Die inhomogene lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

$$\boxed{y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = r(x)} \quad \text{mit } a_k \in \mathbb{R}.$$

$r(x)$ heißt **Störfunktion**. Man bestimmt zunächst die Lösungen y_H der zughörigen homogenen DGL, siehe Seite 448 und benötigt dann noch *eine* Lösung y_S der inhomogenen DGL, um die Gesamtlösung anzugeben:

$$y = y_S + y_H.$$

Berechnung einer speziellen Lösung y_S :

(1) **Variation der Konstanten** geht oft (siehe BEI 16.45).

(2) **Spezieller Ansatz bei bestimmten Störfunktionen** (einfacher!):

Ist die Störfunktion vom Typ

$$r(x) = p(x)e^{ax}\cos bx \quad \text{oder} \quad r(x) = p(x)e^{ax}\sin bx, \text{ wobei}$$

a, b reelle Zahlen und $p(x)$ ein Polynom ist, so macht man folgenden **Ansatz**:

(a) Normalfall (keine **Resonanz**: $a \pm bi$ nicht Lösungen der char. Gl.):

$$y_S = q_1(x)e^{ax}\cos bx + q_2(x)e^{ax}\sin bx, \quad \textbf{Normalansatz.}$$

Dabei sind $q_1(x)$, $q_2(x)$ Polynome mit unbestimmten Koeffizienten vom gleichen Grad wie das Polynom $p(x)$ in der Störfunktion!

(b) Resonanzfall ($a \pm bi$ sind k-fache Lösungen der char. Gleichung):

Man multipliziert den Normalansatz mit x^k.

16.53 *Spezielle Störfunktionen und Ansätze, ohne Resonanz:*

Störfunktion	$a+bi$	Normalansatz (wenn keine Resonanz vorliegt)
x^2+1	0	Ax^2+Bx+C
$P(x)$	0	$Q(x)$, Grad Q = Grad P
$3xe^{2x}$	2	$(Ax+B)e^{2x}$
$P(x)e^{2x}$	2	$Q(x)e^{2x}$, Grad Q = Grad P
$4\sin 2x$	$2i$	$A\cos 2x + B\sin 2x$
$P(x)\sin 3x$	$3i$	$Q_1(x)\cos 3x + Q_2(x)\sin 3x$, Grad Q_1 = Grad Q_2 = Grad P
$5\cos 7x$	$7i$	$A\cos 7x + B\sin 7x$
$P(x)\cos 3x$	$3i$	$Q_1(x)\cos 3x + Q_2(x)\sin 3x$, Grad Q_1 = Grad Q_2 = Grad P
$8e^{-2x}\cos 5x$	$-2+5i$	$Ae^{-2x}\cos 5x + Be^{-2x}\sin 5x$
$xe^{2x}\sin 3x$	$2+3i$	$(Ax+B)e^{2x}\cos 3x + (Cx+D)e^{2x}\sin 3x$

16.54 *Spezielle Störfunktionen und Ansätze, Resonanzfall:*

Störfunktion	$a+bi$	Nullst. der char. Gl.	Ansatz
x^2+1	0	$0,0,1$	$x^2(Ax^2+Bx+C)$
$3xe^{2x}$	2	$0,1,2$	$x(Ax+B)e^{2x}$
$4\sin 2x$	$2i$	$\pm 2i$	$x(A\sin 2x + B\cos 2x)$
$5e^{-2x}\cos 5x$	$-2+5i$	$1,-2\pm 5i$	$x(Ae^{-2x}\sin 5x + Be^{-2x}\cos 5x)$
$xe^{2x}\sin 3x$	$2+3i$	$3,2\pm 3i$	$x(Ax+B)e^{2x}\cos 3x + x(Cx+D)e^{2x}\sin 3x$

Superposition

Ist die Störfunktion Summe von Funktionen, für die man spezielle Ansätze hat, ist der Ansatz die Summe der speziellen Ansätze. Dabei ist bei den jeweiligen Ansätzen die Resonanz zu beachten.

16.55 *Superposition: Spezieller Ansatz.*

Störfunktion, $r(x)$	$a+bi$	Nullst. der char. Gl.	Ansatz
$x+\sin x$	$\begin{cases} 0 \\ i \end{cases}$	$0,0,1$	$x^2(Ax+B)+D\sin x+E\cos x$
$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$	± 1	$1,2,3$	Axe^x+Be^{-x}
$\sin^2 x = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$	$\begin{cases} 0 \\ 2i \end{cases}$	$1,\pm 2i$	$A+x(B\sin 2x + C\cos 2x)$

16.56 *Man löse die DGL* $\boxed{y''-4y'+5y=5e^x\cos x}$.

(1) $\lambda^2-4\lambda+5=0 \implies \lambda_{1,2}=2\pm i \implies \underline{y_H = c_1e^{2x}\cos x + c_2e^{2x}\sin x.}$

(2) $r(x)=5e^x\cos x \implies a+bi=1+i \implies$ keine Resonanz.
Ansatz: $y_S = Ae^x\cos x + Be^x\sin x$, Normalansatz!
$\implies y_S' = (A+B)e^x\cos x + (-A+B)e^x\sin x,$
$\implies y_S'' = 2Be^x\cos x - 2Ae^x\sin x.$ Einsetzen in die DGL ergibt:

$$2Be^x\cos x - 2Ae^x\sin x - 4\big((A+B)e^x\cos x + (-A+B)e^x\sin x\big)$$
$$+5\big(Ae^x\cos x + Be^x\sin x\big) = 5e^x\cos x$$

linke Seite: $= (A-2B)e^x\cos x + (2A+B)e^x\sin x$
rechte Seite: $= \quad 5 \quad e^x\cos x + \quad 0 \quad e^x\sin x$

Koeffizientenvergleich ergibt ein LGS für A, B:

$$\begin{aligned} A-2B &= 5 \\ 2A+B &= 0 \end{aligned} \implies \begin{aligned} A &= 1 \\ B &= -2 \end{aligned} \implies \underline{y_S = e^x\cos x - 2e^x\sin x.}$$

Der in diesem Beispiel noch erträgliche Rechenaufwand läßt sich durch tabellarisches Rechnen einschränken: