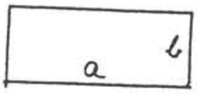
-8.4-(1)

Lösung der Übungsaufgaben 8.4 zu Brücken zur Mathematik Bd 4: Differential u. Integralrechnung 1 von Glatz, Greib, Hohloch, Kümmerer

8.4. Aufgaben

1. Zeigen Sie:
   a) Von allen Rechtecken mit gegebenem Umfang hat das Quadrat die größte Fläche.
   b) Von allen Rechtecken mit gegebener Fläche hat das Quadrat den kleinsten Umfang.



1a) $U = 2(a+b) =$ gegeben
$A = a \cdot b$ soll Maximum werden.

$$A = a \cdot \left[\frac{U}{2} - a\right] = a\frac{U}{2} - a^2 = f(a)$$

$$\frac{dA(a)}{da} = A'(a) = \frac{U}{2} - 2a = 0 \Rightarrow \boxed{a = \frac{U}{4}}$$

$$b = \frac{U}{2} - a = \frac{U}{2} - \frac{U}{4} = \boxed{\frac{U}{4} = b}$$

$A''(a) = -2 < 0 \Rightarrow$ also Maximum

mit $a = b = U/4$ folgt

$$\boxed{A_{Max} = a \cdot b = a^2 = b^2 = \frac{U^2}{16}}$$

-8.4-(2)

I

8.4) 1(b)

8.4. Aufgaben

1. Zeigen Sie:
   b) Von allen Rechtecken mit gegebener Fläche hat das Quadrat den kleinsten Umfang.

$A = a \cdot b =$ gegeben

$U = 2(a+b)$ soll Minimum werden

$$U(a) = 2\left(a + \frac{A}{a}\right) \Rightarrow U'(a) = 2\left[+1 - \frac{A}{a^2}\right] = 0$$

$$\Rightarrow a^2 = A \Rightarrow \boxed{a = \sqrt{A}} \quad b = \frac{A}{a} = \frac{A}{\sqrt{A}} = \frac{A \cdot \sqrt{A}}{\sqrt{A} \cdot \sqrt{A}}$$

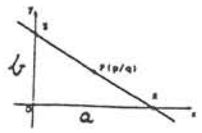
$$\boxed{b = \sqrt{A}} \quad U''(a) = 4\frac{A}{a^3}\Big|_{a=\sqrt{A}} > 0 \Rightarrow \text{Minimum}$$

$$\boxed{U_{Min} = 2(\sqrt{A} + \sqrt{\ }) = 4\sqrt{A}}$$

- 8.4 -(3)-

8.4 Aufgabe 2

2. Durch den Punkt P(p/q) im 1. Quadranten ist gemäß Skizze eine fallende Gerade so zu legen, daß
   a) die Summe der Achsenabschnitte $\overline{OR} + \overline{OS}$ minimal wird;
   b) der Flächeninhalt A des Dreiecks ORS minimal wird.



2a) $\overline{OR} = a$; $\overline{OS} = b$

1) Gerade durch gegebenen Punkt $P(p;q)$ mit beliebigem Anstieg m:

$$\frac{y-q}{x-p} = m \Longrightarrow \boxed{y = mx + (q - mp)}$$

2) Bestimmung der von m abhängigen Achsenabschnitte $a(m)$ und $b(m)$:

$$y = 0 \Rightarrow mx + (q - mp) = 0 \Rightarrow \boxed{a = p - \frac{q}{m}} = x$$

$$x = 0 \Rightarrow y = \boxed{b = q - mp}$$

3) $$S = a + b = (p+q) - mp - \frac{q}{m} = S(m)$$

$$\frac{dS(m)}{dm} = S'(m) = -p + \frac{q}{m^2} = 0$$

-8.4-(4)-

Fortsetzung Aufgabe 2a

$$m = \pm\sqrt{\frac{q}{p}} \; ; \; S''(m) = -\frac{2q}{m^3}$$

$$S''(m)\Big|_{m=+\sqrt{\frac{q}{p}}} < 0 \text{ , d.h. Maximum}$$

$$S''(m)\Big|_{m=-\sqrt{\frac{q}{p}}} = -\frac{2q}{-\frac{q}{p}\sqrt{\frac{q}{p}}} > 0 \Rightarrow \text{Minimum}$$

da laut Aufgabe $S(m)$ ein Minimum sein soll, muß also gelten

$$\boxed{m_{MIN} = -\sqrt{\frac{q}{p}}} \Rightarrow a = p - \frac{q}{m} = p + \frac{q}{\sqrt{\frac{q}{p}}} \Rightarrow$$

$$\boxed{a_{MIN} = p + q\sqrt{\frac{p}{q}} = p + \sqrt{\frac{q^2 \cdot p}{q}} = p + \sqrt{p \cdot q}}$$

$$\boxed{b_{MIN} = q - mp = q + p\sqrt{\frac{q}{p}} = q + \sqrt{\frac{p^2 \cdot q}{p}} = q + \sqrt{pq}}$$

$$\boxed{S_{MIN} = (a+b)_{MIN} = p + q + 2\sqrt{pq}}$$

-8.4-⑤-

Lösung der Übungsaufgaben in Brüchen zur Mathematik Bd 4: Diff. u. Integralrechnung 1 von Glatz, Grieb, Hohloch und Kümmerer

2. Lösungsweg zu Aufgabe 2a

1) Gerade durch gegebene Achsenabschnitte a, b:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \quad \text{(Achsenabschnittsgleich.)}$$

Punktprobe $P(p,q)$: $\frac{p}{a}+\frac{q}{b}=1 \Rightarrow$

$$b=\left(\frac{q}{a-p}\right)q=f(a)$$

2) $S=a+b=a+\frac{a}{(a-p)}\cdot q=S(a)$

3) $S'(a)=1+q\frac{\{(a-p)\cdot 1-a\cdot 1\}}{(a-p)^2}=1-\frac{qp}{(a-p)^2}$

$$S'(a)=\frac{(a-p)^2-pq}{(a-p)^2}=0 \Rightarrow$$

$$(a-p)^2=pq \Rightarrow \boxed{a=p\pm\sqrt{pq}}$$

-8.4-⑥-

Fortsetzung 2. Lösungsweg zu Aufgabe.

$$S''(a)=\frac{d}{da}S'(a)=\frac{d}{da}\left\{1-\frac{p\cdot q}{(a-p)^2}\right\}$$

$$S''(a)=\frac{2pq}{(a-p)^3} \Rightarrow S''(a=p+\sqrt{pq})=\frac{2pq}{(+\sqrt{pq})^3}>0$$

$$S''(a=p-\sqrt{pq})=\frac{2\cdot pq}{(-\sqrt{pq})^3}<0 \Rightarrow S=S$$

Somit: Für $a=p+\sqrt{pq}$ ergibt sich ein Minimum von S:

$$\boxed{a_{MIN}=p+\sqrt{pq}}$$

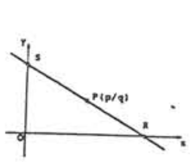
$$b_{MIN}=\frac{a\cdot q}{a-p}=\frac{(p+\sqrt{p\cdot q})q}{\sqrt{pq}}=\frac{(p+\sqrt{pq})\sqrt{pq}}{(pq)}$$

$$b_{MIN}=\frac{(p\sqrt{p\cdot q}+pq)q}{(pq)}=\boxed{q+\sqrt{pq}=b_{MIN}}$$

4) $\boxed{S_{MIN}=p+q+2\sqrt{p\cdot q}}$

-8.4-⑦-

2) Durch den Punkt P(p/q) im 1. Quadranten ist gemäß Skizze eine fallende Gerade so zu legen, daß



b) der Flächeninhalt A des Dreiecks ORS minimal wird.

2b) $A=\frac{a\cdot b}{2}$ wobei aus Aufgabe 2a):

$$a=\left(p-\frac{q}{m}\right);\; b=(q-mp)$$

$$A(m)=\left(p-\frac{q}{m}\right)(q-pm)\cdot\frac{1}{2}$$

$$A(m)=\left(2pq-p^2m-\frac{q^2}{m}\right)\frac{1}{2}$$

$$A'(m)=-p^2+\frac{q^2}{m^2}=0 \Rightarrow$$

$$\boxed{m=\pm\frac{q}{p}}$$

$$A''(m)=-\frac{2q^2}{m^3}\cdot\frac{1}{2}$$

$A''(m=+\frac{q}{p})<0$, d.h. Maximum

$A''(m=-\frac{q}{p})>0$, d.h. Minimum

-8.4-⑧-

Somit $\boxed{m_{MIN}=-\frac{q}{p}}$

$$A_{MIN}=A(m=m_{MIN})=\left(p-\frac{q}{(-q/p)}\right)\left(q-p\left(-\frac{q}{p}\right)\right)$$

$$\boxed{A_{MIN}=\frac{(p+p)(q+q)}{2}=2pq}$$

2. Lösungsweg: mit $b=\frac{qa}{a-p}$ folgt:

$$A=\frac{a\cdot b}{2}=\frac{q}{2}\cdot\frac{a^2}{(a-p)} \Rightarrow$$

$$A'(a)=\frac{q}{2}\cdot\frac{(a-p)2a-a^2\cdot 1}{(a-p)^2}=\frac{q}{2}\frac{(a^2-2pa)}{(a-p)^2}=0$$

$$a^2-2pa=a(a-2p)=0 \Rightarrow (a=0)\; \boxed{a=2p}$$

$$b=\frac{q\cdot 2p}{2p-p}=\boxed{2q=b}$$

$$\boxed{A_{MIN}=\frac{2p\cdot 2q}{2}=2pq}$$

Lösung der Übungsaufgaben in Brücken zur Mathematik Bd. 4: Diff. u. Integralrechnung 1 von Glatz, Grieb, Hollod u. Kümmerer

3. Ein Drahtstück der Länge a wird in 2 Teile zerschnitten, von denen eines zu einem Kreis, das andere zu einem Quadrat gebogen wird. Wie lang müssen die beiden Teilstücke sein, damit die Summe der Flächeninhalte beider Figuren möglichst klein wird?

$x+y=a$ wobei $x=2r\pi \Rightarrow \boxed{r=\frac{x}{2\pi}}$

und $y=(a-x)=4b \Rightarrow \boxed{b=\frac{a-x}{4}}$ = Seitenlänge des Quadrats

$A_{Kreis}+A_{Quadrat}=A$ soll Minimum werden

$$r^2\pi + b^2 = A$$

$$\boxed{\frac{x^2}{4\pi^2}+\frac{(a-x)^2}{16}=A(x)} \Rightarrow$$

$$A'(x)=\frac{x}{2\pi}+\frac{2}{16}(a-x)(-1)=\frac{x}{2\pi}+\frac{x}{8}-\frac{a}{8}$$

$$A'(x)=\frac{x}{2}\left(\frac{1}{\pi}+\frac{1}{4}\right)-\frac{a}{8}=0 \Rightarrow x=\frac{a\pi}{4+\pi}$$

$$\boxed{x=\frac{a\pi}{4+\pi}} \quad b=\frac{a-x}{4}=\left(a-\frac{a\pi}{4+\pi}\right)\frac{1}{4}=\boxed{\frac{a}{(4+\pi)}=b}$$

$A''(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}+\frac{1}{4}\right)>0$, d.h. Minimum A_{m} liegt vor

$$A_{MIN}=A\left(x=\frac{a\pi}{4+\pi}\right)=\frac{x^2}{4\pi}+\frac{(a-x)^2}{16}$$

$$A_{MIN}=\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{a^2\pi^2}{(4+\pi)^2}+\frac{a^2}{(4+\pi)^2}$$

$$A_{MIN}=\frac{a^2\pi+4a^2}{4[4+\pi]^2}=\frac{a^2[\pi+4]}{4[4+\pi]^2}.$$

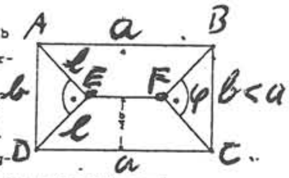
$$\boxed{A_{MIN}=\frac{a^2}{4(\pi+4)}} \quad \boxed{=0{,}0350\cdot a^2}$$

Untersuchung auf Randwerte: $0\le x\le a$

$$x=0\Rightarrow A_{Kreis}=0\Rightarrow A(x=0)=\frac{a^2}{16}=0{,}0625a^2$$

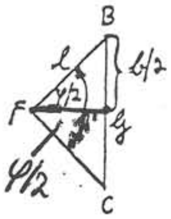
$$x=a\Rightarrow A_{Quadrat}=0\Rightarrow A(x=a)=\frac{a^2}{4\pi}=0{,}0796a$$

4. Die vier Ecken eines Rechtecks mit Seiten a, b sollen durch ein möglichst kurzes Wegnetz verbunden werden (s. Skizze).
a) Bestimmen Sie die minimale Länge L_{min} des Wegnetzes und den Winkel φ in den Knoten.
b) Vergleichen Sie L_{min} mit der Länge des Wegnetzes längs der Rechteckseiten und längs der Rechteckdiagonalen.
c) Bei welchem Seitenverhältnis a/b fallen die Knoten zusammen?



4a) Mit $\overline{AE}=\overline{DE}=\overline{BF}=\overline{CF}=\ell$ folgt

$L=4\cdot\ell+\overline{EF}$ = Länge des Wegnetzes



Aus der Skizze folgt:

$$\sin(\varphi/2)=\frac{b}{2\ell}\Rightarrow\boxed{\ell=\frac{b}{2\sin\varphi/2}}$$

$$\overline{Fg}=\ell\cdot\cos(\varphi/2)$$

$$\overline{EF}=a-2\overline{Fg}=a-2\ell\cos(\varphi/2)$$

$$L(\varphi)=4\frac{b}{2\sin(\varphi/2)}+a-2\ell\cdot\cos(\varphi/2)$$

$$\boxed{L(\varphi)=\frac{2b}{\sin(\varphi/2)}+a-b\cdot\frac{\cos(\varphi/2)}{\sin(\varphi/2)}}$$

Fortsetzung 4a)

$$L(\varphi)=a+b\left\{\frac{2-\cos(\varphi/2)}{\sin(\varphi/2)}\right\}$$

$$L'(\varphi)=\frac{\sin^2(\varphi/2)\frac{1}{2}-(2-\cos\varphi/2)\frac{1}{2}\cos\varphi/2}{\sin^2(\varphi/2)}$$

$$L'(\varphi)=\frac{\frac{1}{2}(\sin^2\varphi/2+\cos^2\varphi/2)-\cos\varphi/2}{\sin^2(\varphi/2)}$$

$$L'(\varphi)=\frac{1/2-\cos\varphi/2}{\sin^2(\varphi/2)}=0\Rightarrow$$

$$\cos(\varphi/2)=1/2\Rightarrow\frac{\varphi}{2}=60^\circ=\frac{\pi}{3}\Rightarrow$$

$$\boxed{\varphi=120^\circ=\frac{2\pi}{3}}$$

$$\left.\begin{array}{l}L'(\frac{2\pi}{3}+|\Delta\varphi|)>0\\ L'(\frac{2\pi}{3}-|\Delta\varphi|)<0\end{array}\right\}\Rightarrow L \text{ hat für } \varphi=2\pi/3 \text{ ein Minimum}$$

$$L_{MIN}=a+b\left\{\frac{2-\cos 2\pi/6}{\sin\pi/3}\right\}=$$

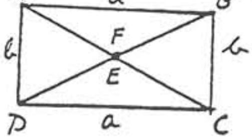
$$\boxed{L_{MIN}=a+\frac{b(2-1/2)}{\sqrt{3}/2}=a+\frac{3b}{\sqrt{3}}=a+b\sqrt{3}}$$

8.4 – (13) –

Lösung der Übungsaufgaben in Brücken zur Mathematik Bd. 4: Diff. u. Integralrechnung 1 von Glatz, Greib, Hohloch u. Kümmerer

4b) $L_{MIN} = a + b\sqrt{3}$

$L_D = 2\sqrt{a^2+b^2}$



wobei $D = \sqrt{a^2+b^2}$ = Diagonale ist und die Knoten F und E zusammenfallen (d.h. $\overline{FE} = 0$)

$$L_D^2 - L_{MIN}^2 = 4(a^2+b^2) - (a^2 + 2ab\sqrt{3} + 3b^2)$$

$$L_D^2 - L_{MIN}^2 = (3a^2 - 2ab\sqrt{3} + b^2) = (a\sqrt{3} - b)^2 > 0$$

$$\Rightarrow L_D^2 > L_{MIN}^2 \Rightarrow \boxed{L_D > L_{MIN}}$$

4c) Es soll laut Aufgabe gelten:

$$\boxed{L_D = L_{MIN}} \Rightarrow 2\sqrt{a^2+b^2} = a + b\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$(a^2+b^2) = a^2 + 2ab\sqrt{3} + 3b^2 \Rightarrow (a\sqrt{3} - b)^2 = 0$$

$$\Rightarrow a\sqrt{3} - b = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$L_R = 2(a+b) \Rightarrow L_R^2 = 4(a+b)^2$$

$$L_R^2 - L_D^2 = \{4(a^2+2ab+b^2) - 4(a^2+b^2)\} = 8ab > 0 \Rightarrow L_R > L_D$$

– 8.4 – (14) –

5. Berechnen Sie mit Hilfe des Newtonverfahrens die Nullstellen von
a) $f(x) = x^3 + x - 6$ (→ Bsp. 3.11) S. 90
b) $f(x) = e^x - x - 2$ (→ Bsp. 3.4)
Geforderte Genauigkeit: 6 Stellen nach dem Komma.

5a): $f(x) = x^3 + x - 6 = 0$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} = x_i - \frac{(x_i^3 + x_i - 6)}{(3x_i^2 + 1)}$$

Näherungswert x_0 für $i = 0$:

$f(1{,}5) = -1{,}125$
$f(1{,}75) = 1{,}109$
} zwischen $x = 1{,}5$ und $x = 1{,}75$ liegt eine Nullstelle der Funktion $f(x) = x^3 + x - 6$

Es wird z. Bsp gewählt: $\boxed{x_0 = 1{,}6}$ ⇒

$x_1 = 1{,}635023041$
$x_2 = 1{,}634365528$
$x_3 = 1{,}634365293$
$x_4 = 1{,}634365293$
} mittels Taschenrechner

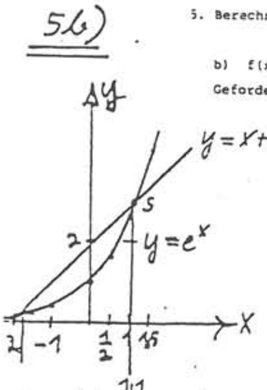
Probe: $x_{exakt} = x_4 = 1{,}63436529$

$f(x_4) = 0{,}000\,000\,000$

– 8.4 – (15) –

5b)

5. Berechnen Sie mit Hilfe des Newtonverfahrens die Nullstellen von
b) $f(x) = e^x - x - 2$ (→ Bsp. 3.4)
Geforderte Genauigkeit: 6 Stellen nach dem Komma.



Schnitt von $y = e^x$ mit $y = x + 2$ ergibt einen Näherungswert für $x_0 = 1{,}1$. Man kann noch zusätzlich eine Wertetafel benützen:

x	$1{,}1$	$1{,}2$
$f(x) = e^x - x - 2$	$-0{,}0958$	$+0{,}1201$

⇒

Die Nullstelle von $f(x) = e^x - x - 2$ liegt zwischen $x = 1{,}1$ und $x = 1{,}2$; es wird daher z. Bsp $\boxed{x_0 = 1{,}15 \text{ gewählt}}$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{(e^x - x - 2)}{(e^x - 1)} \Rightarrow \text{mit } x_0 = 1{,}15$$

$x_1 = 1{,}146\,203\,810$; $x_2 = 1{,}146\,193\,221$

$\boxed{x_3 = 1{,}146\,193\,221} \Rightarrow \boxed{f(x_3) = 0{,}000\,000\,001}$

– 8.4 – (16) –

Fortsetzung 5b: Aus der Skizze ist zu ersehen, daß noch ein zweiter Schnittpunkt von $y = e^x$ und $y = x + 2$ mit einem negativen x Wert existiert.

x	-2	$-1{,}9$	$-1{,}8$
$f(x) = e^x - x - 2$	$0{,}1353$	$0{,}04957$	$-0{,}03470$

d.h. zwischen $x = -1{,}9$ und $x = -1{,}8$ liegt eine Nullstelle der Funktion $f(x) = e^x - x - 2$. Mit $x_0 = -1{,}9$ folgt

$x_1 = -1{,}841\,713\,558$
$x_2 = -1{,}841\,405\,669$
$x_3 = -1{,}841\,405\,660$

$\boxed{x_4 = -1{,}841\,405\,660} \Rightarrow$

$\boxed{f(x_4) = -0{,}000\,000\,000}$

-8.4-17-

Lösung der Übungsaufgaben in Brücken zur Mathematik Bd 4: Diff. und Integralrechnung von Glatz, Grieb, Hohloch, Kümmerer

6. a) Entwickeln Sie mit dem Newton-Verfahren eine Iterationsvorschrift zur Berechnung von $\sqrt{a}$, $a > 0$.

b) Berechnen Sie damit $\sqrt{2}$ und $\sqrt{5}$; Fehlerschranke: $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-d}$. =

6a) $x=\sqrt{a} \Rightarrow x^2=a \Rightarrow x^2-a=0$

Somit Nullstelle von $f(x)=x^2-a^2$ führt auf $x=\pm\sqrt{a}$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2-a^2}{2x_n}$$

$$x_{n+1} = \frac{2x_n^2-(x_n^2-a)}{2x_n} = \frac{x_n^2+a}{2x_n}$$

$$\boxed{x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)}$$

-8.4-18-

6b) für $a=2 \Rightarrow x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{2}{x_n}\right)$

Näherungswert für $\sqrt{a}=\sqrt{2}$ sei $x_0=1{,}5$: $\Rightarrow$

$x_1=1{,}416666667 \Rightarrow x_2=1{,}41421568\ldots$

$x_3=1{,}414213562 \Rightarrow \boxed{x_4=1{,}41421356\ldots}$

Der Rechner liefert $\sqrt{2}=1{,}414213562$

für $a=5 \Rightarrow x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{5}{x_n}\right)$

Näherungswert für $\sqrt{a}=\sqrt{5}$ sei wegen $2{,}2^2=4{,}84$ und $2{,}3^2=5{,}29$ der Wert $\boxed{x_0=2{,}25}$

$x_1=2{,}236111111 \Rightarrow x_2=2{,}23606797\ldots$

$x_3=2{,}236067977 \Rightarrow \boxed{x_3=2{,}23606797\ldots}$

Der Rechner liefert $\sqrt{5}=2{,}236067977$

-8.4-19-

7. Berechnen Sie die Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\ln x}{x^2}$ c) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-x^2-x-2}{x^3-3x^2+3x-2}$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$ e) $\lim\limits_{x\to 0+}(x\cdot e^{1/x^2})$ f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n$;

7a) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x - x}{x\sin x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x-1}{x\cos x+\sin x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-\sin x}{-x\sin x+2\cos x}\right)=\frac{0}{2}=0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=0}$$

7b) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x\ln x}{x^2}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right)=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{x\ln x}{x^2}=0}$$

-8.4-20-

7c) $$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-x^2-x-2}{x^3-3x^2+3x-2}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-2x-1}{3x^2-6x+3}=\frac{7}{3}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 2}\left\{\frac{x^3-x^2-x-2}{x^3-3x^2+3x-2}\right\}=\frac{7}{3}}$$

7d) $$\boxed{\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1/x}{1}=1}$$

7e) $$\lim_{x\to 0+}(xe^{1/x^2})=\lim_{x\to 0+}\left\{\frac{e^{1/x^2}}{\frac{1}{x}}\right\}$$

ist wegen $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$ ein Ausdruck vom Typ $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x\to 0+}\left\{\frac{e^{1/x^2}}{\frac{1}{x}}\right\}=\lim_{x\to 0+}\left\{\frac{-\frac{2}{x^3}e^{1/x^2}}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}\right\}=$$

$$=+2\lim_{x\to 0+}\frac{e^{1/x^2}}{x}=\boxed{+\infty=\lim_{x\to 0+}\{xe^{1/x^2}\}}$$

8.4-21

<u>Aufgabe 7f)</u> siehe Seite 71 im Buch Bd 4: Diff. u. Integralrechnung 1

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = ?$$

Behauptung: $e^{\ln f(n)} = f(n)$

Beweis: $\ln\{e^{\ln f(n)}\} = \ln f(n) \Rightarrow$

$$\ln f(n) \underbrace{\ln e}_{1} = \ln f(n)$$

Mit $f(n) = \left(1+\frac{a}{n}\right)^n$ folgt:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} e^{\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)^n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left\{n\cdot\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)\right\}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\{n\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\ln(1+a/n)}{1/n}\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\frac{1}{1+a/n}\cdot\left(-\frac{a}{n^2}\right)}{(-1/n^2)}\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{a}{1+a/n}\right\} = a$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a}$$