Berufsakademie Stuttgart
Staatliche Studienakademie

Klausur
Mathematik 1
(WS 2007/8)

Ausbildungsbereich	Technik
Fachrichtung	Elektrotechnik
Gruppe	3
Studienjahrgang	2007
Studienhalbjahr	1
Dozent	A. Kessler
Datum	
Bearbeitungszeit	90 Minuten
Gesamtpunktzahl	90
Hilfsmittel	Taschenrechner Casio fx-82 SOLAR, beigefügte Formelsammlung (4 Seiten)

Hinweise

- Überprüfen Sie vor Beginn der Klausur, ob Sie gesund und prüfungsfähig sind!
- Verwenden Sie keinen Rotstift!
- Die Aufgaben K1 und K4 sind auf dem Aufgabenblatt zu bearbeiten!
- Die Aufgaben K2 und K3 sind auf je einem Doppelbogen zu bearbeiten!
- Legen Sie am Prüfungsende alle Blätter in einen Doppelbogen, und schreiben Sie wenigstens auf diesen Doppelbogen Ihren Namen!

Name :

Erreichte Punktzahl :

in K1
in K2
in K3
in K4

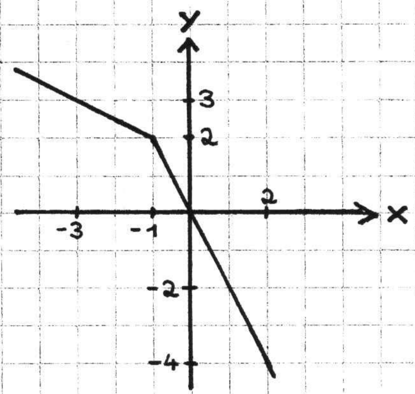
gesamt

Note : ∅

Viel Erfolg!

K1 $(2+7+2+3 = 14$ VP$)$

Das rechts gezeichnete Schaubild gehört zu einer reellen Funktion f mit $f(x) = c\cdot|x-a| + mx + b$.



a) Zeichnen Sie dazu das Schaubild der Umkehrrelation f^{-1} !

b) Ergänzen Sie nach Bestimmung der reellen Parameter a, b, c, m

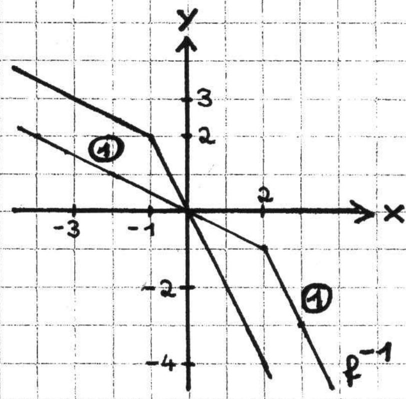
$f(x) =$ $=$ $\left[\begin{array}{ll} & \text{für } x \\ & \text{für } x \end{array}\right.$

c) Warum ist die Umkehrrelation f^{-1} ebenfalls eine Funktion ?

d) Ergänzen Sie

$f^{-1}(x) = \left[\begin{array}{ll} & \text{für } x \\ & \text{für } x \end{array}\right.$!

K1 $(2+7+2+3 = 14\text{ VP})$



Das rechts gezeichnete Schaubild gehört zu einer reellen Funktion f mit $f(x) = c \cdot |x-a| + mx + b$.

a) Zeichnen Sie dazu das Schaubild der Umkehrrelation f^{-1} !

b) Ergänzen Sie nach Bestimmung der reellen Parameter a, b, c, m

$$f(x) = \boxed{-\frac{3}{4}\cdot|x+1| - \frac{5}{4}x + \frac{3}{4} \overset{1}{=} \begin{cases} -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} & \text{für } x < -1 \\ -2x & \text{für } x \geq -1 \end{cases}}$$

1 1 1 1 1 1

c) Warum ist die Umkehrrelation f^{-1} ebenfalls eine Funktion ?

- f ist <u>stetig</u> 1 und <u>streng monoton fallend</u> 1 <u>oder</u>
- $f^{-1}: \; x = \begin{cases} -\frac{1}{2}y + \frac{3}{2} & \text{für } y < -1 \iff x > 2 \\ -2y & \text{für } y \geq -1 \iff x \leq 2 \end{cases}$ 1

$\iff f^{-1}: \; y = \begin{cases} -2x + 3 & \text{für } x > 2 \\ -\frac{1}{2}x & \text{für } x \leq 2 \end{cases}$ 1 <u>eindeutig</u> !

d) Ergänzen Sie

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x \;\; ① & \text{für } x \leq 2 \\ -2x + 3 \;\; ① & \text{für } x > 2 \end{cases} \quad ① \quad !$$

K2 $(7+7+2+5 = 21$ VP$)$

Die ganzrationalen Funktionen f_i mit $f_i(x) = (x-a)^i$, $i \in \{0;1;2;3\}$, sind für $a \in \mathbb{R}$ ebenfalls reell gegeben.

a) Untersuchen Sie die Menge $\mathfrak{B} = \{f_i \mid i \in \{0;1;2;3\}\}$ auf lineare Unabhängigkeit!

b) Stellen Sie die Funktionen g_i mit $g_i(x) = x^i$, $i \in \{0;1;2;3\}$, jeweils als Linearkombination der f_i dar!

c) Ist $\{f_i \mid i \in \{0;1;2;3\}\}$ eine Basis des Vektorraumes aller ganzrationalen Funktionen 3. Grades? Begründen Sie kurz!

d) Bestimmen Sie g mit $g(x) = 3 - 5x - 2x^2 + 2x^3$ als Linearkombination der f_i für $a = -2$!

K2 $(7 + 7 + 2 + 5 = 21\text{ VP})$

Die ganzrationalen Funktionen f_i mit $f_i(x) = (x-a)^i$, $i \in \{0;1;2;3\}$, sind für $a \in \mathbb{R}$ ebenfalls reell gegeben.

a) Untersuchen Sie die Menge $\mathbb{B} = \{f_i \mid i \in \{0;1;2;3\}\}$ auf lineare Unabhängigkeit!

b) Stellen Sie die Funktionen g_i mit $g_i(x) = x^i$, $i \in \{0;1;2;3\}$, jeweils als Linearkombination der f_i dar!

c) Ist $\{f_i \mid i \in \{0;1;2;3\}\}$ eine Basis des Vektorraumes aller ganzrationalen Funktionen 3. Grades? Begründen Sie kurz!

d) Bestimmen Sie g mit $g(x) = 3 - 5x - 2x^2 + 2x^3$ als Linearkombination der f_i für $a = -2$!

DB1

zu a): $f_0 \cdot s_0 + f_1 \cdot s_1 + f_2 \cdot s_2 + f_3 \cdot s_3 = 0$

$$\overset{(1)}{\Longleftrightarrow} \quad \forall x \in \mathbb{R}: \quad s_0 + (x-a)\cdot s_1 + (x-a)^2 \cdot s_2 + (x-a)^3 \cdot s_3 = 0 \quad \text{I} \quad \text{bzw. } \tfrac{d}{dx}$$

$$(1) \qquad s_1 + 2(x-a)\cdot s_2 + 3\cdot(x-a)^2 \cdot s_3 = 0 \quad \text{II}$$

$$(1) \qquad 2s_2 + 6\cdot(x-a)\cdot s_3 = 0 \quad \text{III}$$

$$(1) \qquad 6 \cdot s_3 = 0$$

$$\text{IV} \Rightarrow \underline{\underline{s_3 = 0}} \ (\tfrac{1}{2}) \quad \overset{\text{in III}}{\Longrightarrow} \quad \underline{\underline{s_2 = 0}} \ (\tfrac{1}{2})$$

$$\overset{\text{in II}}{\Longrightarrow} \quad \underline{\underline{s_1 = 0}} \ (\tfrac{1}{2}) \quad \overset{\text{in I}}{\Longrightarrow} \quad \underline{\underline{s_0 = 0}} \ (\tfrac{1}{2})$$

$\overset{\text{Def.}}{\Longrightarrow}$ $\{f_i \mid i \in \{0;1;2;3\}\}$ ist linear unabhängig! (1)

zu b): $g_0 = \underline{\underline{f_0 \cdot 1}}$ (1) und $g_1(x) = x = \underline{a + (x-a)} = \underline{f_0(x)\cdot a + f_1(x)\cdot 1}$ (1)

$\Rightarrow g_1 = \underline{\underline{f_0 \cdot a + f_1 \cdot 1}}$ (1)

und $g_2(x) = x^2 = (a + (x-a))^2 = \underline{a^2 + (x-a)\cdot 2a + (x-a)^2 \cdot 1}$ (1)

$\Rightarrow g_2 = \underline{\underline{f_0 \cdot a^2 + f_1 \cdot 2a + f_2}}$ (1)

und $g_3(x) = x^3 = (a + (x-a))^3 = \underline{a^3 + (x-a)\cdot 3a^2 + (x-a)^2 \cdot 3a + (x-a)^3 \cdot 1}$ (1)

$\Rightarrow g_3 = \underline{\underline{f_0 \cdot a^3 + f_1 \cdot 3a^2 + f_2 \cdot 3a + f_3 \cdot 1}}$ (1)

zu c): Ja, wegen a) $\overset{(1)}{\Longrightarrow}$ lineare Unabhängigkeit
wegen b) $\underset{(1)}{\Longrightarrow}$ Erzeugendensystem $\Big\}$ Basis!

zu d): … am schnellsten per Horner Schema für $a = -2$ (1)

$g(x) =$	$2 \cdot x^3$	$- 2 \cdot x^2$	$- 5 \cdot x$	$+ 3$	
	0	−4	12	−14	
	2	−6	7	−11	(1)
	0	−4	20		
	2	−10	27	(1)	
	0	−4			
	2	−14	(1)		

$$\Rightarrow g = \underline{\underline{f_0 \cdot (-11) + f_1 \cdot 27 + f_2 \cdot (-14) + f_3 \cdot 2}} \ (1)$$

K4 $(4+3+7+6 = 20\,\text{VP})$

Lösen Sie möglichst effektiv und exakt!

a) $\begin{vmatrix} x & 7 & x \\ 1 & x & -4 \\ 3 & x & -1 \end{vmatrix} = 0$

b) $2\sqrt{3} = -x\cdot\cos(y) \;\wedge\; -2 = x\cdot\sin(y) \;\wedge\; x > 0 \;\wedge\; -\pi < y \le \pi$

c) $$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 &= 49 \\ 11x_1 + 2x_2 + 13x_3 &= 140 \\ 23x_1 - 17x_2 - 19x_3 &= 33 \end{aligned}$$

d) $\sum_{i=0}^{n} i^2 = n\cdot(x_1 + x_2\cdot n + x_3\cdot n^2) \;\wedge\; n \in \mathbb{N}$

zu a):

$$0 = \begin{vmatrix} x & 7 & x \\ 1 & x & -4 \\ 3 & x & -1 \end{vmatrix} \underset{-S_1}{=} \begin{vmatrix} x & 7 & 0 \\ 1 & x & -5 \\ 3 & x & -4 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} x & 7 \\ 3 & x \end{vmatrix}\cdot 5 - \begin{vmatrix} x & 7 \\ 1 & x \end{vmatrix}\cdot 4$$

$$= (x^2-21)\cdot 5 - (x^2-7)\cdot 4 \iff x^2 = 77 \iff x = \mp\sqrt{77} \quad (1)\ (1)$$

$$= x^2 - 77 \quad (1)$$

zu b): $2\sqrt{3} = -x\cdot\cos(y) \;\wedge\; -2 = x\cdot\sin(y) \;\wedge\; x>0 \;\wedge\; y \in\,]-\pi;\pi]$

$$\iff \begin{pmatrix}\cos(y)\\ \sin(y)\end{pmatrix}\cdot x = \begin{pmatrix}-2\sqrt{3}\\ -2\end{pmatrix} \;(1)\; \wedge\; x = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = 4 \;(1)\; (>0)$$

$$\wedge\; y = -\arccos(-2\sqrt{3}/4) = -\arccos(-\sqrt{3}/2) = -\frac{5\pi}{6} \quad (1)$$

zu c): ... eindeutig lösbar?

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 11 & 2 & 13 \\ 23 & -17 & -19 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 11 & 2 \\ 23 & -17 \end{vmatrix}\cdot 7 - \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 23 & -17 \end{vmatrix}\cdot 13 + \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 11 & 2 \end{vmatrix}\cdot(-19)$$

$$= -233\cdot 7 + 166\cdot 13 + 49\cdot 19 = 1458 \neq 0$$

$\Rightarrow$ Ja, LGS per Cramer Regel lösbar (eindeutig!) (1)

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 49 \\ 11 & 2 & 140 \\ 23 & -17 & 33 \end{vmatrix} = -233\cdot 49 + 166\cdot 140 + (-49)\cdot 33 = 10206 \quad (1)$$

$$\Rightarrow x_3 = \frac{10206}{1458} = 7 \quad (1) \quad \text{in I, II:}$$

(1) $3x_1 + 5x_2 = 0 \;\wedge\; 11x_1 + 2x_2 = 49$

$$\overset{CR}{\iff} x_2 = \frac{3\cdot 49}{3\cdot 2 - 11\cdot 5} = -3 \quad (1)$$

$$\Rightarrow x_1 = -\frac{5}{3}\cdot x_2 = 5 \quad (1)$$

zu d): $\sum_{i=0}^{0} i^2 = 0 \;\wedge\; \sum_{i=0}^{1} i^2 = 1 \;\wedge\; \sum_{i=0}^{2} i^2 = 5 \;\wedge\; \sum_{i=0}^{3} i^2 = 14$ (1)

... liefert per Ansatz $\sum_{i=0}^{n} i^2 = n\cdot(y_1 + y_2\cdot(n-1) + y_3\cdot(n-1)(n-2))$ (1)

mit
- $n=1$: $y_1 = 1$ (1)
- $n=2$: $2\cdot(y_1+y_2) = 5 \Rightarrow y_2 = \frac{3}{2}$ (1)
- $n=3$: $3\cdot(y_1 + 2y_2 + 2y_3) = 14 \overset{I,II}{\Rightarrow} 3\cdot(4 + 2y_3) = 14 \iff y_3 = \frac{1}{3}$ (1)

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n} i^2 = n\cdot\left(1 + \frac{3}{2}\cdot(n-1) + \frac{1}{3}\cdot(n-1)\cdot(n-2)\right) = \frac{1}{6}\cdot n\cdot(6 + 9\cdot(n-1) + 2(n-1)(n-2))$$

$$= \frac{1}{6}n\cdot(1 + 3n + 2n^2) = n\cdot\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\cdot n + \frac{1}{3}\cdot n^2\right) \quad (1)$$

b.w.

K4 $(4+3+7+6 = 20\,\text{VP})$

Lösen Sie möglichst effektiv und exakt !

a) $\begin{vmatrix} x & 7 & x \\ 1 & x & -4 \\ 3 & x & -1 \end{vmatrix} = 0$

b) $2\sqrt{3} = -x \cdot \cos(y) \;\wedge$
$-2 = x \cdot \sin(y) \;\wedge$
$x > 0 \;\wedge\; -\pi < y \leq \pi$

c) $\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 &= 49 \\ 11x_1 + 2x_2 + 13x_3 &= 140 \\ 23x_1 - 17x_2 - 19x_3 &= 33 \end{aligned}$

d) $\sum_{i=0}^{n} i^2 = n \cdot (x_1 + x_2 \cdot n + x_3 \cdot n^2)$
$\wedge\; n \in \mathbb{N}$

<u>zu d)</u> : Alternativen

<u>1)</u> $\sum_{i=0}^{n} i^2 = n \cdot (x_1 + x_2 n + x_3 n^2)$ $\quad | \; n=1 \; ; \; n=2 \; ; \; n=3$

$$\left.\begin{aligned} 1 &= x_1 + x_2 + x_3 \\ 5 &= 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 \\ 14 &= 3x_1 + 9x_2 + 27x_3 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

x_1	x_2	x_3		
1	1	1	1	
2	4	8	5	$\mid - 2 \cdot \mathrm{I}$
3	9	27	14	$\mid - 3 \cdot \mathrm{I}$
1	1	1	1	
0	2	6	3	$\mid : 2$
0	6	24	11	$\mid - 3 \cdot \mathrm{II} \mid : 6$
1	1	1	1	$\mid - \mathrm{III}$
0	1	3	3/2	$\mid - 3 \cdot \mathrm{III}$
0	0	1	1/3	
1	1	0	2/3	$\mid - \mathrm{II}$
0	1	0	1/2	$\Leftrightarrow x_2 = \frac{1}{2}$
0	0	1	1/3	$\Leftrightarrow x_3 = \frac{1}{3}$
1	0	0	1/6	$\Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{6}$

<u>2)</u> $\sum_{i=0}^{n} (i+1)^3 = \sum_{i=0}^{n} i^3 + (n+1)^3$ einerseits

$= \sum_{i=0}^{n} i^3 + 3\sum_{i=0}^{n} i^2 + 3\sum_{i=0}^{n} i + \sum_{i=0}^{n} 1 = \sum_{i=0}^{n} i^3 + 3\sum_{i=0}^{n} i^2 + \frac{3n}{2}(n+1) + n$
andererseits

Gleichsetzen ergibt :

$$\sum_{i=0}^{n} i^3 + (n+1)^3 = \sum_{i=0}^{n} i^3 + 3 \cdot \sum_{i=0}^{n} i^2 + \frac{n+1}{2} \cdot (3n+2)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{1}{3} \cdot \left[(n+1)^3 - \frac{n+1}{2} \cdot (3n+2) \right]$$

$$= \frac{n+1}{6} \cdot \left[2 \cdot (n+1)^2 - 3n - 2 \right] = \frac{n+1}{6} \cdot \left[2n^2 + 4n + 2 - 3n - 2 \right]$$

$$= \frac{n+1}{6} \cdot \left[2n^2 + n \right] = \frac{n}{6} \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$$

$$= \frac{n}{6} \cdot (1 + 3n + 2n^2) = n \cdot \left(\underline{\underline{\tfrac{1}{6}}} + \underline{\underline{\tfrac{1}{2}}} n + \underline{\underline{\tfrac{1}{3}}} n^2 \right)$$

K3 $(2+2+2+6+4+9+2+8 = 35\ \text{VP})$

Gegeben sind die Punkte $P_1(0|0|0)$, $P_2(2|0|-2)$, $P_3(2|2|-4)$ und $P_4(0|4|-4)$.

a) Bestimmen Sie eine parameterfreie Gleichung der Gerade g, die die Punkte P_2 und P_3 enthält !

b) Ermitteln Sie eine Normalenform der Ebene E, in der die Punkte P_1, P_2 und P_3 liegen !

c) Zeigen Sie : P_4 liegt in E, aber nicht auf g !

d) Zeigen Sie : P_1, P_2, P_3 und P_4 sind Eckpunkte eines regelmäßigen Sechsecks $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$!
(Hinweis : Fertigen Sie eine Planskizze !)

e) Bestimmen Sie die fehlenden Eckpunkte P_5 und P_6 !

Die Spiegelung f an g lässt sich durch die Funktionsgleichung

$$\vec{y} = \vec{b} + \underline{M} \cdot \vec{x}$$

beschreiben.

f) Bestimmen Sie $\vec{b} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ und $\underline{M} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$!

g) Ist f eine LOT ? Begründen Sie kurz !

h) Bestimmen Sie die Bildpunkte $\overline{P}_i = (f(\vec{p}_i))^T$ aller Punkte P_i und den Flächeninhalt des Sechsecks $\overline{P}_1\overline{P}_2\overline{P}_3\overline{P}_4\overline{P}_5\overline{P}_6$ exakt !

K3 $(2+2+2+6+4+9+2+8 = 35\ VP)$

Gegeben sind die Punkte $P_1(0|0|0)$, $P_2(2|0|-2)$, $P_3(2|2|-4)$ und $P_4(0|4|-4)$.

a) Bestimmen Sie eine parameterfreie Gleichung der Gerade g, die die Punkte P_2 und P_3 enthält!

b) Ermitteln Sie eine Normalenform der Ebene ε, in der die Punkte P_1, P_2 und P_3 liegen!

c) Zeigen Sie: P_4 liegt in ε, aber nicht auf g!

d) Zeigen Sie: P_1, P_2, P_3 und P_4 sind Eckpunkte eines regelmäßigen Sechsecks $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$!
(Hinweis: Fertigen Sie eine Planskizze!)

e) Bestimmen Sie die fehlenden Eckpunkte P_5 und P_6!

Die Spiegelung f an g lässt sich durch die Funktionsgleichung

$$\vec{y} = \vec{b} + \underline{M}\cdot\vec{x}$$

beschreiben.

f) Bestimmen Sie $\vec{b} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ und $\underline{M} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$!

g) Ist f eine LOT? Begründen Sie kurz!

h) Bestimmen Sie die Bildpunkte $\bar{P}_i = (f(\vec{p}_i))^T$ aller Punkte P_i und den Flächeninhalt des Sechsecks $\bar{P}_1\bar{P}_2\bar{P}_3\bar{P}_4\bar{P}_5\bar{P}_6$ exakt!

DB2

zu a): $\vec{r}_g \sim \overrightarrow{P_2P_3} = \begin{pmatrix} 2-2 \\ 2-0 \\ -4+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}\cdot(-2)$ $\frac{1}{2}$ $\Rightarrow g: \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\right] = \vec{o}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

zu b): $\vec{n} \sim \frac{1}{2}\overrightarrow{P_1P_2} \times \vec{r}_g = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot(-1) \Rightarrow \varepsilon: \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\vec{x} = 0$ 1 1

zu c): $P_4(0|4|-4)$ in ε: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4-4=0 \Leftrightarrow 0=0$ ist $\underline{\underline{\text{wahr}}}$ 1
$\Rightarrow P_4 \in \varepsilon$, aber

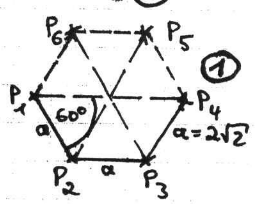
$P_4(0|4|-4)$ in g: $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0-2 \\ 4-0 \\ -4+2 \end{pmatrix} = \vec{o} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \vec{o} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

... ist $\underline{\underline{\text{falsch}}}$ $\Rightarrow$ $P_4 \notin g$ 1

zu d): $\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ 1 ; $\overrightarrow{P_2P_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ 1 ; $\overrightarrow{P_3P_4} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 1 und $\overrightarrow{P_1P_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\overrightarrow{P_2P_3}\cdot 2}}$ 1

$\Rightarrow |\overrightarrow{P_1P_2}| = 2\sqrt{2}$; $|\overrightarrow{P_2P_3}| = 2\sqrt{2}$; $|\overrightarrow{P_3P_4}| = 2\sqrt{2}$ sowie

$\arccos\left(\frac{\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\overrightarrow{P_1P_4}}{|\overrightarrow{P_1P_2}|\cdot|\overrightarrow{P_1P_4}|}\right) = \arccos\left(\frac{8}{2\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{2}}\right) = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{60^\circ}}$ 1



b.w.

zu e): $\overrightarrow{P_1P_6} = \overrightarrow{P_3P_4}$ (1) $\Rightarrow$ $\underline{\underline{P_6(-2|2|0)}}$ (1) und $\overrightarrow{P_1P_5} \overset{(1)}{=} \overrightarrow{P_2P_4} = \begin{pmatrix} 0-2 \\ 4-0 \\ -4+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{P_5(-2|4|-2)}}$ (1)

zu f): Es gilt $\vec{y} - \vec{p}_2 = \underline{M} \cdot (\vec{x} - \vec{p}_2)$ mit (vgl. FoSa!)

$$\left.\begin{array}{l} \underline{M} = \vec{a}_0 \cdot \vec{a}_0^{\,T} + \cos(\alpha)\left(\underline{1}_3 - \vec{a}_0 \cdot \vec{a}_0^{\,T}\right) + \vec{a}_0 \cdot \sin(\alpha) \times \end{array}\right\} (1)$$

sowie $\vec{a}_0 = \vec{r}_g \cdot |\vec{r}_g|^{-1} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}}$ (1) und $\underline{\underline{\alpha = 180^\circ}}$ (1) $\Rightarrow$ $\underline{\underline{\cos(\alpha) = -1}}$ $(\tfrac{1}{2})$ $\wedge$ $\underline{\underline{\sin(\alpha) = 0}}$ $(\tfrac{1}{2})$

und $\vec{a}_0 \cdot \vec{a}_0^{\,T} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (0|-1|1) = \underline{\underline{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}}$ (1)

$\Rightarrow$ $\underline{M} = \vec{a}_0 \cdot \vec{a}_0^{\,T} - \left(\underline{1}_3 - \vec{a}_0 \cdot \vec{a}_0^{\,T}\right) \overset{(1)}{=} 2\,\vec{a}_0 \cdot \vec{a}_0^{\,T} - \underline{1}_3 = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}}$ (1) $= \underline{\underline{-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}}$

und $\vec{b} = \vec{p}_2 - \underline{M}\vec{p}_2 \overset{(1)}{=} (\underline{1}_3 - \underline{M}) \cdot \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}}}$ (1)

zu g): $f(\vec{o}) = \vec{b} = \underline{\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \neq \vec{o}}$ (1) $\Rightarrow$ f ist nicht linear, also $\underline{\underline{\text{keine LOT}}}$ (1)

zu h): $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$ $\Rightarrow$ $f(\vec{p}_1) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $\underline{\underline{\overline{P}_1(4|-2|-2)}}$ (1)

und analog $\underline{\underline{\overline{P}_2(2|0|-2)}}$ (1), $\underline{\underline{\overline{P}_3(2|2|-4)}}$ (1), $\underline{\underline{\overline{P}_4(4|2|-6)}}$ (1), $\underline{\underline{\overline{P}_5(6|0|-6)}}$ (1)

sowie $\underline{\underline{\overline{P}_6(6|-2|-4)}}$ (1) und

$A \overset{(1)}{=} 6 \cdot \frac{1}{2} \left|\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_2P_3}\right| = 3 \cdot \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = 12 \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right| \overset{b)}{=} 12 \left|\begin{pmatrix} +1 \\ +1 \\ +1 \end{pmatrix}\right| = \underline{\underline{12\sqrt{3}}}$ (1)

(alternativ: $A = 6 \cdot \frac{1}{2} a \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} a^2 \sqrt{3} = 12\sqrt{3}$ wg. $a = 2\sqrt{2}$!)