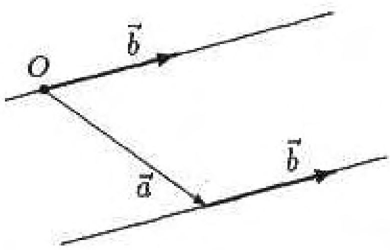
5.26 *Man berechne das Volumen des Tetraeders mit den Eckpunkten:*
$P_1 = (1,0,2)$, $P_2 = (2,3,4)$, $P_3 = (2,1,1)$, $P_4 = (6,3,2)$.

$\vec{a} := \overline{P_1P_2} = (2,3,4) - (1,0,2) = (1,3,2)$
$\vec{b} := \overline{P_1P_3} = (2,1,1) - (1,0,2) = (1,1,-1)$
$\vec{c} := \overline{P_1P_4} = (6,3,2) - (1,0,2) = (5,3,0)$

$$< \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} > = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -16 \Longrightarrow V_{\text{Spat}} = 16 \quad \text{und} \quad V_{\text{Tetr.}} = \tfrac{1}{6}16 \approx \underline{\underline{2.67}}.$$

5.7 Geraden im Raum

Ist $\vec{b} \neq \vec{0}$ und durchläuft der Parameter t die reellen Zahlen, so liegen die Endpunkte von $t \cdot \vec{b}$ auf der durch $\vec{b}$ bestimmten Geraden.



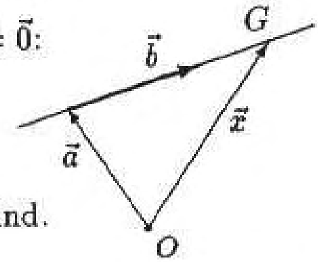
$G: \ \vec{x} = t \cdot \vec{b}$ — ist eine Gleichung der durch den Nullpunkt gehenden Geraden mit der Richtung $\vec{b}$.

$G': \ \vec{x} = \vec{a} + t \cdot \vec{b}$ — ist eine Gleichung der zur obigen Geraden parallelen Geraden, die durch den Endpunkt von $\vec{a}$ verläuft.

Parameterdarstellung der Geraden

durch den Endpunkt von $\vec{a}$ mit der Richtung von $\vec{b} \neq \vec{0}$:

$$\boldsymbol{G: \ \vec{x} = \vec{a} + t \cdot \vec{b}, \ t \in \mathbb{R}.}$$



Zwei Geraden G_1, G_2 sind genau dann **parallel**, wenn ihre Richtungsvektoren $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ linear abhängig sind.

$$G_1 \parallel G_2 \iff \exists \lambda \neq 0 \text{ mit } \vec{b}_1 = \lambda \vec{b}_2.$$

5.27 *Liegen die beiden Punkte* $P_1 = (1,2,10)$, $P_2 = (3,8,4)$ *auf der Geraden* $G: \ \vec{x} = (1,0,2) + t(1,4,1)$?

Läge P_1 auf G, so gäbe es einen Parameterwert t_1, für den $(1,2,10) = (1,0,2) + t_1(1,4,1)$ ist. Komponentenvergleich liefert:

$1 = 1 + t_1, 2 = 4t_1, 10 = 2 + t_1$.

Dieses LGS ist unlösbar, also liegt P_1 nicht auf G.

P_2 liegt auf G, da das entsprechende LGS lösbar ist ($t_2 = 2$).

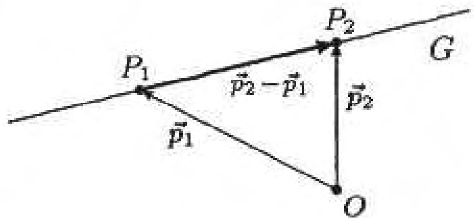
5.28 *Die beiden Geraden* $\begin{array}{l} G_1: \ \vec{x} = (-2,1,-4) + r(-1,1,-2) \\ G_2: \ \vec{x} = (1,-2,2) + s(2,-2,4) \end{array}$ *sind gleich!*

Das LGS $(1,-2,2) = (-2,1,-4) + r(-1,1,-2)$ ist lösbar mit $r = -3$, also liegt $(1,-2,2)$ auf G_1. Weiter ist $(2,-2,4) = -2(-1,1,-2)$. Also sind die Richtungsvektoren der beiden Geraden linear abhängig. Zwei Geraden, die bei gleicher Richtung einen Punkt gemeinsam haben, sind gleich.

Parameterdarstellung der Geraden

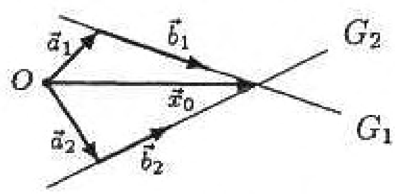
durch zwei Punkte P_1 und P_2:

$G: \ \vec{x} = \vec{p}_1 + t \cdot (\vec{p}_2 - \vec{p}_1)$ mit $t \in \mathbb{R}$.



Schnittpunkt zweier Geraden

$G_1: \ \vec{x} = \vec{a}_1 + r \cdot \vec{b}_1$
$G_2: \ \vec{x} = \vec{a}_2 + s \cdot \vec{b}_2$



Zwei Geraden schneiden sich genau dann, wenn es einen Vektor $\vec{x}_0$ gibt, dessen Endpunkt sowohl auf G_1 als auch auf G_2 liegt.

Durch Gleichsetzen der Geradengleichungen erhält man ein LGS für r, s:

$$\vec{a}_1 + r \cdot \vec{b}_1 = \vec{a}_2 + s \cdot \vec{b}_2 \quad \text{oder} \quad r \cdot \vec{b}_1 - s \cdot \vec{b}_2 = \vec{a}_2 - \vec{a}_1 .$$

Beim Lösen dieses LGS sind folgende drei Fälle möglich:

	Das LGS hat	Die Geraden	Schnittmenge:
1.	keine Lösung	schneiden sich nicht	$\emptyset$
2.	genau eine Lös. r_0, s_0	schneiden sich im Endpunkt von $\vec{x}_0 = \vec{a}_1 + r_0 \cdot \vec{b}_1 = \vec{a}_2 + s_0 \cdot \vec{b}_2$	$\{\vec{x}_0\}$
3.	unendl. viele Lös.	sind identisch	$G_1 = G_2$

5.29 *Man bestimme die Schnittmenge von jeweils zwei der drei Geraden:*

$G_1: \ \vec{x} = (1,-2,1) + r(2,-3,1)$,

$G_2: \ \vec{x} = (3,-3,4) + s(-2,5,1)$,

$G_3: \ \vec{x} = (2,0,1) + t(4,-10,-2)$.

$\boxed{G_1 \cap G_2}$ $(1,-2,1) + r(2,-3,1) = (3,-3,4) + s(-2,5,1)$. Ordnen ergibt:

$$r(2,-3,1) - s(-2,5,1) = (2,-1,3)$$

Koordinatenvergleich liefert das LGS

r	s	
2	2	2
−3	−5	−1
1	−1	3

mit der Lösung $r = 2$, $s = -1$.

G_1 und G_2 schneiden sich folglich im Endpunkt von

$\vec{x}_0 = (1,-2,1) + 2(2,-3,1) = (3,-3,4) - 1(-2,5,1) = (5,-8,3)$.

$G_1 \cap G_2 = \underline{\underline{\{(5,-8,3)\}}}$.

$\boxed{G_2 \cap G_3}$ Gleichsetzen der Gleichungen von G_2 und G_3 liefert das LGS

s	t	
−2	−4	1
5	10	−3
1	2	3

Dieses LGS ist unlösbar.
Die Geraden schneiden sich nicht.
$G_2 \cap G_3 = \underline{\underline{\emptyset}}$.

Da die Richtungsvektoren von G_2, G_3 linear abhängig sind, sind die Geraden parallel.

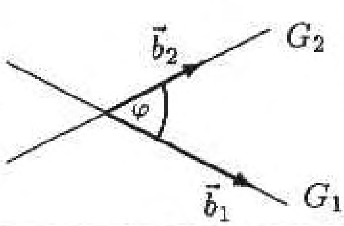
$\boxed{G_1 \cap G_3}$ Man erhält wieder ein unlösbares LGS, $G_1 \cap G_3 = \underline{\underline{\emptyset}}$.

G_1 und G_3 schneiden sich nicht und sind nicht parallel, solche Geraden nennt man *windschief*.

Schnittwinkel zweier sich schneidender Geraden $G_1: \ \vec{x} = \vec{a}_1 + t \cdot \vec{b}_1$, $G_2: \ \vec{x} = \vec{a}_2 + t \cdot \vec{b}_2$

Der Winkel φ mit $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ zwischen zwei sich schneidenden Geraden ist der Winkel zwischen ihren Richtungsvektoren, falls dieser kleiner oder gleich $\frac{\pi}{2}$ ist, sonst π minus diesem Winkel. Es gilt:

$$\cos\varphi = \left|\frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2}{|\vec{b}_1| \cdot |\vec{b}_2|}\right| \quad \text{mit} \quad \varphi = \sphericalangle(\vec{b}_1, \pm\vec{b}_2)^* = \sphericalangle(G_1, G_2).$$



*) $\pm\vec{b}_2$ so wählen, daß $\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 > 0$ ist.

5.30 *Man berechne ggf. den Schnittwinkel der folgenden beiden Geraden:*

$G_1: \ \vec{x} = (1,-2,1) + r(2,-3,1)$ und $G_2: \ \vec{x} = (3,-3,4) + s(-2,5,1)$.

Die beiden Geraden schneiden sich, siehe BEI 5.29

$$\cos\varphi = \left|\frac{(2,-3,1)\cdot(-2,5,1)}{|(2,-3,1)|\cdot|(-2,5,1)|}\right| = \left|\frac{-18}{\sqrt{14}\sqrt{30}}\right| \approx 0.8783 \Longrightarrow \varphi \approx \underline{\underline{28.56^0}}.$$

Da das Skalarprodukt der Richtungsvektoren −18, also negativ ist, ist der Winkel zwischen den Richtungsvektoren größer als 90^0, er beträgt $\arccos(-0.8783) = 151.44^0$. Der Schnittwinkel der Geraden ist $180^0 - 151.44^0 = 28.56^0$.

5.31 *Man bestimme die Geraden durch $P = (-2,-5,2)$, die die Gerade $G: \vec{x} = (-1,-3,1) + t(1,0,1)$ unter 30^0 schneiden.*

$\vec{p} - \vec{x} = (-1,-2,1) - t(1,0,1) = (-1-t, -2, 1-t)$.

Die Geraden schneiden sich genau dann unter 30^0, wenn der Winkel zwischen $\vec{p} - \vec{x}$ und dem Richtungsvektor $(1,0,1)$ von G 30^0 oder 150^0 beträgt (siehe Schlußbemerkung in der vorigen Aufgabe).

$\sphericalangle(\vec{p} - \vec{x}, (1,0,1)) = 30^0$ oder 150^0, mit $\cos 30^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\cos 150^0 = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad (\vec{p} - \vec{x}) \cdot (1,0,1) &= |\vec{p} - \vec{x}| \cdot |(1,0,1)| \cdot (\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{3}) \\ -2t &= \sqrt{2t^2+6}\sqrt{2}\,(\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{3}) \\ 4t^2 &= (2t^2+6) \cdot \frac{6}{4} = 3t^2 + 9, \text{ also:} \\ t_{1,2} &= \pm 3, \quad \text{also erhält man folgende zwei Punkte auf } G: \end{aligned}$$

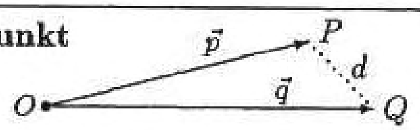
$\vec{x}_1 = (-1,-3,1) - 3(1,0,1) = (-4,-3,-2)$, $\quad \vec{p} - \vec{x}_1 = (2,-2,4)$,
$\vec{x}_2 = (-1,-3,1) + 3(1,0,1) = (2,-3,4)$, $\quad \vec{p} - \vec{x}_2 = (-4,-2,-2)$.

Also gibt es zwei Geraden durch P, die G unter 30^0 schneiden:

$G_1: \vec{x} = (-2,-5,2) + r(2,-2,4)$ und $G_2: \vec{x} = (-2,-5,2) + s(-4,-2,-2)$.

Abstand Punkt – Punkt

$d = |\overline{PQ}| = |\overline{QP}| = |\vec{q} - \vec{p}| = |\vec{p} - \vec{q}|$

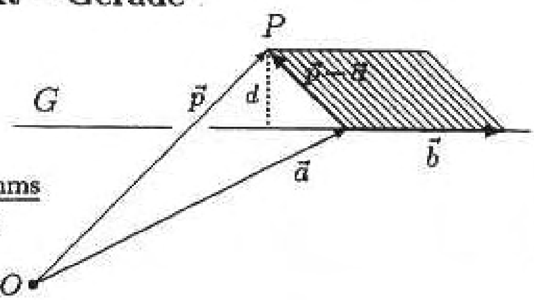


Abstand Punkt – Gerade

P, $\overline{OP} = \vec{p}$

$G: \vec{x} = \vec{a} + t \cdot \vec{b}$

$$d = \frac{|\vec{b} \times (\vec{p} - \vec{a})|}{|\vec{b}|} = \frac{\text{Fläche des Parallelogramms}}{\text{Länge der Grundlinie}}$$



5.32 *Man berechne den Abstand vom Punkt $P = (5,-8,3)$*
(a) *zum Punkt $Q = (2,0,1)$,*
(b) *zur Geraden $G: \vec{x} = (2,0,1) + t(2,-5,-1)$.*

(a) $|\overrightarrow{PQ}| = |(2,0,1) - (5,-8,3)| = |(-3,8,-2)| = \sqrt{77} \approx \underline{\underline{8.77}}$.

(b) $\vec{p} - \vec{a} = (5,-8,3) - (2,0,1) = (3,-8,2)$,

$$\vec{b} \times (\vec{p} - \vec{a}) = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & 2 & 3 \\ \vec{j} & -5 & -8 \\ \vec{k} & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix},$$

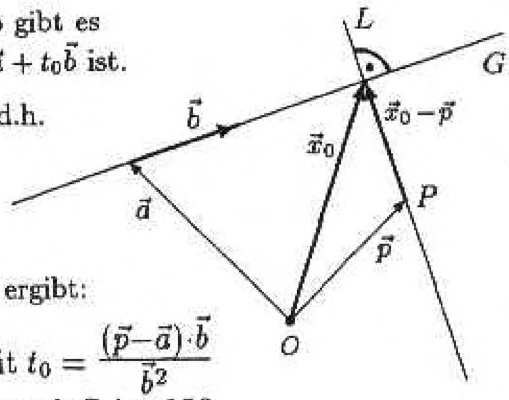
$$\Longrightarrow d = \frac{|(-18,-7,-1)|}{|(2,-5,-1)|} = \frac{\sqrt{374}}{\sqrt{30}} \approx \underline{\underline{3.53}}.$$

Fußpunkt des Lotes
Spiegelpunkt
Lotgerade
Abstand
} **von Punkt – Gerade**

$P\ ,\ \overrightarrow{OP}=\vec p$

$G:\ \vec x=\vec a+t\cdot\vec b$

Der Fußpunkt $\vec x_0$ des Lotes von P auf G ist durch zwei Angaben bestimmt:



(1) Der Endpunkt von $\vec x_0$ liegt auf G, also gibt es einen Parameterwert t_0, so daß $\vec x_0=\vec a+t_0\vec b$ ist.

(2) Das Lot $\vec x_0-\vec p$ steht senkrecht auf $\vec b$, d.h. $(\vec x_0-\vec p)\cdot\vec b=0$ oder $\vec x_0\cdot\vec b=\vec p\cdot\vec b$.

Multipliziert man $\vec x_0=\vec a+t_0\vec b$ mit $\vec b$ und setzt man $\vec x_0\cdot\vec b=\vec p\cdot\vec b$, so erhält man $\vec x_0\cdot\vec b=\vec p\cdot\vec b=\vec a\cdot\vec b+t_0\vec b^2$. Auflösen nach t_0 ergibt:

Fußpunkt: $\vec x_0=\vec a+t_0\cdot\vec b\quad$ mit $t_0=\dfrac{(\vec p-\vec a)\cdot\vec b}{\vec b^2}$

Spiegelpunkt: $\vec p\,'=2\vec x_0-\vec p$, siehe auch Seite 153.

Lot: $\vec x_0-\vec p$

Lotgerade: $L:\ \vec x=\vec p+s\cdot(\vec x_0-\vec p)$

Abstand P zu G: $d=|\vec x_0-\vec p|$

$$d=\frac{|\vec b\times(\vec p-\vec a)|}{|\vec b|}$$ (Abstand Punkt – Gerade, Seite 140)

5.33 *Man berechne den Fußpunkt des Lotes, das Lot, den Abstand sowie die Lotgerade für* $P=(2,5,-1)$ *und* $G:\ \vec x=(2,0,1)+t(2,-1,2)$.

$t_0=\dfrac{(0,5,-2)\cdot(2,-1,2)}{|(2,-1,2)|^2}=\dfrac{-9}{9}=-1$. Also erhält man:

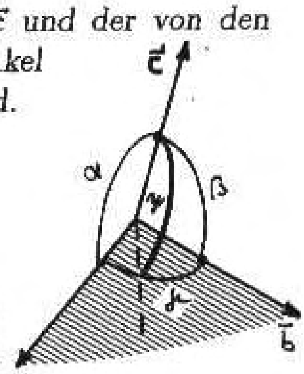
Fußpunkt: $\vec x_0=(2,0,1)-1(2,-1,2)=\underline{(0,1,-1)}$.

Lot: $\vec x_0-\vec p=(0,1,-1)-(2,5,-1)=\underline{(-2,-4,0)}$.

Abstand P zu G: $d=|\vec x_0-\vec p|=|(-2,-4,0)|=\underline{2\sqrt5}$.

Lotgerade: $L:\ \vec x=(2,5,-1)+s(-2,-4,0)$ oder natürlich
$L:\ \underline{\vec x=(2,5,-1)+s(1,2,0)}$.

5.34 *Man berechne den Winkel* ψ *zwischen dem Vektor* $\vec c$ *und der von den Vektoren* $\vec a$ *und* $\vec b$ *aufgespannten Ebene, wenn die Winkel* $\alpha:=\sphericalangle(\vec a,\vec c)$, $\beta:=\sphericalangle(\vec b,\vec c)$ *und* $\gamma:=\sphericalangle(\vec a,\vec b)$ *gegeben sind.*



$\vec a,\vec b,\vec c$ seien Einheitsvektoren. Also gilt:

$|\vec a|=|\vec b|=|\vec c|=1$, $\vec a^2=\vec b^2=\vec c^2=1$ und

$\vec a\vec c=\cos\alpha$, $\vec b\vec c=\cos\beta$, $\vec a\vec b=\cos\gamma$.

Stellt man $\vec c$ als Linearkombination von $\vec a,\vec b,\vec a\times\vec b$ dar, so ist:

$$\vec c=r\vec a+s\vec b+t(\vec a\times\vec b).$$

Multiplikation mit $\vec{a}$ bzw. $\vec{b}$ ergibt das LGS:

$$\begin{matrix} \cos\alpha = r + s\cos\gamma \\ \cos\beta = r\cos\gamma + s \end{matrix} \Longrightarrow r = \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin^2\gamma}\ ,\ s = \frac{\cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma}{\sin^2\gamma}.$$

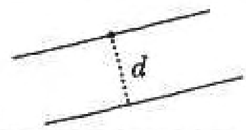
$r\vec{a} + s\vec{b}$ und $t(\vec{a} \times \vec{b})$ stehen senkrecht aufeinander und es ist $|\vec{c}| = 1$, also:

$\cos\psi = |r\vec{a} + s\vec{b}| = \sqrt{(r\vec{a} + s\vec{b})^2} = \sqrt{r^2 + 2rs\cos\gamma + s^2} = \ldots$ ergibt:

$$\cos\psi = \frac{1}{\sin\gamma}\sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}\,.$$

Abstand zweier paralleler Geraden

Man erhält ihn, indem man den Abstand d eines beliebigen Punktes der einen Geraden zur anderen Geraden bestimmt.



5.35 *Man bestimme den Abstand der Geraden $G_1 : \vec{x} = (0,1,-2) + r(1,1,-3)$ und $G_2 : \vec{x} = (0,1,2) + s(-1,-1,3)$.*

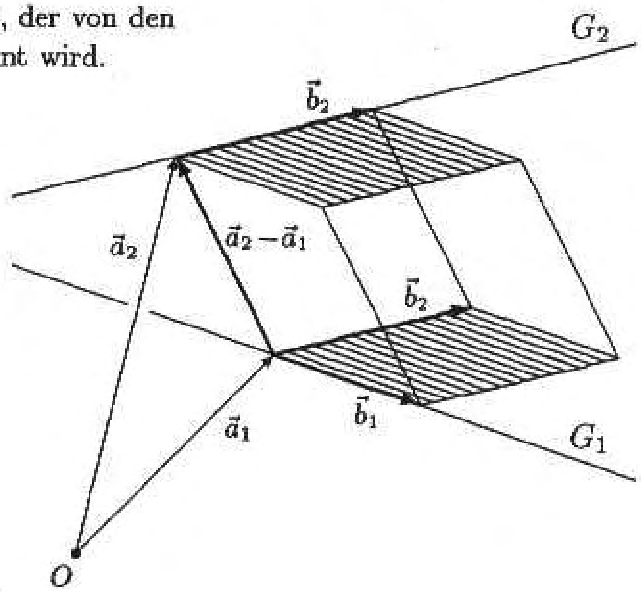
$$d = d(G_1, G_2) = \frac{|(1,1,-3)\times(0,0,4)|}{|(1,1,-3)|} = \frac{|(4,-4,0)|}{\sqrt{11}} = 4\sqrt{\frac{2}{11}} \approx \underline{\underline{1.706}}.$$

Abstand nicht paralleler Geraden

$$\begin{matrix} G_1 : & = \vec{a}_1 + t\cdot\vec{b}_1 \\ G_2 : & = \vec{a}_2 + t\cdot\vec{b}_2 \end{matrix}$$

Der Abstand ist die Höhe des Spats, der von den Vektoren $\vec{a}_2 - \vec{a}_1$, $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ aufgespannt wird.

$$\begin{aligned} \text{Abstand} &= d(G_1, G_2) \\ &= \frac{|<\vec{a}_2 - \vec{a}_1\,,\vec{b}_1\,,\vec{b}_2>|}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|} \\ &= \text{Höhe des Spats} \\ &= \frac{\text{Volumen des Spats}}{\text{Grundfläche des Spats}} \end{aligned}$$

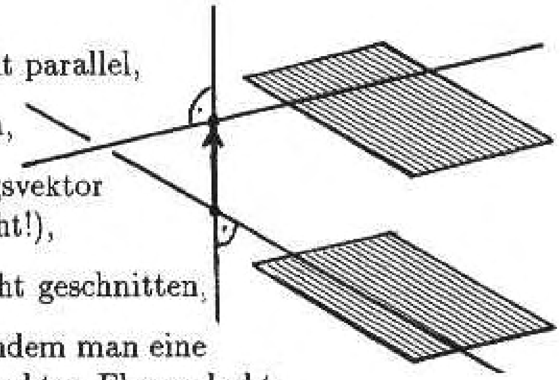


Schneiden sich G_1 und G_2, so liegen $\vec{a}_2 - \vec{a}_1$, $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ in einer Ebene, ihr Spatprodukt und somit der Abstand von G_1 und G_2 ist 0.

Schneiden sich die nicht parallelen Geraden nicht, so heißen sie **windschief**.

$$G_1, G_2 \quad \textbf{windschief} \quad \Longleftrightarrow \quad <\vec{a}_2 - \vec{a}_1\,, \vec{b}_1\,, \vec{b}_2> \neq 0.$$

Windschiefe Geraden



- haben keinen Schnittpunkt und sind nicht parallel,
- liegen in verschiedenen parallelen Ebenen,
- haben genau einen kürzesten Verbindungsvektor (dieser steht auf beiden Geraden senkrecht!),
- werden von genau einer Geraden senkrecht geschnitten,
- *entstehen* aus zwei parallelen Geraden, indem man eine in der zu einer Verbindungsstrecke senkrechten Ebene dreht.

5.36 *Gegeben sind die beiden Geraden* $\begin{array}{l} G_1: \ \vec{x} = (3,-2,3) + r(1,2,-1) \\ G_2: \ \vec{x} = (-1,2,-3) + s(1,0,3) \end{array}$

(a) *Man zeige: G_1 und G_2 sind windschief.*

(b) *Man berechne ihren Abstand $d(G_1, G_2)$.*

(c) *Man gebe die beiden parallelen Ebenen E_1 bzw. E_2 an, in denen G_1 bzw. G_2 liegen.*

(d) *Man berechne die Gerade L, die G_1 und G_2 senkrecht schneidet, sowie die beiden Punkte P_1 auf G_1 und P_2 auf G_2 mit kürzestem Abstand.*

(a) G_1, G_2 sind windschief, da $<\vec{a}_2 - \vec{a}_1 \,,\, \vec{b}_1 \,,\, \vec{b}_2> = \begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ -6 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -28 \neq 0.$

Oder: G_1 und G_2 sind nicht parallel, da $(1,2,-1)$ und $(1,0,3)$ linear unabhängig sind. Sie haben keinen Schnittpunkt, da das entstehende LGS ... keine Lösung hat.

(b) $$d = \frac{|<\vec{a}_2 - \vec{a}_1 \,,\, \vec{b}_1 \,,\, \vec{b}_2>|}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|} = \frac{\left|\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ -6 & -1 & 3 \end{vmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|-28|}{\left|\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}\right|} = \frac{28}{2\sqrt{14}} = \underline{\underline{\sqrt{14}}}.$$

(c) G_1 liegt in $E_1: \ \vec{x} = (3,-2,3) + r(1,2,-1) + s(1,0,3)$.
G_2 liegt in $E_2: \ \vec{x} = (-1,2,-3) + r(1,2,-1) + s(1,0,3)$. Es gilt $E_1 \| E_2$.

(d) L läßt sich leicht aus P_1 und P_2 berechnen, oder auch aus P_1 und $\vec{b}_1 \times \vec{b}_2$, da $\vec{b}_1 \times \vec{b}_2$ ja ein Richtungsvektor von L ist.

Man betrachtet den geschlossenen Streckenzug:

$\vec{a}_1 + r_0\vec{b}_1 + t_0(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2) - s_0\vec{b}_2 - \vec{a}_2 = \vec{0}.$

Aus dieser einen Vektorgleichung lassen sich
die drei Unbekannten r_0, s_0, t_0 berechnen:

Das LGS $r_0\vec{b}_1 - s_0\vec{b}_2 + t_0(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2) = -\vec{a}_1 + \vec{a}_2$ ist eindeutig lösbar:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_0 \\ s_0 \\ t_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{array}{l} r_0 = 1 \\ s_0 = 2 \\ t_0 = -\frac{1}{2} \end{array}$$

Man erhält also: $P_1 = \vec{a}_1 + r_0\vec{b}_1 = (3,-2,3) + 1(1,2,-1) = (4,0,2)$.
$P_2 = \vec{a}_2 + s_0\vec{b}_2 = (-1,2,-3) + 2(1,0,3) = (1,2,3)$.

Also: $L: \ \vec{x} = \vec{p}_1 + r(\vec{p}_2 - \vec{p}_1) = (4,0,2) + r(-3,2,1)$,
oder auch $L: \ \vec{x} = \vec{p}_1 + s(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2) = (4,0,2) + s(6,-4,-2)$.

5.37 *Es seien G_1 und G_2 windschiefe Geraden.*
Durch welche Punkte P des Raumes gibt es genau eine, keine bzw. unendlich viele Geraden, die sowohl G_1 als auch G_2 schneiden?

Es seien E_1 und E_2 die zwei verschiedenen parallelen Ebenen, in denen G_1 bzw. G_2 liegen, (siehe windschiefe Geraden Seite 143).

1. Fall: $P \notin E_1 \cup E_2$: Behauptung: Es gibt genau eine Gerade, die sowohl …

Es seien: F_1 : die Ebene, die P und G_1 enthält.
F_2 : die Ebene, die P und G_2 enthält.

Jede gesuchte Gerade liegt sowohl in F_1 als auch in F_2, also in $F_1 \cap F_2$.

Bleibt zu zeigen:

(a) F_1 und F_2 schneiden sich in einer Geraden G mit $P \in G$.

(b) Diese Schnittgerade G schneidet G_1 und G_2.

(a) $F_1 \neq F_2$, sonst lägen G_1 und G_2 in einer Ebene, wären also nicht windschief.

Verschiedene Ebenen F_1, F_2 mit gemeinsamem Punkt P schneiden sich in einer Geraden $G := F_1 \cap F_2$ (Schnittgerade) und es ist $P \in G$.

Als gesuchte Gerade kommt also nur G in Frage. Daß G tatsächlich G_1 und G_2 schneidet, sieht man so:

(b) Die Geraden G und G_1 liegen in der Ebene F_1 und sind nicht parallel – sonst lägen in F_2 die Gerade G_2 und die zu G_1 parallele Gerade G, es wäre also $F_2 = E_2$, im Widerspruch zu $P \in F_2$ und $P \notin E_2$.
Also schneiden sich G und G_1 in genau einem Punkt P_1.

Ebenso schneiden sich die Geraden G und G_2 in genau einem Punkt P_2.

Also ist G die (einzige) Gerade durch P, die die windschiefen Geraden G_1 und G_2 schneidet.

2. Fall: $P \in E_1 \cup E_2$ und $P \notin G_1 \cup G_2$:

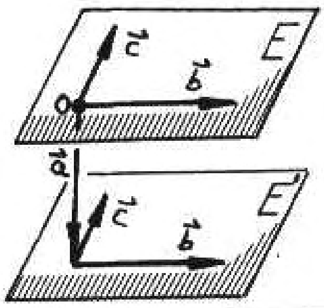
Jede Gerade durch P, die G_1 schneidet, liegt in E_1.
Es gibt also keine Gerade durch P, die G_1 und G_2 schneidet.

3. Fall: $P \in G_1 \cup G_2$:

Es gibt unendlich viele Geraden durch P, die G_1 und G_2 schneiden.

5.8 Ebenen im Raum

Sind $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear unabhängig und durchlaufen die Parameter r und s die reellen Zahlen, so liegen die Endpunkte der Vektoren $r \cdot \vec{b} + s \cdot \vec{c}$ auf der von $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Ebene.



$E: \; \vec{x} = r \cdot \vec{b} + s \cdot \vec{c}$ — ist eine Gleichung der von $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Ebene durch den Nullpunkt.

$E': \; \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{b} + s \cdot \vec{c}$ — ist eine Gleichung der zur obigen Ebene parallelen Ebene, die durch den Endpunkt von $\vec{a}$ verläuft.

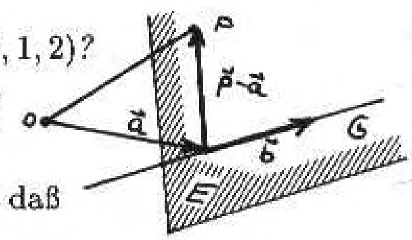
Parameterdarstellung der Ebene

durch den Endpunkt von $\vec{a}$, aufgespannt von den beiden linear unabhängigen Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$:

$$E: \; \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{b} + s \cdot \vec{c} \quad \text{mit } r, s \in \mathbb{R}.$$

5.38 (a) *Man gebe eine Parametredarstellung der Ebene, die den Punkt* $P = (3, -3, 4)$ *und die Gerade* $G: \; \vec{x} = (2, -1, 1) + r(0, 1, 2)$ *enthält.*

(b) *Liegt der Punkt* $(0, 1, 1)$ *auf der Ebene* $E: \; \vec{x} = (2, -1, 1) + r \cdot (1, 1, 1) + s \cdot (0, 1, 2)$?



(a) $E: \; \vec{x} = (2, -1, 1) + r(0, 1, 2) + s\big((3, -3, 4) - (2, -1, 1)\big)$
$\vec{x} = (2, -1, 1) + r(0, 1, 2) + s(1, -2, 3)$

(b) Wenn der Punkt auf der Ebene liegt, gibt es r und s, so daß
$(0, 1, 1) = (2, -1, 1) + r(1, 1, 1) + s(0, 1, 2)$ also
$(-2, 2, 0) = r(1, 1, 1) + s(0, 1, 2)$ ist. Koordinatenvergleich liefert das LGS:

$$\begin{aligned} r \quad &= -2 \\ r + s &= 2 \\ r + 2s &= 0 \end{aligned}$$

Dieses LGS ist offensichtlich unlösbar.
Der Punkt $(0, 1, 1)$ liegt nicht auf der Ebene E.

Drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, bestimmen eine Ebene:

Parameterdarstellung der Ebene

durch **drei Punkte** P_1, P_2, P_3, die nicht auf einer Geraden liegen:

$$E: \ \vec{x} = \vec{p}_1 + r \cdot (\vec{p}_2 - \vec{p}_1) + s \cdot (\vec{p}_3 - \vec{p}_1) \quad \text{mit } r, s \in \mathbb{R}.$$

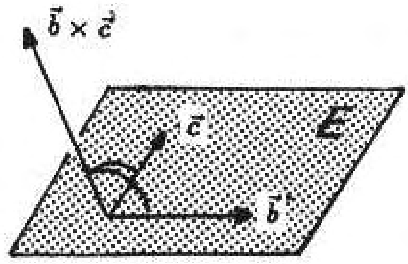
5.39 *Man bestimme eine Parameterdarstellung der Ebene durch die Punkte* $P_1 = (2,1,-3)$, $P_2 = (-1,3,-4)$, $P_3 = (1,2,3)$.

$P_2 - P_1 = (-1,3,-4) - (2,1,-3) = (-3,2,-1)$ ebenso: $P_3 - P_1 = (-1,1,6)$.

Also: $E: \ \vec{x} = (2,1-,3) + r(-3,2,-1) + s(-1,1,6)$.

Durch Vertauschen von P_1, P_2, P_3 erhält man andere Darstellungen, die jedoch die gleiche Ebene beschreiben.

Ein Vektor heißt senkrecht (*orthogonal, normal*) zu einer Ebene, wenn er senkrecht auf allen Vektoren steht, die in der Ebene liegen, wenn er also insbesondere senkrecht auf den Richtungsvektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$ der Ebene steht.



Ein zu einer Ebene senkrechter Vektor heißt **Normalenvektor** der Ebene.

Aus einer Parameterdarstellung der Ebene erhält man sofort einen Normalenvektor, nämlich $\vec{b} \times \vec{c}$. Jeder andere Normalenvektor ist ein Vielfaches davon, hat also die Form $t(\vec{b} \times \vec{c})$, $t \neq 0$.

5.40 *Man bestimme die beiden Normaleneinheitsvektoren der Ebene* $E: \ \vec{x} = (3,2,1) + r(1,1,1) + s(2,0,1)$.

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{ist Normalenvektor der Länge } \sqrt{6}.$$

Also sind $\vec{n}_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$ die gesuchten Normaleneinheitsvektoren.

5.41 *Ist* $\vec{a} = (1,2,1)$ *normal zu* $E: \ \vec{x} = (1,3,1) + r(1,2,-1) + s(1,1,1)$?

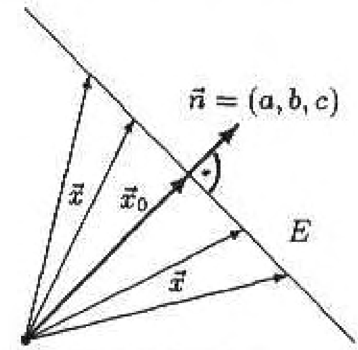
Nein, denn $\vec{a}$ ist kein Vielfaches von $\vec{n} = (1,2,-1) \times (1,1,1) = (3,-2,-1)$.
Einfacher geht es so: $\vec{a}$ müßte senkrecht zu den Richtungsvektoren sein.
Das ist wegen $\vec{a} \cdot (1,2,-1) = 4 \neq 0$ nicht der Fall!

Die Lösungsmenge der Gleichung $ax + by + cz = d$ ist eine zweiparametrige Lösungsschar, also eine Ebene (falls nicht $a = b = c = 0$ ist, siehe auch BEI 12.10).

Mit dem Skalarprodukt kann man es so sagen:

Die Gleichung $ax + by + cz = d$ lösen heißt:

- Alle Vektoren $\vec{x} = (x, y, z)$ zu bestimmen, deren *Skalarprodukt* mit dem festen Vektor (a, b, c) gleich der Zahl d ist.
- Alle Vektoren zu berechnen, die – auf die Richtung von (a, b, c) projiziert – den gleichen Vektor $\vec{x}_0$ ergeben.



Koordinatendarstellung der Ebene

$$E: \quad \begin{aligned} ax + by + cz &= d \\ \vec{n}\cdot\vec{x} &= d \end{aligned} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} &\vec{n} = (a,b,c) \neq (0,0,0) \\ &\vec{n} = (a,b,c) \text{ ist } \textbf{Normalenvektor} \text{ von } E. \end{aligned}$$

Zwei Ebenen E_1, E_2 sind genau dann **parallel**, wenn ihre Normalenvektoren $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ linear abhängig sind.

$$E_1 \parallel E_2 \iff \exists \lambda \neq 0 \text{ mit } \vec{n}_1 = \lambda \vec{n}_2.$$

5.42 *Liegt der Punkt* $(5, -3, 4)$ *auf der Ebene* $E: \ 3x + 6y + z = 3$?

Nein, denn $3 \cdot 5 + 6 \cdot (-3) + 4 = 1 \neq 3$.

5.43 (a) *Man bestimme eine Gleichung der Ebene E durch den Punkt* $(3, 2, 1)$, *die senkrecht ist zu* $(2, -3, 4)$.

(b) *Man bestimme eine Gleichung der Ebene E durch die Punkte* $(1, 5, 1)$ *und* $(4, 3, -1)$, *die parallel zur y–Achse verläuft.*

(a) $\vec{n} = (2, -3, 4)$ ist ein Normalenvektor der gesuchten Ebene E. Damit kennt man die *linke Seite* der Ebenengleichung $E: \ 2x - 3y + 4z$.

Die *rechte Seite* bestimmt man so, daß $\vec{x}_0 = (3, 2, 1)$ die Gleichung erfüllt, d.h.

aus $d = \vec{n} \cdot \vec{x}_0 = 2 \cdot 3 - 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 4$ erhält man: $E: \ \begin{aligned} \vec{n}\cdot\vec{x} &= \vec{n}\cdot\vec{x}_0 \\ 2x - 3y + 4z &= 4. \end{aligned}$

(b) Eine zur y–Achse parallele Ebene hat die Koordinatendarstellung $ax + cz = d$.

Einsetzen der Punkte ergibt:

$1a + 1c = d$, $4a - 1c = d$. Es folgt $a = \frac{2}{5}d$, $c = \frac{3}{5}d$.

Eine Ebenendarstellung ist $\underline{E: \ 2x + 3y = 5}$.

Da man grundsätzlich zwei Möglichkeiten hat, eine Ebene darzustellen, interessiert es, diese beiden Darstellungen ineinander zu überführen:

Umformung
von Ebenendarstellungen

Parameterdarstellung in Koordinatendarstellung

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Parameterdarstellung}\\ \vec{x}=\vec{a}+r\cdot\vec{b}+s\cdot\vec{c}\end{array}} \xrightarrow[\substack{\text{Multiplikation mit}\\ \vec{n}=\vec{b}\times\vec{c}=(a,b,c)}]{} \boxed{\begin{array}{c}\text{Koordinatendarstellung}\\ \vec{n}\cdot\vec{x}=\vec{n}\cdot\vec{a}=\\ ax+by+cz=d\end{array}}$$

Man multipliziert die Parameterdarstellung mit einem Vektor $\vec{n}$, der auf den Richtungsvektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$ senkrecht steht (**Normalenvektor**), z.B. mit $\vec{n}=\vec{b}\times\vec{c}$.

Koordinatendarstellung in Parameterdarstellung

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Koordinatendarstellung}\\ ax+by+cz=d\end{array}} \xrightarrow[\substack{\text{Lösen des LGS}\\ \text{1 Gleichung, 3 Unbekannte}}]{} \boxed{\begin{array}{c}\text{Parameterdarstellung}\\ \vec{x}=\vec{a}+r\cdot\vec{b}+s\cdot\vec{c}\end{array}}$$

Man löst das LGS $ax+by+cz=d$.
Z.B., indem man, falls $a\neq 0$ ist, $y=r$ und $z=s$ setzt und nach x auflöst.

Das Ergebnis schreibt man vektoriell: $\vec{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d/a\\0\\0\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-b/a\\1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-c/a\\0\\1\end{pmatrix}$

und erhält die Ebene in Parameterform (siehe z.B. BEI 5.45).

5.44 *Man bestimme eine Koordinatendarstellung der Ebene* $E:\vec{x}=(2,5,-1)+r(4,0,-3)+s(-1,1,1)$.

$$\vec{n}=\vec{b}\times\vec{c}=\begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-1\\4\end{pmatrix} \quad \text{ist ein Normalenvektor von } E.$$

Multiplikation der Parameterdarstellung mit $\vec{n}=(3,-1,4)$ ergibt:

$$\vec{n}\cdot\vec{x} = \vec{n}\cdot(2,5,-1)+r\underbrace{\vec{n}\cdot(4,0,-3)}_{=0}+s\underbrace{\vec{n}\cdot(-1,1,1)}_{=0}$$

$$\vec{n}\cdot\vec{x} = \vec{n}\cdot(2,5,-1)$$

$E:\ 3x-y+4z=-3$ (Koordinatenform).

5.45 *Man bestimme eine Parameterdarstellung von* $E: 2x-3z=4$.

Das LGS hat eine zweiparametrige Lösung:
Setzt man $y=r$ und $z=s$, so erhält man: $x=\frac{1}{2}(4+3s)=2+1.5s$. Also

$$\begin{array}{l}x=2+0r+1.5s\\ y=0+1r+\ \ 0s\\ z=0+0r+\ \ 1s\end{array},\ \text{vektoriell geschrieben: } E:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1.5\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Ist in der Koordinatendarstellung der Ebenengleichung $E : \vec{n} \cdot \vec{x} = d$ der Normalenvektor $\vec{n}$ ein **Einheitsvektor** und ist $d \geq 0$, so spricht man von der **HESSEschen Normalform** (HNF) der Ebenengleichung. (Die Bedingung $d \geq 0$ wird vielfach nicht gestellt, dann gibt es natürlich zwei HESSEsche Normalformen.)

5.46 *Man bestimme die HESSEsche Normalform der Ebene $E : x - y + 2z = -5$.*

$\vec{n} = (1, -1, 2)$ ist ein Normalenvektor von E der Länge $\sqrt{6}$. Also sind $\pm\frac{1}{\sqrt{6}}\vec{n}$ die Normaleneinheitsvektoren von E. Division der Ebenengleichung durch $-\sqrt{6}$ liefert die HESSEsche Normalform:

$$E: \; -\frac{1}{\sqrt{6}}x + \frac{1}{\sqrt{6}}y - \frac{2}{\sqrt{6}}z = \frac{5}{\sqrt{6}} \quad \text{(HNF)}.$$

HESSEsche Normalform

Ist $E : \vec{n}\vec{x} = d$ Ebenengleichung in HNF, also ($|\vec{n}| = 1,\ d \geq 0$), so gilt:

1) d ist der **Abstand** der Ebene zum Nullpunkt.
2) $\vec{n}$ ist **Normalenvektor** von E und zeigt vom Ursprung zu E hin.

Umformung

Koordinatendarstellung in HESSEsche Normalform:

Man dividiert die Koordinatenform $ax + by + cz = d$ durch den Betrag $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ des Normalenvektors $\vec{n} = (a, b, c)$ und macht ggf. die rechte Seite durch Multiplikation der Gleichung mit -1 positiv.

Parameterdarstellung in HESSEsche Normalform:

1. Parameterdarstellung in Koordinatendarstellung umformen.
2. Koordinatendarstellung in HESSEsche Normalform umformen.

5.47 *Es sei $E : \vec{x} = (2, 5, -1) + r(4, 0, -3) + s(-1, 1, 1)$.*
Man bestimme die HESSEsche Normalform von E sowie den Abstand von E zum Nullpunkt.

$E : 3x - y + 4z = -3$ ist eine Koordinatenform von E.
Hierbei ist $\vec{n} = (3, -1, 4)$ und $|\vec{n}| = |(3, -1, 4)| = \sqrt{26}$.

$E : -\frac{3}{\sqrt{26}}x + \frac{1}{\sqrt{26}}y - \frac{4}{\sqrt{26}}z = \frac{3}{\sqrt{26}}$ ist die HESSEform von E.

Der Abstand der Ebene zum Nullpunkt beträgt $d = \frac{3}{\sqrt{26}}$.

Abstand Punkt – Ebene

Ist $E: \vec{n}\vec{x} = d$ (HNF: $|\vec{n}| = 1, d \geq 0$) und P Endpunkt des Vektors $\vec{p}$, so ist

$$A = |\vec{n}\cdot\vec{p} - d| \quad \text{der } \textbf{Abstand} \text{ von } P \text{ zu } E.$$

$$\text{Ist } \begin{Bmatrix} \vec{n}\cdot\vec{p} > d \\ \vec{n}\cdot\vec{p} = d \\ \vec{n}\cdot\vec{p} < d \end{Bmatrix}, \text{ liegt } P \begin{cases} \text{auf der anderen Seite von } E \text{ wie der Nullpunkt,} \\ \text{auf der Ebene } E, \\ \text{auf der gleichen Seite von } E \text{ wie der Nullpunkt.} \end{cases}$$

5.48 *Man berechne den Abstand A von $P = (2,-2,3)$ zu $E: 2x - y + 2z = 6$.*

$|(2,-1,2)| = \sqrt{9} = 3 \Longrightarrow \vec{n} = (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \Longrightarrow E: \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z = 2$ (HNF).

$\vec{n}\cdot\vec{p} = (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3})\cdot(2,-2,3) = 4 \Longrightarrow A = |\vec{n}\cdot\vec{p} - d| = |4-2| = \underline{\underline{2}}$.

5.49 *Man berechne den Abstand vom Punkt $P = (0,2,2)$ zur Ebene $E: \ \vec{x} = (1,2,-3) + r(2,0,-1) + s(-3,2,0)$. Auf welcher Seite der Ebene liegt P?*

Umformung der Parameterdarstellung in die HNF:

$\vec{n} = (2,0,-1)\times(-3,2,0) = (2,3,4) \Rightarrow E: (2,3,4)(x,y,z) = (2,3,4)(1,2,-3) = -4$

also $E: 2x + 3y + 4z = -4$ und $E: -\frac{2}{\sqrt{29}} - \frac{3}{\sqrt{29}} - \frac{4}{\sqrt{29}} = \frac{4}{\sqrt{29}}$ (HNF).

$\vec{n}\cdot\vec{p} = -\frac{1}{\sqrt{29}}(2,3,4)\cdot(0,2,2) = -\frac{14}{\sqrt{29}} < \frac{4}{\sqrt{29}} = d$.

Also ist $A = |\vec{n}\cdot\vec{p} - d| = \frac{1}{\sqrt{29}}|-14-4| = \underline{\underline{\frac{18}{\sqrt{29}}}}$ der Abstand von P zu E, und wegen $\vec{n}\cdot\vec{p} < d$ liegt P auf der gleichen Seite von E wie der Nullpunkt.

Schnittpunkt Gerade – Ebene $\quad G: \ \vec{x} = \vec{a} + t\vec{b}$, $\quad E: \ \vec{n}\cdot\vec{x} = d$

Sind G und E nicht parallel, d.h. gilt $\vec{n}\cdot\vec{b} \neq 0$,
dann gilt für den **Durchstoßpunkt** $\vec{x}_0$: $\quad \vec{x}_0 = \vec{a} + t_0\vec{b}$ und $\vec{n}\cdot\vec{x}_0 = d$.
Multiplizieren der ersten Gleichung mit $\vec{n}$ und Auflösen nach t_0 ergibt:

Durchstoßpunkt: $\quad \vec{x}_0 = \vec{a} + t_0\vec{b} \quad$ mit $t_0 = \frac{d - \vec{n}\cdot\vec{a}}{\vec{n}\cdot\vec{b}}$, $\quad$ falls $\vec{n}\cdot\vec{b} \neq 0$, also $G \nparallel E$.

5.50 *Man berechne ggf. den Schnittpunkt von $G: \vec{x} = (-1,4,-2) + t(1,-1,-2)$ und $E: \vec{x} = (2,5,-1) + r(4,0,-3) + s(-1,1,1)$.*

Natürlich kann man das LGS

$$\begin{pmatrix}-1\\4\\-2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\5\\-1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} \quad \text{also} \quad \begin{array}{ccc|c} r & s & t & \\ \hline -4 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \end{array} \quad \text{lösen.}$$

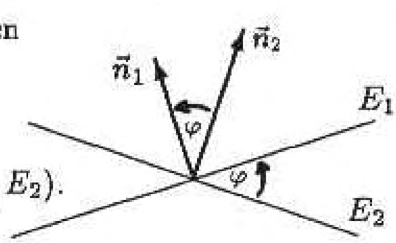
Einfacher ist es, E in Koordinatenform umzuwandeln und den Schnittpunkt wie oben beschrieben zu berechnen:

$E\,:\,3x-y+4z=-3$ siehe BEI 5.47, also $t_0=\frac{-3-(3,-1,4)(-1,4,-2)}{(3,-1,4)(1,-1,-2)}=-3$.

Durchstoßpunkt: $\vec{x}_0=\vec{a}+t_0\vec{b}=(-1,4,-2)-3(1,-1,-2)=\underline{\underline{(-4,7,4)}}$.

Schnittwinkel zweier sich schneidender Ebenen $\quad E_1:\ \vec{n}_1\cdot\vec{x}=d_1$, $\quad E_2:\ \vec{n}_2\cdot\vec{x}=d_2$

Der Winkel φ zwischen zwei sich schneidenden Ebenen ist der Winkel zwischen ihren Normalenvektoren[1]:



$$\cos\varphi=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}\quad\text{mit}\quad \varphi=\sphericalangle(\vec{n}_1\,,\,\pm\vec{n}_2)^1=\sphericalangle(E_1,E_2).$$

[1] Man wählt die Normalenvektoren so, daß $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$ ist.

5.51 *Unter welchem Winkel schneiden sich folgende Ebenen?*
$E_1:\vec{x}=(1,2,3)+r(0,-1,2)+s(1,2,0)$, $\qquad E_2: x+y+2z=3$.

Normalenvektoren der Ebenen sind $\vec{n}_1=(0,-1,2)\times(1,2,0)=(-4,2,1)$,
$\vec{n}_2=(1,1,2)$.

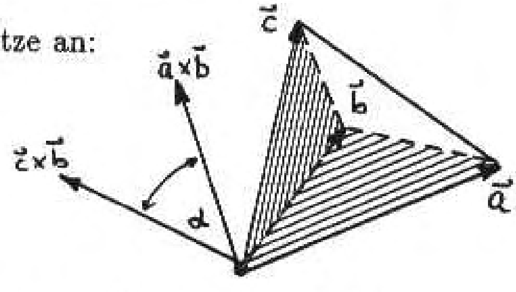
Für den Winkel φ ergibt sich $\cos\varphi=\frac{(-4,2,1)(1,1,2)}{\sqrt{21}\sqrt{6}}=0 \implies \underline{\underline{\varphi=90^0}}$.

5.52 *Unter welchem Winkel α schneiden sich zwei Höhen eines regelmäßigen Tetraeders?*

Da der gesuchte Winkel unabhängig von der Kantenlänge ist, betrachtet man ein regelmäßiges Tetraeder der Kantenlänge 1.

Es bieten sich drei unterschiedliche Lösungsansätze an:

(a) Die Höhen sind Normalen der Seitenflächen, also berechnet man den Winkel zwischen zwei Seiten–Normalen:



$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{b})=|\vec{a}\times\vec{b}|\cdot|\vec{c}\times\vec{b}|\cdot\cos\alpha$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{b})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\,\vec{b}^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})\,(\vec{b}\cdot\vec{c})\quad\text{(Lagrange–Identität, BEI 5.23)}$$

$$=\tfrac{1}{2}\cdot 1-\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}=\underline{\tfrac{1}{4}}.$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}|\cdot|\vec{c}\times\vec{b}|\cdot\cos\alpha=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\tfrac{\pi}{3}\cdot|\vec{c}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\tfrac{\pi}{3}\cdot\cos\alpha$$

$$=(\tfrac{1}{2}\sqrt{3})^2\cos\alpha=\underline{\tfrac{3}{4}\cos\alpha}$$

Also gilt: $\quad \frac{1}{4}=\frac{3}{4}\cos\alpha \implies \cos\alpha=\frac{1}{3} \implies \underline{\underline{\alpha\approx 70.53^0}}$.

(b) Die Höhen schneiden sich im Schwerpunkt des Tetraeders (warum?).
Sind $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, $\vec{a}_4$ vom Schwerpunkt ausgehende *Einheitsvektoren* in Richtung der Tetraederecken, so gilt folglich:

$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4 = \vec{0}$. Multiplikation mit $\vec{a}_1$ liefert:

$\vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4) = \vec{a}_1^2 + \vec{a}_1\vec{a}_2 + \vec{a}_1\vec{a}_3 + \vec{a}_1\vec{a}_4 = 0.$

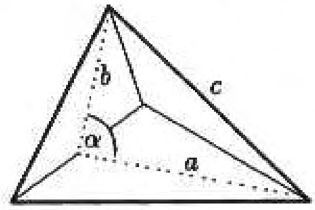
Nun ist $\vec{a}_1^2 = |\vec{a}_1|^2 = 1$ und aus Symmetriegründen gilt:

$\vec{a}_1\vec{a}_2 = \vec{a}_1\vec{a}_3 = \vec{a}_1\vec{a}_4 = |\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2| \cdot \cos \sphericalangle(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = \cos \sphericalangle(\vec{a}_1, \vec{a}_2),$

also folgt: $1{+}3\cos \sphericalangle(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = 0 \Longrightarrow \cos \sphericalangle(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = -\frac{1}{3} \Longrightarrow \underline{\sphericalangle(\vec{a}_1, \vec{a}_2) \approx 109.47^0}.$

Offensichtlich ist $\alpha = 180^0 - \sphericalangle(\vec{a}_1, \vec{a}_2) \Longrightarrow \underline{\underline{\alpha \approx 70.53^0}}.$

(c) elementargeometrische Lösung:



Der Winkel α zwischen zwei Höhen
ist der Winkel zwischen zwei Seitenflächen.

α berechnet man mit dem Cosinussatz: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$

$1 = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} - 2\frac{1}{2}\sqrt{3}\,\frac{1}{2}\sqrt{3}\cos\alpha \Longrightarrow \cos\alpha = \frac{1}{3} \Longrightarrow \underline{\underline{\alpha \approx 70.53^0}}.$

Fußpunkt des Lotes
Lotgerade **von Punkt – Ebene**
Abstand

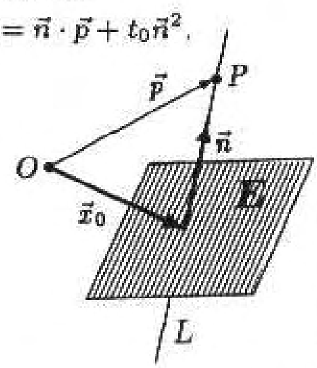
P , $\overline{OP} = \vec{p}$
$E: \ \vec{n} \cdot \vec{x} = d$

Der Fußpunkt des Lotes $\vec{x}_0$ von P auf E ist durch zwei Angaben bestimmt:

(1) Der Endpunkt von $\vec{x}_0$ liegt in der Ebene E, also ist $\vec{n} \cdot \vec{x}_0 = d$.

(2) Der Endpunkt von $\vec{x}_0$ liegt auf der Lotgeraden $L: \vec{x} = \vec{p} + t\vec{n}$, also gibt es einen Parameterwert t_0, so daß $\vec{x}_0 = \vec{p} + t_0\vec{n}$ ist.

Multipliziert man $\vec{x}_0 = \vec{p} + t_0\vec{n}$ mit $\vec{n}$, erhält man $\vec{n} \cdot \vec{x}_0 = d = \vec{n} \cdot \vec{p} + t_0\vec{n}^2$.
Auflösen nach t_0 ergibt:



Fußpunkt: $\vec{x}_0 = \vec{p} + t_0 \cdot \vec{n}$ mit $t_0 = \frac{d - \vec{n}\cdot\vec{p}}{\vec{n}^2}$

Lot: $\vec{x}_0 - \vec{p}$

Lotgerade: $L: \ \vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{n}$

Abstand P zu E: $d = |\vec{x}_0 - \vec{p}|$

siehe auch: Abstand Punkt–Ebene, HNF Seite 150.

5.53 *Man berechne den Fußpunkt des Lotes, die Lotgerade und den Abstand von* $P = (9, -2, 5)$ *bzgl.* $E: \vec{x} = (1, 0, -1) + r(1, 1, -1) + s(-2, 1, 3)$.

Ein Normalenvektor von E ist $\vec{n} = (1, 1, -1) \times (-2, 1, 3) = (4, -1, 3)$. Also:

Koordinatenform: $E: 4x - y + 3z = 1.$

Lotgerade: $L: \vec{x} = (9,-2,5) + t(4,-1,3).$

Fußpunkt $\vec{x}_0$ des Lotes: $t_0 = \frac{1-(9,-2,5)(4,-1,3)}{(4,-1,3)^2} = -\frac{52}{26} = -2$

$\Longrightarrow \vec{x}_0 = (9,-2,5) - 2(4,-1,3) = \underline{\underline{(1,0,-1)}}.$

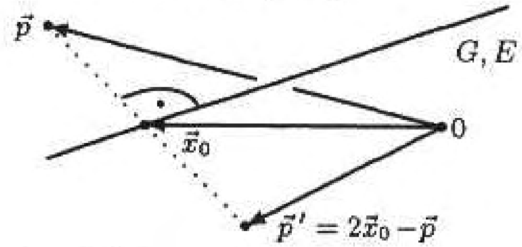
Lot: $\vec{x}_0 - \vec{p} = (1,0,-1) - (9,-2,5) = \underline{\underline{(-8,2,-6)}}.$

Abstand P zu E: $d = |(-8,2,-6)| = \underline{\underline{2\sqrt{26}}}.$

Spiegelung: Punkt P an **Gerade** $G: \vec{x} = \vec{a} + t\vec{b}$ / **Ebene** $E: \vec{n}\cdot\vec{x} = d$

Für den Spiegelpunkt P' gilt:

$$\boxed{\vec{p}\,' = 2\vec{x}_0 - \vec{p}}$$



Dabei ist $\vec{x}_0$ der Fußpunkt des Lotes von P auf G bzw. E:

G Gerade (Seite 141): $\vec{x}_0 = \vec{a} + t_0\vec{b}$ mit $t_0 = \frac{(\vec{p}-\vec{a})\cdot\vec{b}}{\vec{b}^2}.$

E Ebene (Seite 152): $\vec{x}_0 = \vec{p} + t_0\vec{n}$ mit $t_0 = \frac{d-\vec{n}\cdot\vec{p}}{\vec{n}^2}.$

5.54 *Man spiegele* (a) $P = \begin{pmatrix}0\\2\\-6\end{pmatrix}$ an $G: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}.$

(b) $P = \begin{pmatrix}10\\-1\\3\end{pmatrix}$ an $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}.$

(a) Fußpunkt des Lotes von P auf G ist $\vec{x}_0 = (3,2,-5).$
$\Longrightarrow \vec{p}\,' = 2\vec{x}_0 - \vec{p} = 2(3,2,-5) - (0,2,-6) = \underline{(6,2,-4)}.$

(b) $\vec{n}_E = \begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\-2\\1\end{pmatrix} \Longrightarrow E: 7x - 2y + 1 = 21,\ t_0 = \frac{21-75}{54} = -1.$

$\vec{x}_0 = \vec{p} + t_0\vec{n} = \begin{pmatrix}10\\-1\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}7\\-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} \Longrightarrow \vec{p}\,' = 2\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}10\\-1\\3\end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix}-4\\3\\1\end{pmatrix}}.$

Spiegelung der Geraden G an der Ebene E

Man spiegelt G an E, indem man zwei Punkte von G an E spiegelt und die Gerade G' durch diese beiden Spiegelpunkte bestimmt.

5.55 *Man spiegele die Gerade* $G: \vec{x} = (-1,4,-2) + t(1,-1,-2)$ *an der Ebene* $E: \vec{x} = (2,5,-1) + r(4,0,-3) + s(-1,1,1)$.

G und E schneiden sich im Durchstoßpunkt $\vec{d} = (-4,7,4)$, siehe BEI 5.50.
Dieser Punkt ist ein Fixpunkt, d.h. er geht beim Spiegeln in sich über.
Nun braucht man nur noch einen anderen Punkt von G an E zu spiegeln:

Spiegelung von $P = (-1,4,-2)$ an $E:\ 3x - y + 4z = -3$:

$$t_0 = \cdots = \tfrac{-3+15}{26} = \tfrac{6}{13} \implies \vec{x}_0 = (-1,4,-2) + \tfrac{6}{13}(3,-1,4) = \tfrac{1}{13}(5,46,-2)$$
$$\implies \vec{p}\,' = \tfrac{2}{13}(5,46,-2) - (-1,4,-2) = \underline{\tfrac{1}{13}(23,40,22)}.$$

Gespiegelte Gerade:
$$G':\quad \vec{x} = \vec{d} + t(\vec{p}\,' - \vec{d}) = (-4,7,4) + \tfrac{1}{13}t(23+52,\,40-91,\,22-52) = \underline{\underline{(-4,7,4) + \tilde{t}(75,-51,-30)}}.$$

Abstand zweier paralleler Ebenen

ist der Abstand eines beliebigen Punktes der einen Ebene zur anderen Ebene.

Praktisches Vorgehen (Ebenen mit gleichem $\vec{n}$ darstellen!):

$$\begin{matrix} E_1:\ \vec{n}\cdot x = d_1 \\ E_2:\ \vec{n}\cdot x = d_2 \end{matrix} \implies d = d(E_1, E_2) = \frac{|d_1 - d_2|}{|\vec{n}|} = \begin{matrix}\text{Abstand der} \\ \text{Ebenen } E_1,\ E_2.\end{matrix}$$

Schnittmenge zweier Ebenen

Die Schnittmenge zweier Ebenen erhält man, indem man ein LGS löst.
Sind die Ebenen nicht parallel, so ist die Schnittmenge eine Gerade.

Am einfachsten ist es, wenn beide Ebenen in Koordinatendarstellung gegeben sind. Ist eine oder sind beide in Parameterdarstellung gegeben, so formt man diese zweckmäßigerweise in Koordinatendarstellung um!

5.56 *Man bestimme die Schnittmenge der Ebenen* E_1 *und* E_2:

(a) $E_1: \vec{x} = (0,1,1) + r(2,0,3) + s(1,2,1)$
$E_2: -6x + y + 4z = 5$,

(b) $E_1: \vec{x} = (1,-1,2) + r(2,3,0) + s(1,-2,1)$
$E_2: \vec{x} = (2,1,0) + u(1,2,0) + v(0,2,1)$.

(a) (1) Einsetzen von $E_1:\ \vec{x} = (2r+s, 1+2s, 1+3r+s)$ in E_2 ergibt:
$-6(2r+s) + (1+2s) + 4(1+3r+s) = 5 \implies 5 = 5$, Diese Gleichung ist für alle r, s richtig, die Ebenen sind gleich: $E_1 = E_2 = E_1 \cap E_2$.

(2) E_1 in Koordinatendarstellung umwandeln ergibt:
$\vec{n} = (2,0,3) \times (1,2,1) = (-6,1,4) \implies E_1: -6x + y + 4z = 5$.
Man sieht, die Ebenen sind gleich: $E_1 = E_2 = E_1 \cap E_2$.

(b) (1) Gleichsetzen führt auf ein LGS: