BERUFSAKADEMIE
STUTTGART

University of Cooperative Education

Fachrichtung Elektrotechnik

Studienjahr: 2008 Kurs: TEL08GR1
Semester: 1 ☐ 1. Klausur ☐ Wiederholungsklausur

Fach: Mathematik
Datum: 6. Februar 2009 ....
Prüfer: M. Baum ....

Studierender: ……..................... ← hier Name/Vorname eintragen

Prüfungsdauer: 90 Minuten ....

Hilfsmittel: 6-seitige Formelsammlung, einfacher Taschenrechner

BA Besuchsprüfer: .... External OU Examiner: ....
(wird nur bei Stichprobe ausgefüllt)

Die Klausur besteht aus 3 Teilaufgaben, von denen 3 bearbeitet werden sollen.
Auf die Prüfungsordnung wurde hingewiesen.

Weitere Hinweise:

Aufgaben-nummer	max. Punkte	erreichte Punkte	Besuchs-prüfer	Bemerkungen
1	28			
2	32			
3	30			
Summe				
	Datum:			**Unterschrift Prüfer:**

Aufgabe 1 (28P) - Vektorrechnung -

a) (5P) Für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren $\vec{a} = (1, -1,\ 1)^T$, $\vec{b} = (1,\ t, 1)^T$ und $\vec{c} = (5, 0, t+3)^T$ linear abhängig?

b) (7P) Gegeben sind die zwei Vektoren $\vec{a} = (2p, p, 2p)^T$ mit $p \neq 0$ und $\vec{b} = (2, 4, q)^T$.
Wie müssen die reellen Parameter p und q gewählt werden, damit die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ein Quadrat aufspannen?

c) (4P) Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit $|\vec{a}| = 2$ und $|\vec{b}| = 3$ schließen einen Winkel von $30°$ ein.
Berechnen Sie $\left|(\vec{a}+\vec{b}) \cdot (\vec{a}-\vec{b})\right|$.

d) (4P) Gegeben sind die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Bestimmen Sie $p \in \mathbb{R}$ so, dass der Vektor $\vec{a} + p\vec{b}$ senkrecht auf $\vec{c}$ steht.

e) (8P) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = (1, 2, -1)^T$ und $\vec{b} = (k, 0, 1)^T$.
Für welche Werte des reellen Parameters k hat das von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannte Dreieck den Flächeninhalt $\sqrt{2}$?

Aufgabe 2 (32P) - Lineare Algebra, Matrizen, Determinanten -

a) (13P) Durch die Matrix

$$A_p = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & p-1 & 2 \\ 1 & -3 & p+2 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b}_p = \begin{pmatrix} 1-p \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } p \in \mathbb{R}$$

ist das **inhomogene** lineare Gleichungssystem $A_p \cdot \vec{x} = \vec{b}_p$ gegeben.

Für welche Werte von p ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar?

Geben Sie in diesem Fall nur die Lösung x_1 in Abhängigkeit von p an.

Hinweis: Verwenden Sie hierfür aus strategischen Gründen die **Cramersche Regel**.

b) (7P) Gegeben sind die Matrizen:

$$A_{p,q} = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die reellen Parameter p und q so, dass gilt:

$$A_{p,q} \cdot A_{p,q}^T = B.$$

c) (12P) Durch die Matrix

$$A_a = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 9-a \\ 2 & -3-a & -1 \\ 3-a & 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ mit } a \in \mathbb{R}$$

ist das **homogene** lineare Gleichungssystem

$A_a \cdot \vec{x} = \vec{0}$ gegeben. Zeigen Sie, dass das lineare Gleichungssystem genau dann nichttriviale Lösungen besitzt, wenn gilt: $a^3 - 9a^2 - 30a + 88 = 0$.

Bestimmen Sie die Lösungen dieser Gleichung (eine Lösung kann leicht erraten werden).

Aufgabe 3 (30P) - Lineare Transformationen, Interpolation -

Gegeben seien die zwei Abbildungen

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \text{ mit } f_1(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} \text{ und } f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \text{ mit } f_2(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

a) (2P) Bestimmen Sie die darstellenden Matrizen $[f_1]$ und $[f_2]$ von f_1 bzw. f_2.

b) (4P) Beschreiben Sie die Abbildungen f_1 und f_2 geometrisch.

c) (3P) Bestimmen Sie die darstellende Matrix $[f_1 \circ f_2]$ der verketteten Abbildung $f_1 \circ f_2$.

d) (5P) Um was für eine Abbildung handelt es sich bei $f_1 \circ f_2$? Ist $f_1 \circ f_2$ eine lineare orthogonale Transformation? Begründen Sie.

e) (5P) Bestimmen Sie die darstellende Matrix der folgenden zusammengesetzten Abbildungen auf $\mathbb{R}^2$:

Drehung um den Ursprung um $60°$, dann Orthogonalprojektion auf die x-Achse und schließlich Spiegelung an der Geraden $y = x$.

f) (11P) Gegeben seien die vier Punkte $P_1(0\,|\,1)$, $P_2(1\,|\,2)$, $P_3(2\,|\,0)$ und $P_4(3\,|\,1)$ in der Ebene.

Bestimmen Sie zu den obigen Daten das zugehörige Interpolationspolynom p in der Form $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (verwenden Sie dabei ein **Newtonsches** Interpolationspolynom).