BERUFSAKADEMIE STUTTGART
University of Cooperative Education

Studienfach: Mathematik

Klausur

Datum: 18.03.08

Ausbildungsbereich:	Technik	**Studienjahrgang:**	2007
Fachrichtung:	Maschinenbau	**Studienhalbjahr:**	1
Gruppe:	....	**Bearbeitungszeit:**	90 min.
Dozent:	Bauer, Baum, Schäffler		
Hilfsmittel:	alle, außer elektron. Rechner		
Bewertung:	Punkte:	Note:	Signum: ....
Student:	....		

Aufgabe 1 (50 min.)

a) Bestimmen Sie sämtliche Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 4 \\ & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ & & & & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 3x_4 & = & 9 \end{array}$$

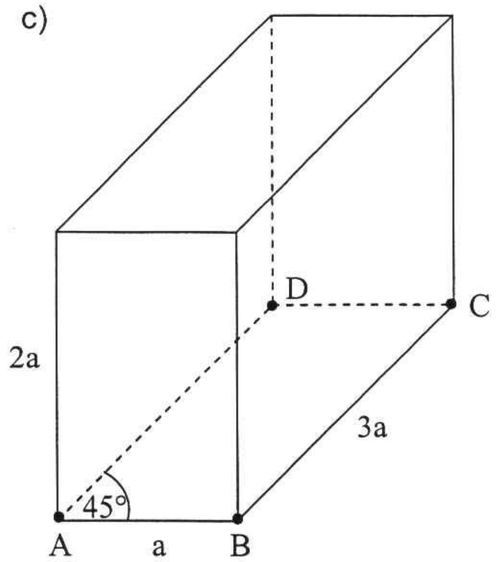
b) b_1) Bestimmen Sie das Matrizenprodukt

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

b_2) Was ergibt sich bei der Multiplikation der beiden folgenden n,n Matrizen

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n-2} & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-2,1} & a_{n-2,2} & a_{n-2,3} & \cdots & a_{n-2,n-2} & a_{n-2,n-1} & a_{n-2,n} \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ?$$

c)



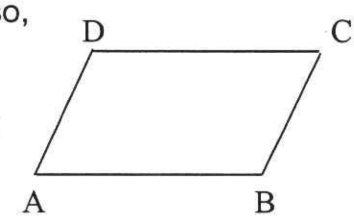
Gegeben ist ein Spat, der senkrecht auf der Grundebene mit den Punkten A, B, C, D steht. Die Kanten AB und AD schließen einen Winkel von 45° ein.

c1) Wie weit sind die Punkte A und C entfernt?

c2) Bestimmen Sie das Volumen des Spats.

d) Gegeben sind die Punkte A(1 / -1 / 1), B(0 / 1 / 2) und C(-1 / 0 / p).

d1) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes D so, dass A,B,C und D ein Parallelogramm bilden.



d2) Für welche Werte von p hat das Parallelogramm mit den Punkten A, B, C und D den Flächeninhalt $\sqrt{11}$?

Im folgenden ist p = 2 .

d3) Die Ebene E_1 geht durch die Punkte A, B, C und D. Die Gerade g ist das Lot im Punkt D auf der Ebene E_1. In welchem Punkt S durchstößt g die x-z-Ebene?

d4) Die Ebene E_2 ist parallel zu E_1 und geht durch den Nullpunkt. Geben Sie die Gleichung der Ebene E_2 an und bestimmen Sie den Abstand der beiden Ebenen E_1 und E_2.

e) Für welche Werte für λ ist das lineare Gleichungssystem

$$\underline{A} \cdot \underline{x} = \lambda \underline{B} \cdot \underline{x}$$

mit

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

nichttrivial lösbar ? (Lösungen nicht verlangt!)

Aufgabe 2 (40 min.)

a) Berechnen Sie Realteil und Imaginärteil der komplexen Zahl

$$z = \sqrt{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{1+j}\right) \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}} \quad .$$

b) Zeigen Sie, dass die Lösungen der Gleichung

$$z + \frac{1}{z} = 1$$

in der komplexen Ebene auf dem Einheitskreis liegen.

c) Zwei harmonischen Schwingungen

$$f_1(t) = 2\cos(\omega t) \qquad \text{und}$$

$$f_2(t) = A\sin(\omega t) \quad , \quad A > 0$$

sollen so überlagert werden, dass die Summe eine harmonische Schwingung mit Amplitude 4 ergibt:

$$f_1(t) + f_2(t) = 4\sin(\omega t + \varphi)$$

Bestimmen Sie A und φ mit Hilfe komplexer Zeigeraddition zeichnerisch und rechnerisch.

d) Berechnen Sie die Werte von A und φ in der Gleichung

$$Ae^{j\frac{\pi}{6}} = \left(\sqrt{3} - j\right)e^{j\varphi} .$$

e) Für welche Punkte in der Gauß'schen Zahlenebene gilt

$$-j\,|z^*| \cdot z = |z| \cdot \mathrm{Im}(z) \; ?$$

f) Zeigen Sie, dass alle Punkte der Ortskurve

$$z(t) = \cos t + 2j\sin t \quad , \quad 0 \le t \le \pi$$

auf einer Ellipse in der Gauß'schen Zahlenebene liegen und skizzieren Sie die Kurve in einem geeigneten Koordinatensystem.

Aufgabe 1b

(a) Bestimmen Sie das Matrizenprodukt

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Was ergibt sich bei der folgenden Matrix-multiplikation für beliebiges $n \in \mathbb{N}$?

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Lösung:

(a) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 5 \\ 9 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ ✓

(b) $\begin{bmatrix} a_{1n} & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} \\ a_{2n} & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nn} & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} \end{bmatrix}$ ✓

Die letzte Spalte wird zur ersten Spalte. ✓

Aufgabe 1c

c₁) $|\vec{AB} + \vec{BC}|^2 = (\vec{AB} + \vec{BC}) \cdot (\vec{AB} + \vec{BC})$ ✓

$= |\vec{AB}|^2 + 2\,\vec{AB}\cdot\vec{BC} + |\vec{BC}|^2$ ✓

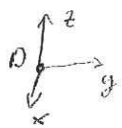
$= a^2 + 2a \cdot 3a \cdot \cos\frac{\pi}{4} + 9a^2 = a^2(10 + 3\sqrt{2})$

$\Rightarrow |\vec{AC}| = \underline{\underline{a \cdot \sqrt{10 + 3\sqrt{2}}}}$ ✓

c₂) $V = 2a \cdot |\vec{AB} \times \vec{BC}| = 2a \cdot |\vec{AB}|\,|\vec{BC}| \cdot \sin\frac{\pi}{4}$ ✓

$= \underline{\underline{3a^3\sqrt{2}}}$ ✓

Alternative: (Koordinaten)



c₁) $D(0/0/0)$, $C(0/a/0)$ ✓, $A\left(\frac{3a}{2}\sqrt{2} \,/\, -\frac{3a}{2}\sqrt{2} \,/\, 0\right)$ ✓

$|\vec{AC}| = \sqrt{\frac{9}{2}a^2 + \left(a + \frac{3a}{2}\sqrt{2}\right)^2} = \underline{\underline{a \cdot \sqrt{10 + 3\sqrt{2}}}}$ ✓

c₂) $V = 2a \cdot |\vec{DC} \times \vec{DA}| = \underline{\underline{3a^2\sqrt{2}}}$ ✓

$$\begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 0 & a & 0 \\ \frac{3a}{2}\sqrt{2} & -\frac{3a}{2}\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3}{2}a^2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$ ✓

Aufgabe 1d

d1) $\vec{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ p-2 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{D = (0 / -2 / p-1)}}$ ✓

d2) $\vec{BA} = \begin{pmatrix} +1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\vec{BC} \times \vec{BA} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -1 & -1 & p-2 \\ +1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -3+2p \\ p-3 \\ +3 \end{pmatrix}$ ✓

$|\vec{BC} \times \vec{BA}| = \sqrt{(3-2p)^2 + (p-3)^2 + 9}$ ✓

$= \sqrt{5p^2 - 18p + 27} \stackrel{!}{=} \sqrt{11}$

$\Rightarrow 5p^2 - 18p + 16 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{p_{1,2} = 2 \,/\, \frac{8}{5}}}$ ✓

d3) $g: \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ ✓

$g \cap$ x-z-Ebene $\Rightarrow -2 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 2$

$\underline{\underline{S(-2 / 0 / -5)}}$ ✓

d4) $\underline{\underline{E_2: \; -x + y - 3z = 0}}$ ✓

HNF $\frac{-x + y - 3z}{\sqrt{11}} = 0$ Abstandsberechnung mit A, B, C oder D!

$d = \left| \frac{-1 - 1 - 3}{\sqrt{11}} \right| = \underline{\underline{\frac{5}{\sqrt{11}}}}$ ✓

Σ A1: 25P.

Aufgabe 2

a) $z = \sqrt{2}\left(\frac{2+j}{1+j}\right)\left(+\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\,j\right)$ ✓

$= \frac{(2+j)}{(1+j)} \frac{(1-j)^2}{(1-j)} = \frac{(2+j)\cdot(1-2j-1)}{1+1}$ ✓

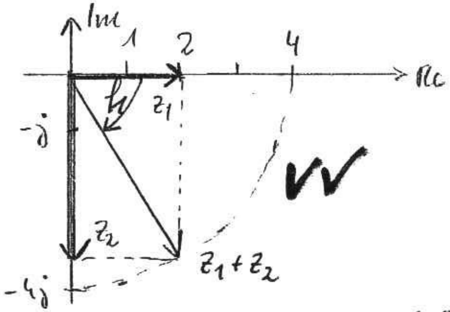
$= \frac{2}{2} - \frac{4}{2}j = \underline{\underline{1-2j}}$ ✓

b) $z^2 - z + 1 = 0$ ✓

$z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} j$

$|z_{1,2}| = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$ ✓

c)



✓✓

$2\cos\omega t \rightarrow z_1 = 2 e^{j\cdot 0}$

$A\sin\omega t \rightarrow z_2 = A\cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}$

$A^2 + 4 = 16 \Rightarrow A = +\sqrt{12}$ ✓

$\varphi = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}$

Rechnung: $2 - Aj = 4e^{j(\varphi - \frac{\pi}{2})}$ ✓

$|2 - Aj| = \sqrt{4 + A^2} = 4 \Rightarrow A = +\sqrt{12} = \underline{2\sqrt{3}}$ ✓

$\varphi - \frac{\pi}{2} = \operatorname{atan}\frac{-2\sqrt{3}}{2} = -\operatorname{atan}\sqrt{3} = \underline{\underline{-\frac{\pi}{3}}}$ ✓

$\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \underline{\underline{\frac{\pi}{6}}}$

Σ A2: 20P.

Aufgabe 1a

Bestimmen Sie sämtliche Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4$$
$$x_2 + x_3 + x_4 = 3$$
$$x_3 + x_4 = 2$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9$$

Lösung:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ & 1 & 1 & 1 & 3 \\ & & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 9 \end{array}\right] \begin{array}{l} (1) \\ \cdot(1) \\ \cdot(1) \\ \cdot(-1) \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ & 1 & 1 & 1 & 3 \\ & & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \Rightarrow x_1 = 1 \\ \Rightarrow x_2 = 1 \\ \Rightarrow x_4 = t,\ x_3 = 2-t \\ \end{array}$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2-t \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 1e

Lösung: $(\underline{A} - \lambda \underline{B})\underline{x} = 0$

nichttrivial lösbar, falls

$$\det(\underline{A} - \lambda \underline{B}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 3-\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\lambda_1 = 2}} \qquad \underline{\underline{\lambda_2 = -1}}$$

Aufgabe 2

d) $Ae^{j\frac{\pi}{6}} = 2e^{-j\frac{\pi}{6}} \cdot e^{j\varphi} = 2e^{j(\varphi-\frac{\pi}{6})}$

$\Rightarrow \underline{\underline{A = 2\ ,\ \varphi = \frac{\pi}{3}}}$ ✓✓

e) $-j|\cancel{z}|\,z = |\cancel{z}|\,\mathrm{Im}(z)$

$-j(x+jy) = y \Rightarrow -jx + y = y$

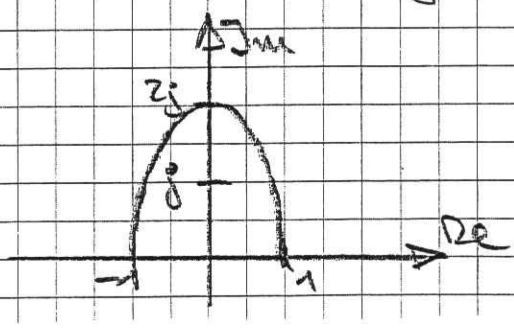
$\Rightarrow -jx = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x = 0\ ,\ y \in \mathbb{R}}}$ ✓✓✓

f) $z(t) = x(t) + jy(t) = \cos t + 2j\sin t \quad 0 \le t \le \pi$

$\left.\begin{array}{ll} \Rightarrow x(t) = \cos t & x^2 = \cos^2 t \\ y(t) = 2\sin t & \frac{y^2}{4} = \sin^2 t \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{x^2 + \frac{y^2}{4} = 1}$ ✓✓

wegen $0 \le t \le \pi$ Halbellipse

$M(0|0) \quad a = 1 \quad b = 2$ ✓



✓