich, dass der Graph von f linksgekrümmt ist.

$\Rightarrow$ Mittelpunkt $M(\quad / \quad)$ Koordinaten des Mittelpunktes der Verbindungsstrecke (siehe Abbildung)



Es ist zu zeigen: $a^{\frac{x_L+x_R}{2}} < \frac{a^{x_L}+a^{x_R}}{2}$ (Annahme)

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

Aus dieser Überlegung folgt, dass

1.)

2.)

$\Rightarrow$ Ungleichungskette :

Daher folgt

$\Rightarrow$ $\boxed{}$

ZUSATZ ENDE

III 3 Wachstum

III 3.1 Lineares Wachstum

Eine erste Differentialgleichung (siehe Kap. V).

III.3.2 Exponentielles / Natürliches Wachstum

Bestand zum Zeitpunkt t: $f(t)$

Δt ⋮ warten! 

Neuer Bestand: $f(t+\Delta t)$

↳ Der Zuwachs beträgt somit: $f(t+\Delta t)-f(t)$ $\sim f(t)$
und $\sim \Delta t$

Die Proportionalität ermöglicht folgenden Ansatz:

Aus III.2 ist nun bekannt, dass abgeleitet

ergibt.

Durch Vergleich folgt:

Natürliches oder exponentielles Wachstum

Die die Differentialgleichung lösenden Funktionen heißen demnach Wachstums- oder Zerfallsfunktionen. Dies sind Funktionen f mit

Das $a \in \mathbb{R}$ repräsentiert den Funktionswert zum Zeitpunkt $t=0$, denn
$f(0) = a\,e^{k \cdot 0} = a \cdot e^0 = a$

Nimmt der Bestand pro Zeitschritt um p % zu/ab, so gilt

$\boxed{}$

II.3.3 Beschränktes Wachstum

Beschränktes Wachstum kann der DGL mit $k>0$ gehorchen.
Dabei ist S die Schranke oder Grenze, der sich der Bestand $f(t)$ für $t \to \infty$ annähert. Die Funktion f mit

ist die zugehörige Wachstumsfunktion und löst die DGL.

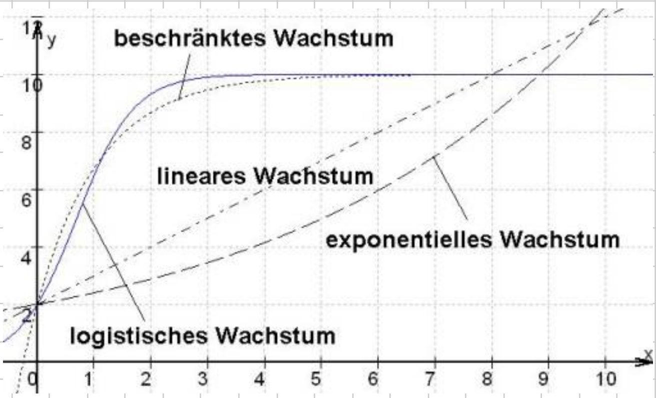
II.3.4 Logistisches Wachstum

Wachstumsfunktionen f, die die DGL

erfüllen, ordnen wir einer besonderen Form von beschränktem Wachstum zu, dem logistischen Wachstum. Es gilt dann für f, dass

mit $a = f(0)$

Wachstum-Schaubilder.



Ergänzung. Eigenschaften der trigonom. Funktionen → Extra-PDF

Zusatz E

II.4 L'Hospital-Grenzwertberechnung

Regeln von L'Hospital:

Beispiel.

Ander unbestimmte Ausdrücke $\left(0\cdot\infty,\ 0^0,\ 1^\infty,\ \infty^0,\ \infty-\infty\right)$ können durch Umformungen auf die für L'Hospital benötigten Formen $\left(\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}\right)$ gebracht werden:

1

2

3

Beispiel:

II.5 Hyperbelfunktionen

Analog zu $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ und $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$ definieren wir die sog. Hyperbelfunktionen, allerdings ohne die komplexe Einheit i.

Definition:

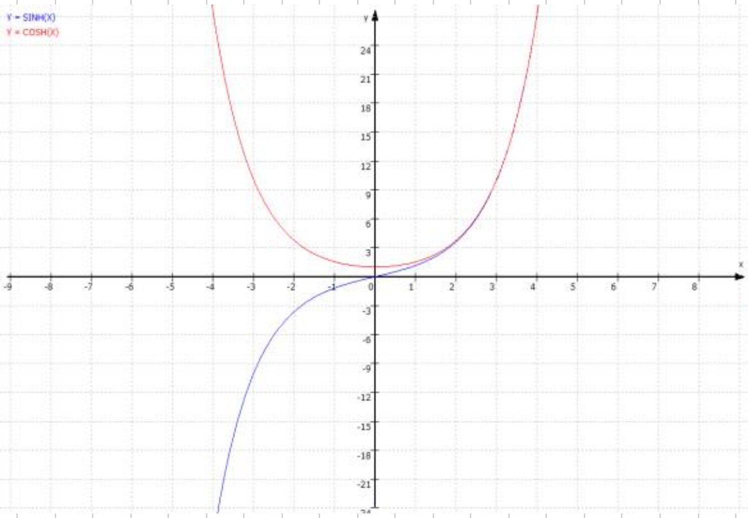
$\sinh x :=$ — Sinus hyperbolicus

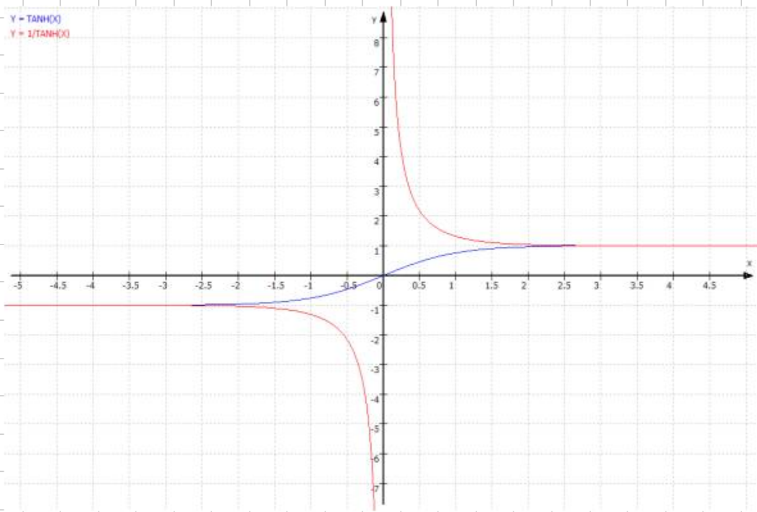
$\cosh x :=$ — cosinus hyperbolicus

$\tanh x :=$ — tangens hyperbolicus

$\coth x :=$ — cotangens hyperbolicus

Schaubilder:





Den Schaubildern sind folgende Eigenschaften zu entnehmen.

	Def.	Wertem.	Symmetrie	Monotonie
$\sinh x$				
$\cosh x$				
$\tanh x$				
$\coth x$				

Alle Eigenschaften lassen sich aus denen der e-Funktion herleiten!

Ableitungen:

Übung: Leiten Sie die Ableitungen her!

Ein letzter wichtiger Zusammenhang.

analog $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

IV Ableiten von Umkehrfunktionen

Funktion: Ausführliche Notation

$$f.\ D_f \longrightarrow W_f,\ x \longmapsto f(x) := y$$

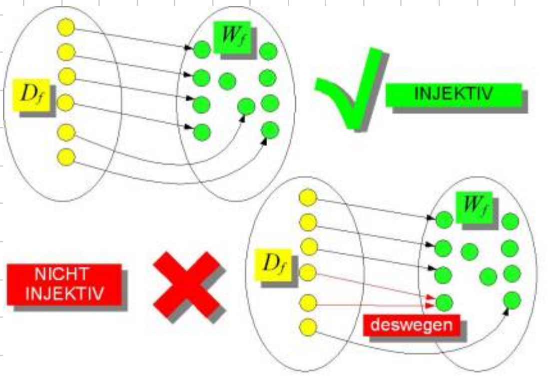
Definitionsmenge — Wertemenge

Zur Umkehrbarkeit: Folgende Begriffe notwendig

- injektiv
- surjektiv
- bijektiv

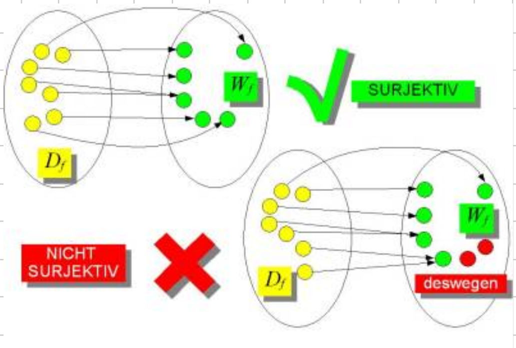
▸ **Injektiv:** Bei einer injektiven Funktion darf jedes Element der Wertemenge höchstens einmal als Funktionswert eines Wertes der Definitionsmenge verwendet werden. Das bedeutet:

Beispiel.



▷ **Surjektiv:** Bei einer surjektiven Funktion wird jedes Element der Wertemenge mindestens einmal als Funktionswert eines Wertes der Definitionsmenge verwendet. Somit findet die komplette Wertemenge als Abbildungsmenge Verwendung.

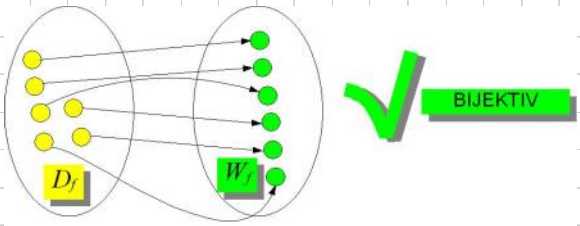
Beispiel



▷ **Bijektiv:** Kombination Injektiv + Surjektiv

Bei einer bijektiven Funktion wird jedes Element der Wertemenge genau einmal als Funktionswert eines Wertes der Definitionsmenge verwendet.

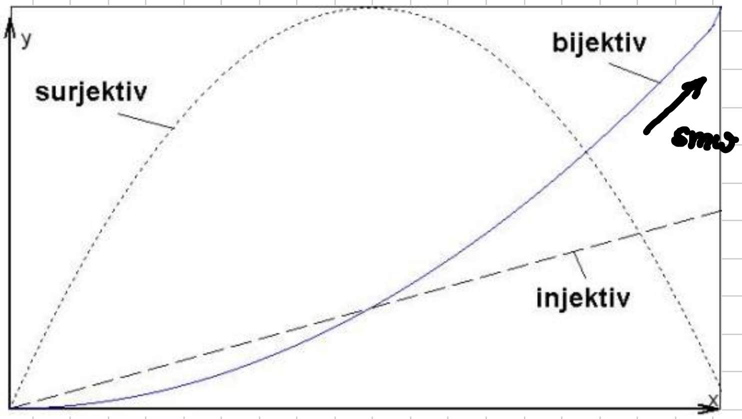
Beispiel:



IV.1 Übertragen der Begriffe auf Funktionsgraphen:

Die Funktion muss für die Umkehrbarkeit streng monoton wachsend oder fallend sein.

Im Bilde:



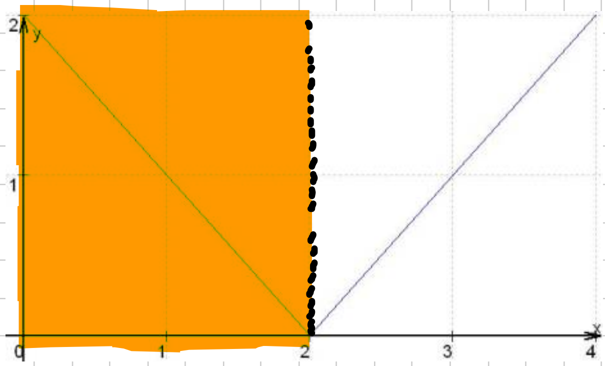
Umkehrfunktionen:

Beispiel 1: $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = m \cdot x + c$ und $m \neq 0$.

Beispiel 2: $f: [0;4] \to [0;2]$ mit $f(x) = |-x+2|$

ohne Betragsstriche: $f(x) = \Bigg\{$

Skizze:



umgekehrt: $f^{-1}(y) = \Bigg\{$

Umkehrrelation (keine Umkehrfunktion)

IV.2 Ableiten von Umkehrfunktionen

IV.2.1 Implizites Differenzieren

Ableiten von Gleichungen: $y + x = -5$

$(y(x) + x = -5)'$ ableiten $\quad \frac{dy}{dx} + \frac{dx}{dx} = \frac{d(-5)}{dx}$

$y' + 1 = 0 \Rightarrow y' = \underbrace{m}_{\text{Steigung}} = -1$

IV 2.2 Kettenregel und Ableiten von Umkehrfunktionen

Ausgangsgleichung: $f^{-1}(f(x)) = x \quad |$ implizit differenzieren

$\Rightarrow$

Beispiel: h mit $h(x) = \arcsin x = y$ — vertauschte Variable

IV.3 Die Logarithmusfunktion, Arcus-Funktionen und die Area-Funktionen

IV.3.1 Logarithmusfunktionen

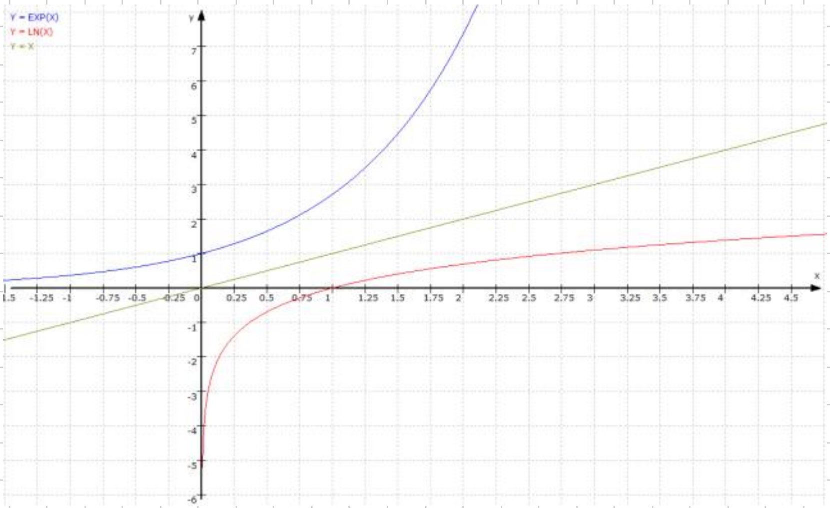
Rechenregeln (basieren auf den Potenzgesetzen):

- LG1
- LG2
- LG3

Mit Hilfe der Umkehrfunktionsregeln aus IV.2 erhalten wir:

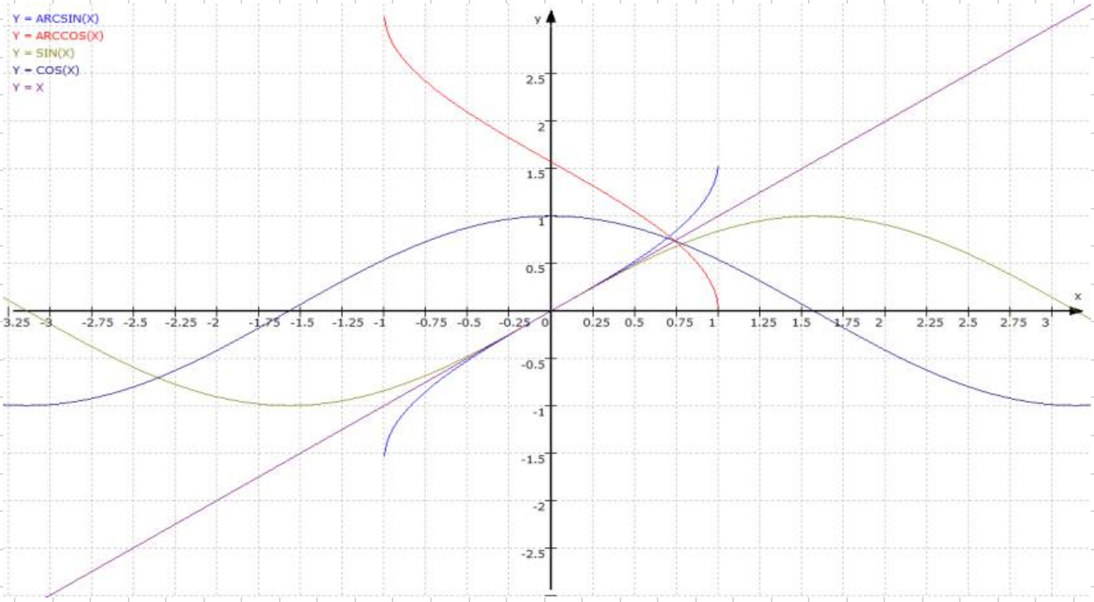
$\boxed{}$ Ableitung

Skizze:



IV 3.2 Die Arcus-Funktionen

Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen (sin, cos, tan, cot) Hier ist v.a. auf die Definitions- und Wertemengen zu achten. Diese sind auch den Schaubildern zu entnehmen:

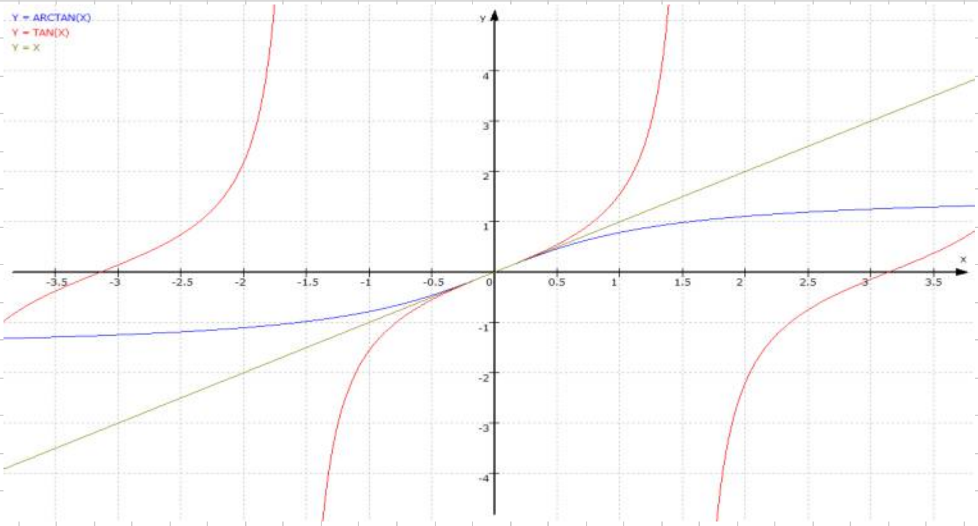


Durch Spiegelung an der 1. Winkelhalbierenden (1.WH) entstehen z.B. die Schaubilder von arccos x und arcsin x aus denen von cos x und sin x. Damit auch wirklich Funktionen entstehen, müssen cos x und sin x auf Bereiche eingeschränkt werden, auf denen sie smw oder smf sind. Daraus folgt:

Funktion	Def.	Wertem

Ableitungen. Ergeben sich aus den Regeln aus IV.2

Ableitungen der Arcus-Funktionen



IV.3.3 Die Area-Funktionen

Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen. Die Schaubilder ergeben sich durch Spiegelung an der 1. WH. Folgende Definitions- und Wertebereiche nehmen die Funktionen ein:

	Def.	Wertem	Sym	Monotonie

Aus den Definitionsgleichungen von sinhx,... können die Umkehrfunktionen gebildet werden. Damit lassen sich die Area-Funktionen über die Logarithmusfunktion (IV.3.1) darstellen.

ln-Darstellungen der Area-Fkt.

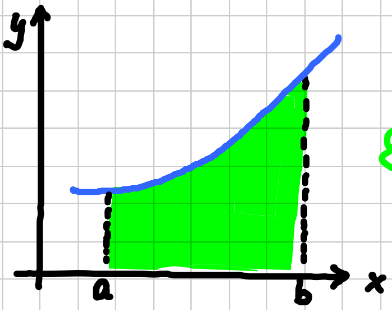
Übung: Leiten Sie die ln-Darstellung von arsinhx her.

Die zugehörigen Ableitungen ergeben sich dann zu:

Ableitungen der Area-Funktionen

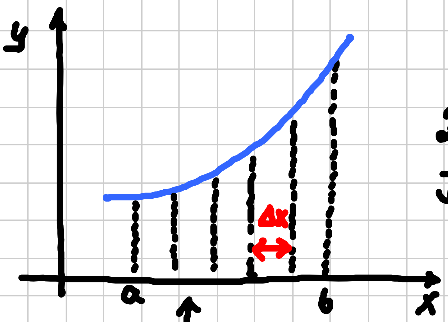
I. Grundlagen zur Integralrechnung

I.1 Ober- und Untersumme (optional) Zusatz F



gesucht: Flächeninhalt A

Schrittchenweise zur Fläche:

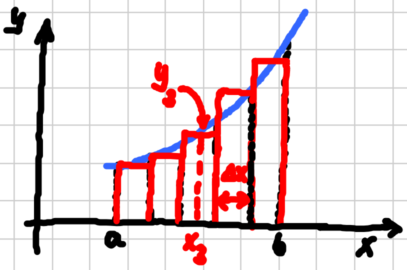


Zerlegung in äquidistante Intervalle

abhängig von der Anzahl der Streifen ergibt sich $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$

Streifenanzahl

Flächeninhalt ergibt sich nun näherungsweise über die Zerlegungssumme:



$$\Rightarrow \text{Flächeninhalt } A \approx Z_n = \Delta x \cdot (y_1 + y_2 + \ldots + y_n)$$

$$= \Delta x \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i .$$

Zur Zerlegungssumme:

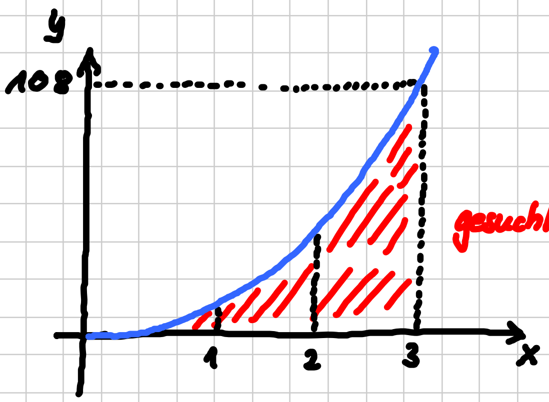
- Wählen wir auf den Teilintervallen nur die größten Funktionswerte y_i, so sprechen wir bei der Zerlegungssumme von einer Obersumme.
- Bei den kleinsten Funktionswerten bilden wir eine Untersumme.

Genauerer Flächeninhalt ⇒ Grenzwertbildung

$$A = Z = \lim_{n\to\infty} Z_n = \lim_{n\to\infty}\left(\Delta x \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i\right)$$

hängen von n ab!

Bsp. Betrachte f mit $f(x) = x^4 + x^3$.



Obersumme: $O_3 = \underbrace{\frac{3-0}{3}}_{=\frac{b-a}{n}} \cdot \left(f(1) + f(2) + f(3)\right)$

$$= 1\cdot\left(2 + \overset{2^4+2^3}{24} + 108\right) = 134 \text{ FE}$$

Untersumme: $U_3 = 1\cdot\left(f(0) + f(1) + f(2)\right) = 26 \text{ FE}.$

Arithmetisches Mittel: $A_M = \frac{O_3 + U_3}{2} = 80 \text{ FE}.$

Zur genaueren Berechnung.

$$\underset{n\in\mathbb{N}_{>0}}{O(n)} = \frac{3-0}{n}\left(f\left(\tfrac{3}{n}\right) + f\left(2\cdot\tfrac{3}{n}\right) + f\left(3\cdot\tfrac{3}{n}\right) + \,.\, + f\left(n\cdot\tfrac{3}{n}\right)\right)$$

$$= \frac{3}{n}\cdot\left(\overbrace{\left(\tfrac{3}{n}\right)^4 + \left(\tfrac{3}{n}\right)^3}^{x^4+x^3} + \left(2\cdot\tfrac{3}{n}\right)^4 + \left(2\cdot\tfrac{3}{n}\right)^3 + \dots + \left(n\cdot\tfrac{3}{n}\right)^4 + \left(n\,\tfrac{3}{n}\right)^3\right)$$

$$= \left(\frac{3}{n}\right)^5\cdot\left[1^4 + 2^4 + 3^4 + \,.\, + n^4\right] + \left(\frac{3}{n}\right)^4\cdot\left[1^3 + 2^3 + \,.\,.\, + n^3\right]$$

$$= \left(\frac{3}{n}\right)^5 \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k^4}_{\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)\,(3n^2+3n+1)}{30}} + \left(\frac{3}{n}\right)^4 \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k^3}_{\frac{1}{4}\cdot n^2\cdot(n+1)^2} = \left(\frac{3}{n}\right)^5 \cdot \frac{n\cdot(n+1)\,(2n+1)\cdot(3n^2+3n+1)}{30} + \left(\frac{3}{n}\right)^4 \cdot \frac{1}{4}\cdot n^2\cdot(n+1)^2$$

vollständige Induktion!

Grenzwert:

Grad 4 / Grad 5 → 0

$$\lim_{n\to\infty} O(n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{6n^5}{30}\cdot\left(\frac{3}{n}\right)^5\right) + \underbrace{\lim_{n\to\infty}(\text{Rest I})}_{\to 0}$$

$$+ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^4}{4}\cdot\left(\frac{3}{n}\right)^4\right) + \underbrace{\lim_{n\to\infty}(\text{Rest II})}_{\to 0}$$ ← Grad 3 / Grad 4 → 0

$$= \frac{6\ 3^5}{30} + \frac{3^4}{4} = 68\tfrac{17}{20}\ \text{FE}$$

Zuviel Aufwand, darum Suche nach neuer Technik!

V.2 Stammfunktion und Integralfunktion

Das Integral einer Funktion:

Hieraus ergibt sich die Integralfunktion:

Über die h-Methode folgt:

Dies bringt uns zum Begriff der Stammfunktion.

Stammfunktion:

Hieraus ergibt sich der folgende Satz:

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

V.3 Wichtige Stammfunktionen

$\boxed{\text{Übersicht} \rightarrow \text{auf Extra-PDF}}$

$$\begin{tikzcd} c \cdot x^k \arrow[r, "\text{Aufleiten}"] \arrow[d, "\text{Ableiten}"] & \frac{c}{k+1} \cdot x^{k+1} + const. \\ c \cdot k \cdot x^{k-1} & \end{tikzcd}$$

1

$$\begin{tikzcd} a \cdot \sin(m \cdot x + b) \arrow[r, "\text{Aufleiten}"] \arrow[d, "\text{Ableiten}"] & -\frac{a}{m}\cos(m \cdot x + b) + const. \\ a \cdot m \cdot \cos(m \cdot x + b) & \end{tikzcd}$$

3

$$\begin{tikzcd} (m \cdot x + b)^k \arrow[r, "\text{Aufleiten}"] \arrow[d, "\text{Ableiten}"] & \frac{1}{m \cdot (k+1)} \cdot (m \cdot x + b)^{k+1} + const. \\ m \cdot k \cdot (m \cdot x + b)^{k-1} & \end{tikzcd}$$

2

$$\begin{tikzcd} a \cdot \cos(m \cdot x + b) \arrow[r, "\text{Aufleiten}"] \arrow[d, "\text{Ableiten}"] & \frac{a}{m}\sin(m \cdot x + b) + const. \\ -a \cdot m \cdot \sin(m \cdot x + b) & \end{tikzcd}$$

4

$$\begin{tikzcd} a \cdot e^{bx+c} \arrow[r, "\text{Aufleiten}"] \arrow[d, "\text{Ableiten}"] & \frac{a}{b} \cdot e^{bx+c} + const. \\ a \cdot b \cdot e^{bx+c} & \end{tikzcd}$$

5

I.4 Integrationstechniken

I.4.1 Absolute Grundtechniken

①

②

③

„Integrieren ist eine Kunst, Differenzieren ist Handwerk"

↳ D.h es ist i.A. nicht leicht, einen geschlossenen Ausdruck für ein Integral zu finden, sofern ein solcher überhaupt existiert.

Bsp. $\int \frac{\sin x}{x} dx$; $\int e^{-x^2} dx$

Beispiel zu den Grundtechniken:

$$I = \int \frac{\sin kx}{e^x} dx =$$

ACHTUNG: Das Zerlegen von Integralen ist <u>nicht immer</u> nützlich.

<u>Bsp.</u> $I = \int \sin^2 x + \cos^2 x \, dx = \int \sin^2 x \, dx + \int \cos^2 x \, dx$

! unguter Weg!

besser $\longrightarrow \int 1 \, dx = x + c$

$\sin^2 + \cos^2 = 1$

An diesem Beispiel sehen wir, dass Additionstheoreme bei trigonometrischen Funktionen hilfreich sein können.

<u>Bsp.</u> $I = \int \sin x \cdot \cos x \, dx$

V.4.2 Lineare Substitution

$$\int f(x) dx = \int (m \cdot x + b)^k dx \qquad m, b, k \in \mathbb{R}, \; k \neq -1$$

Ausgangssituation

<u>Substitution:</u> $u(x) = mx + b$

V 4.3 Produktintegration / partielle Integration

Verwende Produktregel „rückwärts":

$$(u\,v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$$

Beispiel 1: $f(x) = x \cdot e^x$

Beispiel 2: $g(x) = \ln x$

V 4.4 Logarithmische Integration

basiert auf: $\left[\ln f(x)\right]' \underset{KR}{=} \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$ für $f(x) > 0$

bzw $\left[\ln(-f(x))\right]' \underset{KR}{=} -\frac{1}{f(x)} \cdot (-f'(x)) = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$ für $f(x) < 0$.

$\Rightarrow$

Einfache Beispiele.

• 1 $\int \frac{1}{x+2}\,dx =$

• 2 $\int \frac{2x}{x^2-1}\,dx =$

↳ Variation: $\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx =$

$=$

• 3 $\int \frac{\cos x}{1+\sin x}\,dx =$

Übung: Bestimmen Sie (bitte) $I = \int \tan x \, dx$

Manchmal müssen die Terme angepasst werden, damit die Methode verwendet werden kann.

Beispiel: $I = \int \frac{x+2}{x^2+4x+9}\,dx =$

I.4.5 Verwendung komplexer Zahlen

$$I_1 = \int e^{ax} \cdot \cos(bx)\,dx \quad ; \quad I_2 = \int e^{ax} \sin(bx)\,dx$$

beide auf einmal behandeln $\rightarrow$ $e^{ibx} = \cos(bx) + i \cdot \sin(bx)$

$\Rightarrow$ aus Euler:

$$I_1 = \mathrm{Re}\, I = e^{a \cdot x} \cdot \left[\frac{a \cdot \cos(bx)}{a^2+b^2} + \frac{b \cdot \sin(bx)}{a^2+b^2} \right] + C_1$$

$$I_2 = \mathrm{Im}\, I = e^{ax} \cdot \left[\frac{a \cdot \sin(bx)}{a^2+b^2} - \frac{b \cdot \cos(bx)}{a^2+b^2} \right] + C_2$$

$C = C_1 + iC_2$

I.4.6 Ergänzung zur partiellen Integration

$$\boxed{\text{Zur Erinnerung:} \quad \int u\, v'\,dx = u \cdot v - \int u \cdot v'\,dx}$$

Beispiel: „Kreislauf"

$$I = \int \sin x \cdot \cos x\,dx = \Big| \qquad\qquad \Big| =$$

Übung. $I = \int \sin^2 x \, dx$, bitte lösen.

TIPP! (falls es nicht klappt) Nach dem ersten Integrieren $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ verwenden!

Partielle Integration in Anwendungen:

(optional)

ZUSATZ F

Spannung

Elektrische Leistung: $P(t) = U(t) \cdot J(t)$

Strom

Wechselstrom/ Wechselspannung: $\left.\begin{array}{l} U(t) = U_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi_U) \\ J(t) = J_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi_J) \end{array}\right\}$ ohmsche Widerstände: $\varphi_U = \varphi_J = \varphi = 0$

Periodizität der Funktionen ausgenutzt

Arbeit pro Periode: $W = P \cdot t \Rightarrow dW = P \cdot dt$

$$\Rightarrow W_\tau = \int_{t_0}^{t_0+\tau} P(t)\, dt = \int_{t_0}^{t_0+\tau} U_0 J_0 \cdot \sin^2(\omega t)\, dt$$

Periode $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$

Kap I.4.2

bereits gelöst (Lineare Substitution ergänzt noch einen Faktor $\frac{1}{\omega}$)

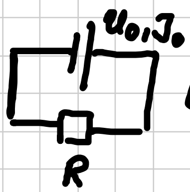
$$\underset{\boxed{t_0=0}}{=} U_0 \cdot J_0 \int_0^\tau \sin^2(\omega t)\, dt$$

wählbar

$$= U_0 \cdot J_0 \cdot \frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Big[\omega t - \sin(\omega t) \cdot \cos(\omega t)\Big]_0^{\tau = \frac{2\pi}{\omega}}$$

$$= U_0 \cdot J_0 \cdot \frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{2} \cdot [2\pi] = \frac{U_0^2}{R} \cdot \frac{\pi}{\omega}$$

pro Periode in



Wechsel-strom

$$\boxed{J_0 = \frac{U_0}{R} \quad \text{ohmsches Gesetz}}$$

I.4.7 Substitutionsmethode

Betrachte zu Beginn: $\frac{d}{dx} e^{\sin x} \underset{KR}{=} e^{\sin x} \cos x$

aus Kenntnis der Ableitung

$$\Rightarrow \int e^{\sin x} \cdot \cos x \, dx = e^{\sin x} + C$$

Ohne Kenntnis der Ableitung:

$$\int e^{\sin x} \cdot \cos x \, dx$$

Allgemein:

BEWEIS DER BEHAUPTUNG: (optional) Zusatz G

Voraussetzung. $u'(x) \neq 0 \Rightarrow u^{-1}$ existiert! (*)

Wir setzen $t = u(x)$ und $x = u^{-1}(t)$.

$$\left[\phi(u^{-1}(t))\right]' = \underbrace{\phi'(u^{-1}(t))}_{\text{außen}} \cdot \underbrace{(u^{-1}(t))'}_{\text{innen}}$$

$$\underset{\substack{\text{Voraussetzung} \\ (*)}}{=}$$

Nebenrechnung: Identität $u(u^{-1}(t)) = t$ gilt für Umkehrfunktionen

$$\Big\downarrow \text{KR} \quad \text{ableiten (implizit)}$$

Damit ist $\phi(u^{-1})$ eine Stammfunktion zu f $\square$

ZUSATZ ENDE G

Zum Merken: Substitutionsmethode

Beispiele.

① $\int \cos(e^u)\cdot e^u\,du = \Big| \qquad \Big|$

② $I = \int \arcsin x \; dx \quad = \Big| \qquad \Big|$

Übung:

$I = \int \ln\,(\overbrace{\cos^2 x}^{u}) \cdot \cos x \cdot \sin x \; dx$

↑ Tipp!

Bitte lösen!

I 4.8 Substitutionsmethode und bestimmte Integrale

WICHTIG: Die Grenzen müssen mitsubstituiert werden!

$$I = \int_{x=1}^{x=e} \frac{dx}{x\cdot(1+\ln x)} = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \end{array} \right| = \int_{u(1)=0}^{u(e)=1} \frac{1}{\cancel{x}\cdot(1+u)} \cancel{x}\cdot du$$

$\hookrightarrow dx = x\cdot du$

$u(e) = 1 \leftarrow \ln e$

$u(1) = 0 \leftarrow \ln 1$

$$= \int_0^1 \frac{1}{u+1}\, du \overset{\int \frac{f'}{f}dx}{=} \Big[\ln|u+1|\Big]_0^1 = \underline{\ln 2}$$

ÜBUNG: $I = \int_0^{\pi} \sin^2 x \cos x \, dx$

I.4.9 Integration rationaler Funktionen

Rationale Funktionen: $\frac{A(x)}{Q(x)}$ ← Polynome

Wie ist $\int \frac{A(x)}{Q(x)}\,dx$ zu berechnen?

1) Grad $A \geq$ Grad Q ⇒ Polynomdivision

$$\frac{A}{Q} = B + \frac{P}{Q}$$ mit Grad $P <$ Grad Q

↑ Polynom

(echt gebrochenrational)

2) Löse $Q = 0$: Bestimmung der Nullstellen des Nenners inklusive ihrer Vielfachheit

↳ $\boxed{\text{Extra-PDF: Ganzrat. Fkt.}}$ ZUSATZ H

3) Partialbruchzerlegung (PBZ): Nenner mit „einfachem" Polynom erzeugt

4) Einzelne Terme der PBZ elementar integrieren

Zur Polynomzerlegung:

Beispiel: Polynomdivision

$$I = \int_0^1 \frac{x^4 \cdot (1-x)^4}{1+x^2}\,dx$$

Grad = 8

Grad = 2

$$x^4 \cdot (1-x)^4 = x^4 \cdot (1 - 4x + 6x^2 - 4x^3 + x^4)$$

$$= x^8 - 4x^7 + 6x^6 - 4x^5 + x^4$$

$(a+b)^5$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

Pascalsches Dreieck

Polynd:

$$\Rightarrow \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} = x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4 - \frac{4}{1+x^2}$$

$$I = \int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \left(x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4 - 4\cdot\frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$=$$

$$=$$

Zurück zur PBZ.

$$\tilde{Q}(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad \text{Nennerpolynom}$$

$\downarrow$ Leitkoeffizient abdividiert

$$Q(x) = x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n}x^{n-1} + \dots + \frac{a_1}{a_n}x + \frac{a_0}{a_n}.$$

gleiche Nullstellen

$\hookrightarrow$ $Q(x) = \prod_{k=1}^{n}(x - x_k)$ $\quad$ n einfache Nullstellen

$\hookrightarrow$ $$\frac{P}{Q} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \dots + \frac{A_n}{x-x_n}$$

Beispiel: $R(x) = \dfrac{x}{x^2-2x-3}$

Nullstellen des Nenners. $x^2-2x-3=0$, d.h. $x_{1/2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 2x - 3 = (x+1)\,(x-3)$$

Ansatz: $$\frac{x}{x^2-2x-3} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1}$$

Bestimmung von A und B durch Koeffizientenvergleich:

Zusammengefasst: $\int \frac{x}{x^2-2x-3}\,dx =$

Was passiert, wenn Nullstellen mehrfach auftreten oder komplex sind?

(optional) ZUSATZ H

Ansätze in Beispielen:

[mehrfache Nullstellen:]

Ansatz

Bsp. $R(x) = \dfrac{P(x)}{(x-3)\cdot(x+2)^3} =$

[komplexe Nullstellen:]

Bsp. $Q(x) = x^3+2x^2+x+2 = (x+2)(x^2+1)$

komplexer Ansatz: $\dfrac{P(x)}{Q(x)} =$

reeller Ansatz: $\dfrac{P(x)}{Q(x)} =$

Allgemeine Lösung eines Integrals der Form

$$I_1 = \int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}\,dx$$

B, C, p, q bekannt

>0 [sonst geht's einfacher]

Bastelstunde: Oben steht Ableitung von unten.

$$I_1 = \frac{B}{2}\cdot\int \frac{2x+\frac{2C}{B}}{x^2+px+q}\,dx = \frac{B}{2}\cdot\int \frac{2x+\frac{2C}{B}+p-p}{x^2+px+q}\,dx$$

$$= \frac{B}{2}\cdot \underbrace{\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx}_{\text{Logarithmische Integration}} + \frac{B}{2}\cdot\int \frac{\frac{2C}{B}-p}{x^2+px+q}\,dx$$

$$= \frac{B}{2}\cdot \ln(\underbrace{x^2+px+q}_{\text{keine Betragsstriche, nur positive Funktionswerte}}) + \left(C-\frac{Bp}{2}\right)\cdot\int\frac{1}{x^2+px+q}\,dx$$

Restproblem: $\int \frac{1}{x^2+px+q}\,dx$

$$\underset{\text{quadr. Ergänzen}}{=} \int \frac{1}{x^2+px+\frac{p^2}{4}+q-\frac{p^2}{4}}\,dx = \int \frac{1}{(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}}\,dx$$

$$= \frac{1}{q-p^2/4}\cdot\int\frac{1}{1+\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-p^2/4}}\right)^2}\,dx$$

$$\underset{\text{Substitution}}{=} \left| \begin{array}{l} u=\dfrac{x+p/2}{\sqrt{q-p^2/4}} \\ dx=\sqrt{q-p^2/4}\,du \end{array}\right| = \frac{1}{\sqrt{q-p^2/4}}\int\frac{1}{1+u^2}\,du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{q-p^2/4}}\cdot \arctan u = \frac{1}{\sqrt{q-p^2/4}}\cdot\arctan\left(\frac{x+p/2}{\sqrt{q-p^2/4}}\right)$$

Also:

$$\int\frac{Bx+C}{x^2+px+q}\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{p^2<4q} \\ \text{Voraussetzung}}}{=} \frac{B}{2}\cdot\ln(x^2+px+q) + \left(C-\frac{Bp}{2}\right)\cdot\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\cdot\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}.$$

(+ additive Konstante) $\square$

ZUSATZ H ENDE

VI Differentialgleichungen

Beispiel: Bestimmen Sie alle Funktionen $y: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, die die Gleichung

$$y'(x) = \cos x \ , \quad x \in (0,1)$$

erfüllen.

Lösung: $y(x) = \sin(x) + \underset{\uparrow \text{Integrations-konstante}}{C} \qquad x \in [0;1]$

▷

▷

▷

▷

Einleitung · Dgl. 1. Ordnung

Definition:

Ein paar Worte zur Lösung:

Unter einer Lösung einer Dgl. auf einem Intervall $J \subseteq I$ versteht man eine Funktion $y: J \to \mathbb{C}$, die die Dgl. für alle $x \in J$ erfüllt, wenn man sie und ihre Ableitungen in die Gleichung einsetzt. Daraus folgt, dass eine Lösung der Dgl. insbesondere differenzierbar sein muss.

Definition (Dgl. n-ter Ordnung):

VI.1 Analytische Lösungsmethoden

VI.1.1 Separable Differentialgleichungen

Bsp. $y'(x) = y(x)$ $\Rightarrow$ triviale Lösung $y \equiv 0$ schließen wir aus!

separiert: y links, x rechts

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = 1. \quad (*)$$

↳ umnotieren (Leibniz-Notation): $y'(x) = \frac{dy}{dx}$

(*) ist dann: $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 1 \quad | \cdot dx$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int 1\,dx$$ integrieren

$$e^{\ln|y|} = e^{x+c}$$ | entlogarithmieren

$$y = e^{c} \cdot e^{x} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y(x) = A \cdot e^{x}}$$

Definition (separable Dgln.):

Übung: Bestimmen Sie y aus $y' = x \cdot y^2$ mit $x > 0$.

Lösung:

VI.1.2 Inhomogene Störungen

Beispiel: $y'(x) = y(x) \underbrace{+\,x^2}$, $x \in I$

ohne das x^2:

$$y'(x) = y(x) \iff y(x) = A \cdot e^{x}$$

Zur Lösung der obigen Dgl verwenden wir die Variation der Konstanten.

↳ <u>Ansatz</u>:

⇒ ableiten:

Einsetzen in Dgl :

⇒

pI ⇒

<u>4 Arbeitsschritte</u>:

1

2

3

4

Bsp. Geschickt gewählter Ansatz

$$y' = x^2 + x + 1 + \frac{1-y^2}{x^2-x} \quad , \quad 0 < x < 1 \qquad \Big| \cdot (x^2-x)$$

$$(x^2-x)\cdot y' = x^4 - x + 1 - y^2$$

umsortieren: $y^2 = \underbrace{x^4 - x + 1}_{\text{Polynome}} - \underbrace{(x^2-x)}\cdot y'$

<u>Überlegung zum Polynomgrad:</u> Polynomansatz ← 2 Grad

Höchsten Grad verwenden: Ansatz $ax^2 + bx + c = y$

↳ Koeffizientenvergleich!

$$y^2 = x^4 - x + 1 - (x^2-x)\cdot y'$$

<u>Ansatz:</u> $y = ax^2 + bx + c \Rightarrow y' = 2ax + b$

⇒ Einsetzen:

$$\overbrace{a^2x^4 + 2ab\,x^3 + (2ac+b^2)x^2 + 2bc\,x + c^2}^{y^2}$$

$$= 1x^4 - 2ax^3 + (2a-b)x^2 + (b-1)x + 1$$

aus Ⓛ = Ⓡ: Koeffizientenvergleich

<u>Lösen</u>: $a = \pm 1$, $b = -1$ und $c = 1 \Rightarrow y_{1/2}(x) = \pm x^2 - x + 1$ mit $x \in (0;1)$

VI. 1.3 Lineare Dgln 1. Ordnung

Definition:

Lösung: ① Betrachte homogene Variante, d.h. $f \equiv 0$

$$\Rightarrow \quad a(x)\cdot y' + b(x)\cdot y = 0$$

$$\Rightarrow \quad a(x)\frac{dy}{dx} = -b(x)\cdot y \qquad \Big| \cdot dx \quad \Big| : a(x) \quad \Big| : y$$

[separieren]

$$\Rightarrow \quad \int \frac{1}{y}\, dy = -\int \frac{b(x)}{a(x)}\, dx$$

$$\Rightarrow \quad \ln|y| = -\int \frac{b(x)}{a(x)}\, dx + c$$

entlogarithmieren.

$$\Rightarrow \quad \boxed{}$$

Lösung der hom. lin. Dgl. 1 Ordnung

② Für den inhomogenen Fall bestimmen wir eine Lösung ($f(x)$ wieder dabei) durch Variation der Konstanten

Beispiel: AWP (Anfangswertproblem) $\quad xy' + y = \frac{1}{x} \quad , x > 0$

mit $y(1) = 0$.

Lösung: $\quad y(x) = \frac{\ln x}{x} \quad$ mit $x > 0$

insgesamt: $\boxed{}$

allgemeine Lösung

① homogen: $xy' + y = 0$ (ohne $f(x) = \frac{1}{x}$)

$$\Rightarrow \quad x\frac{dy}{dx} + y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = -x\frac{dy}{dx} \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{1}{y}\,dy = -\int \frac{1}{x}\,dx$$

separiert

NR:

also: $\ln|y| = -\ln|x| + c$

② inhomogen, Variation der Konstanten:

Ansatz:

Für Dgl. fehlt noch $y_p'(x)$:

Einsetzen liefert:

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$

Partikuläre Lösung: $y_p(x) = \dfrac{C(x)}{x} = \dfrac{\ln x}{x}$

insgesamt: $\boxed{}$

allgemeine Lösung

Eins fehlt noch: AWP

$y(1)=0$, also $y(1)=\frac{C}{1}+\frac{\cancel{\ln 1}^{\,0}}{1}=0 \Rightarrow \boxed{C=0}$

$\Rightarrow$

Übungen. $y'+\frac{y}{x+1}=e^{-x}$, $y=?$ Lösungen. $y_h(x)=\frac{C}{x+1}$, $y_p(x)=\frac{-(x+2)\cdot e^{-x}}{x+1}$

$y'-\frac{1}{x}y=\frac{x^2+x+1}{x}$, $y=?$ Lösungen: $y_h(x)=C\cdot x$, $y_p(x)=x^2+x\ln x-1$

VI.1.4 Bernoulli'sche Differentialgleichung

Lösung: Ohne $\alpha=0$ und $\alpha=1$, d.h. $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$

Ansatz: $y(x)=[u(x)]^{\lambda}$

↳ ableiten: $y'(x)\underset{KR}{=}\underbrace{\lambda\cdot[u(x)]^{\lambda-1}}_{\text{außen}}\cdot\underbrace{u'(x)}_{\text{innen}}$

Einsetzen liefert

$$\lambda\,[u(x)]^{\lambda-1}\,u'(x)=p(x)\cdot[u(x)]^{\lambda}+q(x)\cdot[u(x)]^{\lambda\cdot\alpha}\qquad\Big|\cdot[u(x)]^{1-\lambda}$$

$$\lambda\cdot u'(x)=p(x)\cdot u(x)+q(x)\cdot[u(x)]^{\lambda\cdot\alpha-\lambda+1}$$

$\Rightarrow$ Wieder eine Bernoulli-Dgl., ABER: λ ist frei wählbar

$\Rightarrow$ Besonders einfache Dgl. für $\alpha\cdot\lambda-\lambda+1=0$

$\Leftrightarrow$

<u>Zusammenfassung:</u>

<u>Bsp.</u> $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$, $x > 0$ und $y(1) = 1$ (AWP).

umschreiben: $y' = \underbrace{\frac{1}{x}}_{p(x)} \cdot y + \underbrace{x}_{q(x)} \cdot y^{-1}$ ← α

$\Rightarrow$ <u>Substitution:</u>

<u>Ableitung</u>.

Kehrwert

Einsetzen liefert: $\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{u(x)}} \cdot u'(x)}_{y'} = \frac{1}{x} \cdot \underbrace{\sqrt{u(x)}}_{y} + x \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{u(x)}}}_{y^{-1}} \quad \Big| \; 2\sqrt{u(x)}$

$\Rightarrow$ $\boxed{}$ lineare, inhomogene Dgl. 1. Ordnung

<u>Lösung:</u> $u(x) = x^2 \cdot (2\ln x + A)$

↳ Rücksubstitution:

Vorgehensweise:

① Bernoulli-Dgl. erkennen, gegebenfalls durch Umsortieren:

$$y' = p\cdot y + q\cdot y^{\alpha}.$$

② Substitution: $y = u^{\frac{1}{1-\alpha}}$ $\Rightarrow$ lin. Dgl 1. Ord.

③ Lösen dieser Dgl.: $\underbrace{\text{a) homogen} \quad \text{b) partikulär}}_{\text{allgemeine Lösung}}$

④ Rücksubstitution: $y = u^{\frac{1}{1-\alpha}}$

Übung zur Substitution:

$$u(t)\cdot(1+t)\; u'(t) = [u(t)]^2 - 1 - (1+t)^2 \text{ mit } t \geq 0 \text{ und } u(0) = 1$$

$\Rightarrow$ **Substitution:**

$\Rightarrow$

Rücksubstitution:

VI.1.5 Homogene Differentialgleichung

Gleichungen der Form

nennt man homogene Differentialgleichung. Lösung erfolgt mittels der Substitution $z(x) = y(x)/x$:

$\Rightarrow$ Ableitung:

Logarithmengesetze

$\downarrow$

Bsp. $xy' = y \cdot (\ln x - \ln y + 1) \quad |:x \quad \Rightarrow$

$\hookrightarrow$

$\Rightarrow$

Einsetzen:

VI 2 Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung

Definition: Eine lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung hat die Gestalt

für alle x aus einem Intervall I mit Funktionen $a_j : I \to \mathbb{C}, j = 0,1,\dots,n$ und $f: I \to \mathbb{C}$. Ist $f(x) \equiv 0$, so liegt eine homogene lineare Dgl. n-ter Ordnung vor

Zur Lösung: Sind y_1 und y_2 Lösungen der homogenen lin Dgl., so sind es auch

$$y_1 + y_2 \quad \text{und} \quad \bar{\lambda} \cdot y_1 \text{ für alle } \bar{\lambda} \in \mathbb{C}.$$

Daraus folgt die folgende Vorgehensweise bei diesem Dgl.-Typ:

1. Allgemeine Lösung der homogenen Dgl. bestimmen
2. Eine partikuläre Lösung der inhomogenen Dgl. bestimmen (ANSATZ!)
3. Summation von 1 und 2
4. Bei AWP's Integrationskonstanten bestimmen.

VI.2.1 Konstante Koeffizienten

Bsp. $\quad y'''(x) - y''(x) + y'(x) - y(x) = 0 \;, \; x \in \mathbb{R}$

homogene, lineare Differential-gleichung 3. Ordnung

Rückblick zum Lösen des Problems: $\Big\}$ 1 Ordnung. $\quad y' - \lambda y = 0$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow y' = \lambda y \quad \Big| \text{ Separationsansatz} \Rightarrow \int \frac{1}{y}\, dy = \int \lambda\, dx$$

$\Rightarrow \ln|y| = \lambda \cdot x + c$, also $\underbrace{y(x) = A \cdot e^{\lambda x}}_{\text{Exponentialansatz}}$

AKTUELL:

Exponentialansatz $y = e^{\lambda x}$ $\Rightarrow$ in unsere Bsp.-Dgl. einsetzen:

$$y = e^{\lambda x} \; ; \; y' = \lambda \cdot e^{\lambda x} \; ; \; y'' = \lambda^2 \cdot e^{\lambda x} \; ; \; y''' = \lambda^3 \cdot e^{\lambda x}$$

$\hookrightarrow$ Einsetzen.

Nullstellen bestimmen: Rate $\lambda_1 = 1$, d.h. (mit Polynomdivision)

$$(\lambda - 1) \cdot (\lambda^2 + 1) = 0 .$$

Eine Lösung der Differentialgleichung ist nun für $\lambda_1 = 1$ gegeben, nämlich

$$y_1(x) = c_1 \cdot e^x$$

ABER: 3.Ordnung braucht 3 Lösung $\Rightarrow$ weitere Nullstellen im Faktor $(\lambda^2 + 1)$.

gesamte homogene Lösung: $y_h(x) = y_1(x) + y_2(x) + y_3(x)$

Reelle Lösung: Sowohl Real- als auch Imaginärteil sind Lösungen der Dgl., d.h. die reelle Lösung ist hier gegeben durch

<u>Erläuterung:</u> Lösungen sind

Bedingungen vom Anfang $\Rightarrow$ $y_a \pm y_b$ und $\bar{\lambda} \cdot (y_a \pm y_b)$ sind Lösungen

$\Rightarrow$ <u>Wahl:</u> $\underbrace{\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}}$ und $\underbrace{\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}}$

<u>Aus Euler-Formel:</u>

VI.2.2 Mehrfache Nullstellen bei konstanten Koeffizienten

<u>Bsp.</u> $y'''(x) - 3y''(x) + 3y'(x) - y(x) = 0$

<u>Ansatz:</u> $y(x) = e^{\lambda x}$, d.h.

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$$

bzw. $(\lambda-1)^3 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2,3} = 1$ ist dreifache Nullstelle

$\Rightarrow$ $y_1(x) = e^x$ ist Lösung

Pascalsches Dreieck:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

Methode zum Auffinden weiterer Lösung: Reduktion der Ordnung!

↳ **Ansatz:** Ist $y_1(x)$ Lösung, so verwende

$$y(x) = v(x) \cdot y_1(x).$$

$\Rightarrow$ in Dgl. einsetzen!

↓

Vorbereitung: $y(x) = v \cdot e^x$ mit $v = v(x)$.

$y'(x) \overset{PR}{=}$

$y''(x) \overset{PR}{=}$

$y'''(x) \overset{PR}{=}$

↓

Einsetzen:

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $v'''(x) =$

Reduktion der Ordnung: Es ergibt sich eine Dgl. 2. Ordnung für v'.

$\Rightarrow$ $v(x) =$

$\Rightarrow$ **Lösung:**

↳ **allgemein:**

$\Rightarrow$ Was noch fehlt: Eine von 0 verschiedene rechte Seite!

VI. 2.3 Eine von 0 verschiedene rechte Seite

Auffinden einer partikulären Lösung bei $f(x) \neq 0$ (rechte Seite) bei

$$\sum_{i=0}^{n} a_{n-i} \cdot y^{(n-i)}(x) = f(x).$$

Bsp. Methode: Ansatz vom Typ der rechten Seite

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 12x^4 - 4x^3 + 4x$$

↳ homogen:

↳ inhomogen: rechte Seite $12x^4 - 4x^3 + 4x$ (Polynom 4. Grades)

⇒ Ansatz: $y_p(x) =$

In Dgl.: benötigt $y_p'(x) =$

$y_p''(x) =$

⇒

⇒

Übersicht zu den Ansätzen

rechte Seite	Ansatz für partikuläre Lösung
Polynom: p mit $\mathrm{Grad}(p) = n$	
Trigonom. Funktionen: $\cos(\omega x)$ $\sin(\omega x)$	
Exponentialfunktion: $c \cdot \exp(\omega x)$	
Produkt von Polynom u. TF: $p(x) \cdot \cos(\omega x)$ $p(x) \cdot \sin(\omega x)$ mit $\mathrm{Grad}(p) = n$	
Produkt von Polynom u Exp.: $p(x) \cdot \exp(\omega x)$ mit $\mathrm{Grad}(p) = n$	
Produkt alle drei: $p(x) \cdot \cos(\omega x) \cdot \exp(\sigma x)$ $p(x) \sin(\omega x) \cdot \exp(\sigma x)$ mit $\mathrm{Grad}(p) = n$	

HINWEIS!

Für Summen der angegebenen rechten Seiten ist der Ansatz für jeden Summanden separat durchzuführen. Speziell: Hyperbolische Funktionen sind Summen von Exponentialfunktionen.

▷ Ist im Resonanzfall λ eine k-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms, so muss der Ansatz mit x^k multipliziert werden.

HINWEIS II

VI 2 4 Der Resonanzfall

Bsp. $y''(x) + y(x) = \cos x \quad , x \in \mathbb{R}$

↳ charakteristisches Polynom:

also $\tilde{y}_h(x) =$

↳ reell: $y_h(x) = c_1 \cdot \cos x + c_2 \cdot \sin x \quad , x \in \mathbb{R}$

Ansatz: $y_p(x) = A \cdot \cos x + B \cdot \sin x$

scheitert!

Variation der Konstanten schafft Abhilfe:

↳ Wir verwenden:

Ansatz 1: $y_1(x) = A(x) \cdot e^{i x}$

Konstante wird variiert

Einsetzen in Dgl. $y'' + y = \cos x$ liefert

Es gilt daher $\Rightarrow$

Ansatz 2:

↳ cos wieder zusammengesetzt, ergibt

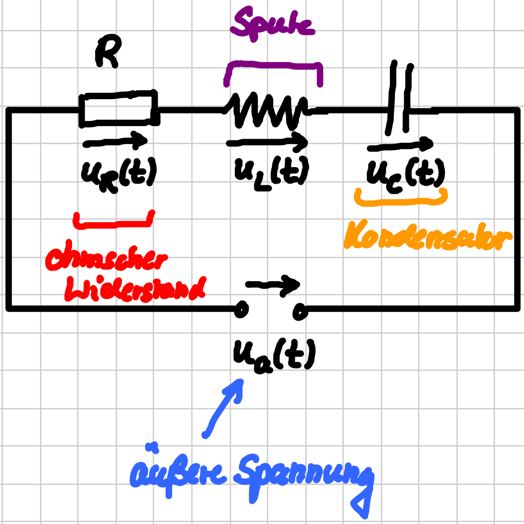
$$y_p(x) = \frac{1}{2} x \cdot \sin x$$

allgemein: Neuer Ansatz

Grad des Polynoms um 1 erhöht

$$y_p(x) = A\, x \cdot \cos x + B \cdot x \cdot \sin x$$

VI.3 Differentialgleichungen 2. Ordnung (optional) ZUSATZ I



Elektrischer Reihenschwingkreis

Nach dem 2 Kirchhoffschen Gesetz (Maschenregel) gilt

$$u_L + u_R + u_C = u_a$$

Induktionsgesetz: $u_L = L \cdot \frac{di}{dt}$

Ohmsches Gesetz: $u_R = R \cdot i$

Kondensatorgleichung: $u_C = \frac{1}{C} \cdot q$

$$\Rightarrow \quad L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i + \frac{1}{C} \cdot q = u_a \qquad \Big| \frac{d}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad L \cdot \frac{d^2 i}{dt^2} + R \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \cdot i = \frac{du_a}{dt}$$

inhomogene, lineare Dgl. 2. Ordnung

$\Rightarrow$ umformen. $$\frac{d^2i}{dt^2} + 2\delta \cdot \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = \frac{1}{L} \cdot \frac{du_e}{dt}$$

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ Eigenfrequenz

$\frac{R}{2L}$ Dämpfungsfaktor

Mechanische System (Pendel):

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = \frac{F(t)}{m}$$

VI 3.1 Allgemeine Dgl. der freien, ungedämpften harmonischen Schwingung

Mechanisches System: Energiebilanz (Energieerhaltungssatz)

$$E_{ges} = E_{pot}(t) + E_{kin}(t) = const.$$

$$\Rightarrow E_{ges} = E_{pot}(y(t)) + E_{kin}(\dot{y}(t)) \quad \Big| \text{ Kettenregel, ableiten}$$

$$\frac{dE_{ges}}{dt} = \underbrace{\frac{dE_{pot}}{dy}}_{\text{außen}} \cdot \underbrace{\frac{dy}{dt}}_{\text{innen}} + \frac{dE_{kin}}{d\dot{y}} \cdot \frac{d\dot{y}}{dt}$$

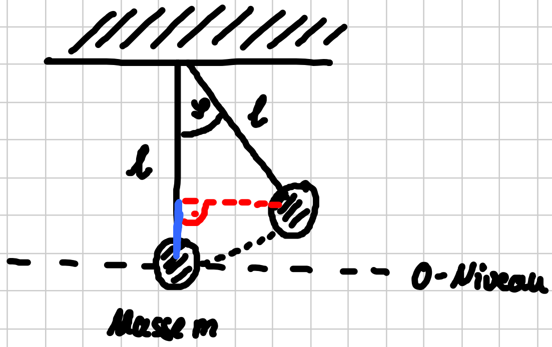
$$= \frac{dE_{pot}}{dy} \cdot \dot{y} + \frac{dE_{kin}}{d\dot{y}} \cdot \ddot{y} = 0$$

$\frac{1}{2}ky^2$ $\quad$ $\frac{1}{2}m\dot{y}^2$ $\quad$ da konstant

$$\Rightarrow \frac{d(\frac{1}{2}ky^2)}{dy} \cdot \dot{y} + \frac{d(\frac{1}{2}m\dot{y}^2)}{d\dot{y}} \cdot \ddot{y} = ky\dot{y} + m\dot{y}\ddot{y} = 0 \quad | : \dot{y}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{y + \frac{m}{k}\ddot{y} = 0}$$

Bsp. 1 **Modell**



Energiebilanz: $E_{pot} + E_{kin} = E_{ges}$ | Ableitung nach der Zeit

$E_{pot} = mgl \cdot (1 - \cos\varphi)$, $E_{kin} = \frac{1}{2} m (l\dot{\varphi})^2$

$$\frac{d\left(\frac{1}{2} m (l\dot{\varphi})^2\right)}{d\dot{\varphi}} \ddot{\varphi} + \frac{d\left(mgl \cdot (1-\cos\varphi)\right)}{d\varphi} \dot{\varphi} = 0$$

$$\Rightarrow \quad m l^2 \dot{\varphi} \ddot{\varphi} + mgl \sin\varphi \cdot \dot{\varphi} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin\varphi = 0}$$

Unabhängig von der Masse!

keine harmonische Schwingung

$\Rightarrow$ Näherung: $\sin\varphi \approx \varphi$

$$\downarrow$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \cdot \varphi = 0$$

VI.3.2 Mathematische Behandlung der Schwingungs-Dgl.

Lösung von:

Ohne Reibung: $\delta = 0 \Rightarrow \dot{y} + \omega_0^2 y = 0$

gesucht: sich selbst reproduzierende Funktion (bis auf den Faktor $-\omega_0^2$)

↳ **reell:**

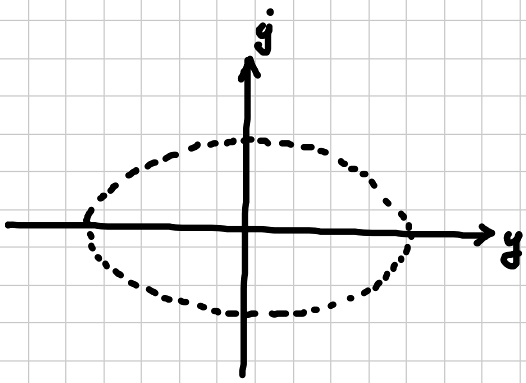
↳ **komplex:**

Bilden wir nun: $\dot{y}(t) =$

$y(t) =$

$\dot{y}(t) =$

$\Leftrightarrow$



Ellipse im Phasenraum

Mit Reibung: $\delta \neq 0$

Ansatz:

In die Dgl. einsetzen $(f(t)=0)$.

$\Rightarrow$ MNF:

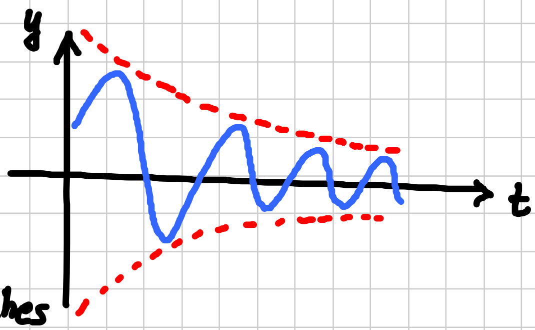
3 Fälle gibt es zu unterscheiden:

(1) Schwingfall:

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$ allgemeine Lösung:

Schaubild:



logarithmisches Dekrement

$$\Lambda = \ln \frac{y(t)}{y(t-T)} = \delta \frac{2\pi}{\omega_d}$$

(2) Kriechfall: $\omega_0 < \delta$, reelle Lösungen

(3) Aperiodische Grenzfall: $\omega_0 = \delta$

ZUSATZ ENDE I