Mathematik 1

für TEL, BA S

A. Kessler

Themen :

Literatur :

T. Rießinger : >Mathematik für Ingenieure<, Springer

P. Stingl : >Mathematik an Fachhochschulen – Technik und Informatik<, Hanser

L. Papula : >Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler<, Vieweg, Bd. 1 und Bd. 2

1.1 Grundlagen (1. Woche)

1.1.1 Mengen

Eine Menge ist eine Zusammenfassung gegebener Objekte bzw. Elemente einer Grundmenge $\mathbb{G}$.
Damit ist jede solche Menge M automatisch Teilmenge der vorher festzulegenden Grundmenge $\mathbb{G}$.
Dabei sollte stets für jedes Element u der Grundmenge eindeutig entschieden werden können, ob es zu M gehört oder nicht.
Tatsächlich wird $\mathbb{G}$ in der konkreten Mengenbeschreibung oft unterschlagen, z.B.

$M = \{x \mid x \text{ ist Primzahl}\}$, d.h.:
M ist die Menge aller x, für die gilt: x ist Primzahl.

In dieser beschreibenden bzw. intensionalen Form der Mengenangabe kann man z.B. davon ausgehen, dass $\mathbb{G}$ die Menge aller natürlichen Zahlen ≥ 2 ist.
In extensionaler bzw. aufzählender Form würden Sie vermutlich (leider ungenau) schreiben:

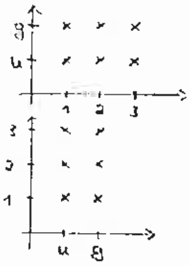
$M = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; \dots\}$.

Leider gibt es (noch!?) keine rekursive Vorschrift, wie man aus allen vorhergehenden Primzahlen die unmittelbar nächste Primzahl ausrechnen kann.
Man weiß nur, dass es unendlich viele Primzahlen gibt (Satz von Euklid!).

Ohne $\mathbb{G}$ kann es aber auch gründlich schief gehen.
Davon können Sie sich (später) selbst in A4 b), Russellsche Antinomie genannt (nach Bertrand Russell, 1872–1970) überzeugen.
Neben den aus der Schule bekannten, zur Erinnerung umseitig zusammengefassten „mathematischen Zeichen", die der Abkürzung der eindeutigen Beschreibung mathematischer Zusammenhänge dienen, sei an dieser Stelle ergänzt formuliert:

Potenzmenge $\mathcal{P}(M) = \{X \mid X \subseteq M\}$ ist die Menge aller Teilmengen von M,
z.B. für $M = \{1; 2; 3\}$ ist
$\mathcal{P}(M) = \{\phi; \{1\}; \{2\}; \{3\}; \{1;2\}; \{1;3\}; \{2;3\}; M\}$.

Kartesisches Produkt $\overset{n}{\underset{i=1}{\times}} M_i = M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n$ ist die Menge aller n-Tupel,



z.B. für $M_1 = \{1; 2; 3\}$ und $M_2 = \{u; g\}$ ist

$$M_1 \times M_2 = \{(1|u); (1|g); (2|u); (2|g); (3|u); (3|g)\}$$

$$\neq M_2 \times M_1 = \{(u|1); (u|2); (u|3); (g|1); (g|2); (g|3)\},$$

z.B. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist die Menge aller geordneten Paare reeller Zahlen!

Mathematische Zeichen

Relationen zwischen Zahlen

$a = b$	a gleich b	$a \neq b$	a ungleich b
$a < b$	a kleiner b	$a > b$	a größer b
$a \leqq b$	a kleiner oder gleich b	$a \geqq b$	a größer oder gleich b
$a \approx b$	a ungefähr gleich b		

Logische Zeichen

$A \Rightarrow B$	wenn A dann B; aus A folgt B (nicht gleichbedeutend mit $B \Rightarrow A$)
$A \Leftrightarrow B$	A gilt genau dann, wenn B gilt; A äquivalent B (gleichbedeutend mit $B \Leftrightarrow A$)

Mengen

Schreibweise einer Menge

$M_1 = \{1; 2; 3; 4\}$ aufzählende Form (extensionale F.)

$M_1 = \{x \mid x$ ist eine natürliche Zahl und $x < 5\}$ beschreibende Form (intensionale F.)

M_1 ist die Menge aller x, für die gilt: x ist eine natürliche Zahl und $x < 5$.
M_1 ist eine endliche Menge.

$M_2 = \{1; 2; 3; 4; \ldots\}$. unendliche Menge

$3 \in M_1$	3 ist Element von M_1
$5 \notin M_1$	5 ist nicht Element von M_1
$\emptyset$ oder $\{\,\}$	leere Menge, sie enthält kein Element

Unendliche Zahlenmengen

$\mathbb{N}^+ = \{1; 2; 3; \ldots\}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \ldots\}$	Menge der nicht negativen ganzen Zahlen
$\mathbb{Z} = \{\ldots; -2; -1; 0; 1; 2; \ldots\}$	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Z}^- = \{-1; -2; -3; \ldots\}$	Menge der negativen ganzen Zahlen
$\mathbb{Q} = \left\{x \mid x = \frac{p}{q};\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z} - \{0\}\right\}$	Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{Q}^+ = \left\{x \mid x = \frac{p}{q};\ p,\ q \in \mathbb{N} \text{ oder } p, q \in \mathbb{Z}^-\right\}$	Menge der positiven rationalen Zahlen
$\mathbb{Q}_0^+ = \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$	Menge der nicht negativen rationalen Zahlen
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}^+$	Menge der positiven reellen Zahlen
$\mathbb{C}$	Menge der komplexen Zahlen

Intervalle

$[a; b]$	abgeschlossenes Intervall; $x \in [a; b]$ bedeutet $a \leqq x \leqq b$
$]a; b[$	offenes Intervall; $x \in]a; b[$ bedeutet $a < x < b$

Relationen zwischen Mengen

$A = B$	A gleich B bedeutet $x \in A \Leftrightarrow x \in B$
$A \subseteq B$	A Teilmenge von B bedeutet $x \in A \Rightarrow x \in B$ (Also auch $\emptyset \subseteq A$ und $A \subseteq A$)

Operationen mit Mengen

$A \cup B$	A vereinigt mit B (Vereinigungsmenge); $x \in (A \cup B)$ bedeutet $x \in A$ *oder* $x \in B$ („*oder*" im nicht ausschließenden Sinn)
$A \cap B$	A geschnitten mit B (Schnittmenge); $x \in (A \cap B)$ bedeutet $x \in A$ und $x \in B$
$A \setminus B$	A ohne B (Differenzmenge); $x \in (A \setminus B)$ bedeutet $x \in A$ und $x \notin B$

Weitere Zeichen

$\lim\limits_{n \to \infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$	Limes von $\frac{1}{n}$ für n gegen Unendlich ist gleich Null
$\lvert a \rvert$	absoluter Betrag von a; $\lvert a \rvert$ ist diejenige von den beiden Zahlen a und $-a$, die nicht negativ ist.
$[a]$	größte ganze Zahl z, die nicht größer als a ist (Gauß Klammer).

Wichtige Begriffe

Aussageform. Ein sprachliches Gebilde, das (eine oder mehrere) Leerstellen enthält und in eine (richtige oder falsche Aussage) übergeht, wenn in die Leerstelle geeignete Namen eingesetzt werden, heißt eine *Aussageform.* Zeichen, welche eine Leerstelle bezeichnen, heißen *Variable* (oder Platzhalter).

Beispiele:

1) $x < 5$ *Aussageform;* durch Einsetzen der Zahl 6 entsteht die (falsche) *Aussage* $6 < 5$.

2) $x^2 - x = 6$ *Aussageform;* durch Einsetzen der Zahl 3 entsteht die (wahre) *Aussage* $3^2 - 3 = 6$.

Lösungsmenge. Die Menge aller aus einer Grundmenge stammenden Einsetzungen in die Leerstellen einer Aussageform, die diese Aussageform zu einer wahren Aussage machen, nennt man die Lösungsmenge der Aussageform.

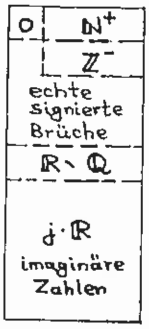
Funktion. Die Menge A ist abgebildet in die Menge B, wenn jedem Element $x \in A$ genau ein Element $y \in B$ zugeordnet ist. Man schreibt $x \to y$ und liest: x wird abgebildet auf y. Bedeutet f die Zuordnungsvorschrift, so schreibt man auch $x \to f(x)$ bzw. $x \to y$ mit $y = f(x)$.
Eine Funktion f läßt sich auffassen auch als eine Menge von Paaren (x, y), nämlich als die Menge $\{(x, y) \mid y = f(x)\}$. $f(x)$ ist der Funktionswert, der zu x gehört.

Implikation $\Rightarrow$ **und Äquivalenz** $\Leftrightarrow$ (zwischen Aussageformen A und B)

$A \Rightarrow B$ bedeutet: die Lösungsmenge der Aussageform A ist eine Teilmenge der Lösungsmenge der Aussageform B; oder mit anderen Worten: A ist eine hinreichende (aber nicht notwendige) Bedingung für B; oder: B ist eine notwendige (aber nicht hinreichende) Bedingung für A; oder aus A folgt B. (Es bleibt offen, ob gilt $B \Rightarrow A$).
$A \Leftrightarrow B$ bedeutet: A hat die gleiche Lösungsmenge wie B; oder mit anderen Worten: B dann und nur dann (genau dann), wenn A; oder: A genau dann, wenn B; oder: A ist eine notwendige *und* hinreichende Bedingung für B; oder B ist eine notwendige *und* hinreichende Bedingung für A; oder: aus A folgt B und umgekehrt.

Bemerkungen : ($\wedge$ heißt logisch und , $\vee$ heißt logisch oder)

a)



$\mathbb{N}^+ = \{1; 2; 3; \ldots\}$ und $\mathbb{N} = \{0\} \cup \mathbb{N}^+$ (natürliche Zahlen)

$\mathbb{Z}^- = -\mathbb{N}^+$ und $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N}^+)$ (ganze Zahlen)

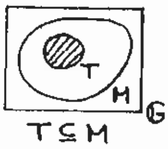
$\mathbb{Q} = \{ \frac{z}{n} \mid z \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N}^+ \}$ (rationale Zahlen)

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \{ x \mid x \notin \mathbb{Q} \wedge (x$ ist Grenzwert einer Folge $(x_n), x_n \in \mathbb{Q}) \}$
ist die Menge aller irrationalen Zahlen ,
z. B. : $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (Heron-Verfahren)
$e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit $e = \lim_{n \to +\infty} ((\frac{n+1}{n})^n) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}$
$\pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

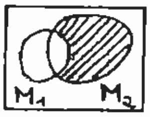
$\mathbb{C} = \mathbb{R} + j \cdot \mathbb{R}$ (komplexe Zahlen)

Dabei ist j (in der E-Technik) bzw. i (in der Mathematik) die imaginäre Einheit mit der Eigenschaft $j^2 = -1$ $(i^2 = -1)$
Komplexe Zahlen werden erst im 2. Semester behandelt !

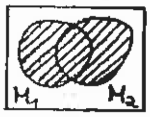
b) Relationen zwischen Mengen und Operationen mit Mengen kann man sich manchmal per Venn-Diagramm veranschaulichen



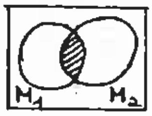
$T \subseteq M$



$M_2 \setminus M_1$

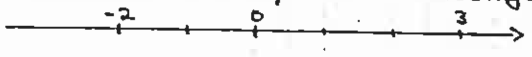


$M_1 \cup M_2$



$M_1 \cap M_2$

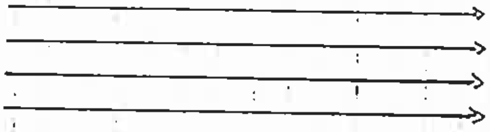
c) Reelle Intervalle können mithilfe der Zahlengerade veranschaulicht werden, z. B. :



$]-2; 3]$

Ⓤ̈ Vervollständigen und veranschaulichen Sie bei $\mathbb{G} = \mathbb{R}$:

$]-5; 1[= \{ x \in \mathbb{R} \mid \qquad \}$
$[-1; 1] = \{ x \in \mathbb{R} \mid \qquad \}$
$[1; +\infty[= \{ \qquad \}$
$\mathbb{R} \setminus [-1; 1] = \{ \qquad \}$



d) In $\mathbb{R}$ kann man rechnen , und zwar mit den Grundrechenarten + und − ($\sim$ 1. Stufe) ; · und ÷ ($\sim$ 2. Stufe) ;
Potenzieren , Exponentieren und Logarithmieren ($\sim$ 3. Stufe) .
Neben den selbstverständlichen Rechenregeln (Kommutativität , Assoziativität , neutrale Elemente 0 und 1 , „Punkt vor Strich" etc. sollten Sie die folgenden Regeln bis zur „mitternächtlichen" Beherrschung „per Rückenmark" einüben :

$$a \cdot (b + c) = ab + ac \; ; \; \frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd} \; ; \; \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \; ; \; \frac{1}{-b} = -\frac{1}{b}$$

$$b^p \cdot b^q = b^{p+q} \;\wedge\; a^p \cdot b^p = (ab)^p \;\wedge\; (b^p)^q = b^{pq} \;\wedge\; b^0 = 1 \;\wedge\; b^{-1} = \frac{1}{b}$$

$$\log_b(uv) = \log_b(u) + \log_b(v) \;\wedge\; \log_b(u^p) = p \cdot \log_b(u) \quad (\text{für } 0 < b \neq 1)$$

Zu beachten $\log_b(y) = x \overset{\exp_b}{\underset{\log_b}{\rightleftarrows}} b^x = y$ und $\log_{10} = \log = \lg$
$\log_2 = \mathrm{ld}$
$\log_e = \ln$

e) Binomische Formeln : $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \;\wedge\; (a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$
Faktorisierung : $ax^2 + bx + c = \frac{1}{4a} \cdot (2ax + b + \sqrt{b^2 - 4ac}) \cdot (2ax + b - \sqrt{b^2 - 4ac})$

1.1.2 Funktionen und Relationen

Betrachten Sie die folgende Tabelle

Person	Studiengang	Lektüre
von Chip (p_1)	Informatik (s_1)	C-Woche (ℓ_1), Spiegel (ℓ_2)
Stromer (p_2)	TEL (s_2)	BdE (ℓ_3), Focus (ℓ_4)
van Raff (p_3)	BWL (s_3)	W-Woche (ℓ_5)
Marx (p_4)	Philosophie (s_4)	Titanic (ℓ_6), Spiegel (ℓ_2)
Teufel (p_5)	Philosophie (s_4)	Weltbild (ℓ_7), Zeit (ℓ_8)

so werden Sie wahrscheinlich Beziehungen (Relationen!) zwischen den einzelnen Spalten herstellen, z.B.

R_1: „x studiert y" zwischen erster- und zweiter Spalte,

R_2: „x liest y" zwischen erster- und dritter Spalte,

R_3: „x-Studi liest y" zwischen zweiter- und dritter Spalte, etc.

Dabei werden formal Relationen zwischen den Mengen
$X = \{p_i \mid 5 \geq i \in \mathbb{N}^+\}$, $Y = \{s_i \mid 4 \geq i \in \mathbb{N}^+\}$, $Z = \{\ell_i \mid 8 \geq i \in \mathbb{N}^+\}$
beschrieben, die selbst wieder Mengen sind, z.B.
$R_1 = \{(p_1|s_1);(p_2|s_2);(p_3|s_3);(p_4|s_4);(p_5|s_5)\}$ etc. !

Statt einer solchen binären Relation wie R_1 hätte man auch die ternäre Relation aller erlaubten Tripel $\{(p_1|s_1|\ell_1),(p_1|s_1|\ell_2),\ldots\}$ angeben können.
Wir beschränken uns hier auf binäre Relationen ...

Def.:

- Sind X und Y nicht leere Mengen, so ist jede Teilmenge $R \subseteq X \times Y$ eine binäre Relation !
  $\mathbb{D}_R = \{x \in X \mid (\exists\, y \in Y \mid (x|y) \in R)\}$ heißt Definitionsmenge von R,
  $\mathbb{W}_R = \{y \in Y \mid (\exists\, x \in X \mid (x|y) \in R)\}$ heißt Wertemenge von R !

$\exists$ bedeutet: „Es existiert"

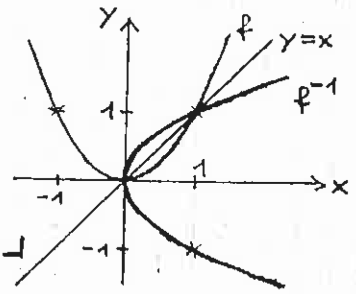
- Ist jedem „Input" $x \in \mathbb{D}_R$ genau ein „Output" $y \in \mathbb{W}_R$ zugeordnet, so spricht man bei R auch von einer Funktion f.
  In diesem Fall kennen Sie (aus der Schule !?) die Funktionsgleichung:

$$\underset{\substack{\text{abhängige Variable}\\ (\text{„Output"})}}{y} = \overbrace{f(\underset{\text{unabhängige Variable („Input")}}{x})}^{\text{Funktionsterm}}$$

- Zu jeder binären Relation R gibt es genau eine Umkehrrelation $R^{-1} = \{(x|y) \mid (y|x) \in R\}$.

Bem.: Ist f eine Funktion, dann ist f^{-1} eine Relation, die Umkehrrelation zu f. f^{-1} ist nicht notwendig auch eine Funktion.
Z.B.: $f(x) = x^2$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$, $f^{-1} = ?$

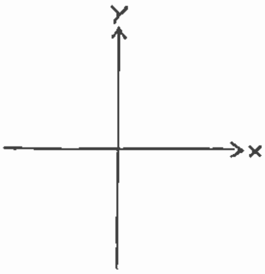
$\ulcorner$ $y = x^2$ | $x \leftrightarrow y$ (Spiegelung an $y = x$!)
$x = y^2$ | $\sqrt{}$
$|y| = \sqrt{x} \Leftrightarrow y = -\sqrt{x} \vee y = \sqrt{x}$
$f^{-1} = \underline{\underline{\{(x|y) \mid x \geq 0 \wedge (y = -\sqrt{x} \vee y = \sqrt{x})\}}}$
... offensichtlich keine Funktion ! $\lrcorner$



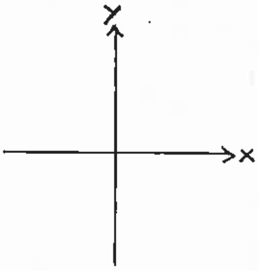
Übung : (VÜ zur Wdh. und Vertiefung)

Skizzieren Sie die durch die jeweilige Gleichung gegebene Relation R zusammen mit ihrer Umkehrrelation R^{-1} !
Ermitteln Sie die Schnittmenge $R \cap R^{-1}$ mindestens graphisch !

a) $x^2 + y^2 = 1$

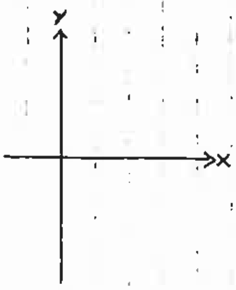


b) $y = |x|$

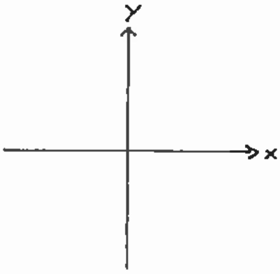


c) $y = e^x$

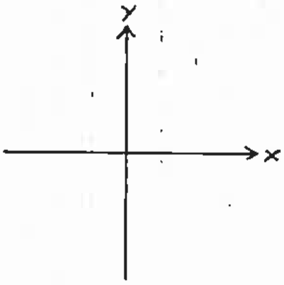
d) $y = e^{-x}$



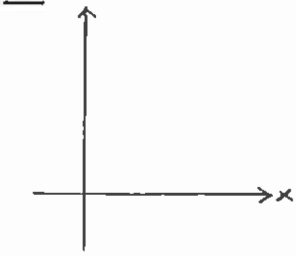
e) $y = \cos(x)$, $|x| \leq \pi$



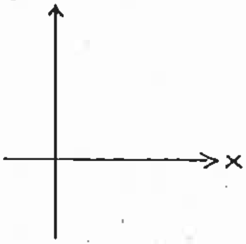
f) $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 2$



g) $y = \frac{3}{2} \cdot |x-2| - 1$



h) $y = 3 - (x-1)^2$



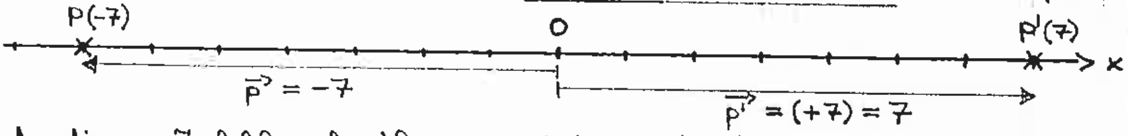
Aufgaben: A1 bis A6 dienen der Wiederholung , sind obligatorisch ! Es wird erwartet , dass Sie diese Aufgaben vollständig bis zur letzten Vorlesungswoche im Dezember des laufenden Semesters bearbeiten !

Hinweis zu A4 a) : Nehmen Sie an , dass $\sqrt{2} = \frac{z}{n}$ und vollständig gekürzt !
A4 b) : Fallunterscheidung , 1.F.: $R \in R$, 2.F.: $R \notin R$!
A6 f) : Polynomdivision oder Horner Schema !

1.2 Analytische Geometrie

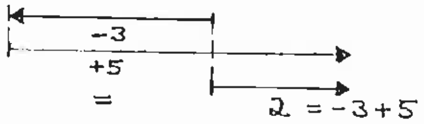
1.2.1 Punkte, Vektoren und Vektorraum (2. Woche)

Bekanntlich liefert die Zahlengerade eine anschauliche Beschreibung der Menge $\mathbb{R}$ aller reellen Zahlen. Tatsächlich kann man anhand dieses Modells jede reelle Zahl als Punkt P auf der Zahlengerade oder als Verschiebung des Ursprungs 0, genannt Ortsvektor $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ deuten, z. B.



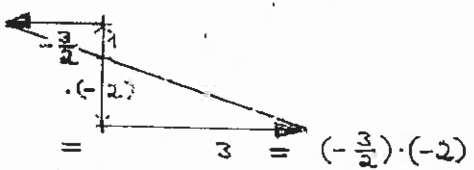
Jede dieser Zahlbeschreibungen ist eindeutig.
Die Grundrechenarten 1. und 2. Stufe werden aber am besten im Vektorbild veranschaulicht, z. B.

Addition $-3+5 = ?$



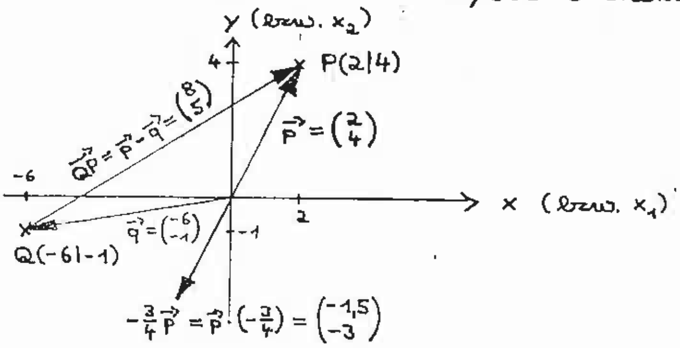
... entspricht einer Verkettung von Verschiebungen! Die Resultierende ist wieder eine Verschiebung!

Multiplikation $(-\frac{3}{2})\cdot(-2) = ?$

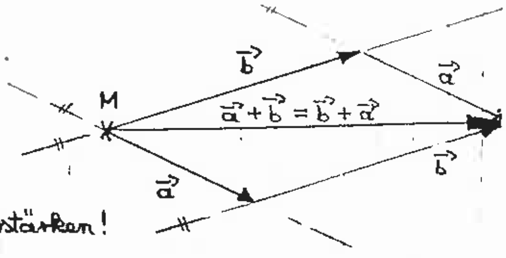


... entspricht einer (zentrischen) Streckung! Deshalb heißt das Produkt auch S-Produkt!

Im Alltag genügt es Ihnen in der Regel nicht, sich nur entlang einer Geraden zu bewegen (bzw. verschieben). Sie bewegen sich also nicht nur „in 1D", sondern „in 2D" oder gar „in 3D", und das nicht nur zur Urlaubszeit. Schon „in 2D" werden dabei die Unterschiede zwischen Punkt und Vektor, zwischen Skalar bzw. reeller Zahl und Vektor auch formal erkennbar.
Von der Schule her wissen Sie, dass Sie sich in der Ebene anhand eines kartesischen Koordinatensystems orientieren können, z. B.:



Anhand der üblichen Parallelogramm-Konstruktion der Summe von zwei Vektoren erkennen Sie schon die Kommutativität der Vektoraddition (→). Dabei müssen Sie nicht unbedingt an Verschiebungen denken. Hier könnte es sich auch um zwei Kräfte $\vec{a}, \vec{b}$ handeln, die zusammen im Massepunkt M angreifen, und sich zur Resultierenden $\vec{a}+\vec{b}$ verstärken!



Tatsächlich sind Kraft, Geschwindigkeit, Impuls, elektrische- und magnetische Feldstärke im Unterschied zu Ladung und Energie, die man auch skalare Größen nennt, vektorielle Größen, die erst durch Angabe von Betrag und Orientierung eindeutig gegeben sind.
Sie sehen schon an diesem Beispiel, dass man den Begriff Vektor allgemeiner benutzt, als es seinem eigentlichen Wortsinn (Verschiebung!) entspricht.
Auch Funktionen gleicher Definitionsmenge können zu neuen Funktionen addiert und gestreckt werden, und damit Vektoren sein.
Darum die folgende allgemeine ...

Definition : Eine Menge $\mathcal{V}$ mit einem Element $\vec{o}$, auf der eine Addition und eine Streckung um beliebige $r, s \in \mathbb{R}$ den folgenden Gesetzen genügt ...
($\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sind beliebige Elemente von $\mathcal{V}$)

(KgA) $\vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u} \in \mathcal{V} \quad \wedge \quad \vec{v}\cdot s = s\vec{v} \in \mathcal{V}$

(Ag) $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w}) \; (= \vec{u}+\vec{v}+\vec{w}) \quad \wedge \quad (\vec{v}\cdot r)\cdot s = \vec{v}\cdot(rs) \; (= \vec{v}\cdot rs)$

(Nv) $\vec{o}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{o} = \vec{v}$

(iE) $-\vec{v} := \vec{v}\cdot(-1)$ mit $\vec{o} = \vec{v}+(-\vec{v}) \; (= \vec{v}-\vec{v})$

(nS) $\vec{v}\cdot 1 = \vec{v}$

(Dg) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot s = (\vec{u}\cdot s)+(\vec{v}\cdot s) \; (= s\vec{u}+s\vec{v}) \quad \wedge \quad \vec{v}\cdot(r+s) = (\vec{v}\cdot r)+(\vec{v}\cdot s)$
$(= r\vec{v} + s\vec{v})$

... bildet zusammen mit + und · einen reellen Vektorraum $(\mathcal{V}, +, \cdot)$!
Dann sind die Elemente $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{V}$ Vektoren !

In diesem Zusammenhang werden Sie in der Literatur auf weitere Bezeichnungen treffen, die ich Ihnen an dieser Stelle kurz und (möglichst) schmerzlos „an den Kopf werfe" ...

Bezeichnungen :

a) $\vec{o}$ heißt Nullvektor, $-\vec{v}$ ist der Gegenvektor zu $\vec{v}$!

b) Wenn klar ist, welcher Art die Skalare r und s sind, so sagt man nur noch : $(\mathcal{V}, +, \cdot)$ ist ein Vektorraum
Sind $r, s \in \mathbb{Q}$: $\mathbb{Q}$ - Vektorraum
$\in \mathbb{R}$: $\mathbb{R}$ - Vektorraum
$\in \mathbb{C}$: $\mathbb{C}$ - Vektorraum !

c) Ist $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ und stets für alle $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{U}$ und $s \in \mathbb{R}$ auch $\vec{u} + s\vec{v} \in \mathcal{U}$, dann ist auch $(\mathcal{U}, +, \cdot)$ ein Vektorraum, genannt Teil- oder Unterraum (von $(\mathcal{V}, +, \cdot)$!) !

d) Jeder Term der Art $s_1\vec{u}_1 + s_2\vec{u}_2 + \cdots$ heißt Linearkombination der Vektoren $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots$!
Eine Menge von n $(\in \mathbb{N})$ Vektoren $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ heißt linear unabhängig genau dann, wenn

$$\sum_{i=1}^{n} s_i\vec{u}_i = \vec{o} \quad \Longrightarrow \quad s_i = 0 \quad (\text{für alle } i) \quad !$$

(d.h. für $\underset{!\ \text{alle}\ !}{\vec{u}_i \neq \vec{o}}$: Keiner der $\vec{u}_i$ ist als Linearkombination der anderen $\vec{u}_j$ darstellbar!)

e) Ist $\{\vec{u}_i \in \mathcal{V} \mid n \geq i \in \mathbb{N}^+\}$ linear unabhängig <u>und</u> lässt sich jeder Vektor $\vec{v} \in \mathcal{V}$ als Linearkombination (kurz Lk) der Vektoren $\vec{u}_i$ schreiben, dann können Sie zu Hause selbst nachprüfen, dass es dann zu jedem Vektor $\vec{v} \in \mathcal{V}$ jeweils genau eine Lk der $\vec{u}_i$ gibt.
In diesem Fall nennt man die Menge $\{\vec{u}_i \in \mathcal{V} \mid n \geq i \in \mathbb{N}^+\}$ auch Basis (des Vektorraums $(\mathcal{V},+,\cdot)$)!
Alle solche Basen eines Vektorraums haben gleich viele Elemente! Die Anzahl n nennt man Dimension des Vektorraums, kurz $\dim(\mathcal{V}) = n$!

Wenn Sie jetzt sich schon selbst jeden der genannten Begriffe veranschaulichen können: Herzlichen Glückwunsch!
Falls nicht, dann kommen die folgenden Beispiele hoffentlich noch rechtzeitig ...

<u>Beispiele</u> :

a) Die Menge $\mathbb{B} = \{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\}$ ist offenbar Teilmenge von

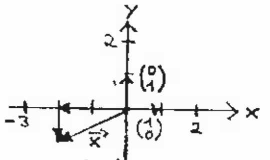
$$\mathcal{V} = \mathbb{R}^{2\times1} := \{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$$

Definiert man + und · schulüblich für alle $\vec{u} = \begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$ aus $\mathcal{V}$ und $s \in \mathbb{R}$ via

$$\vec{u} + \vec{v}\cdot s = \begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}\cdot s := \begin{pmatrix}u_1 + v_1 s\\u_2 + v_2 s\end{pmatrix} \quad , \quad \vec{o} := \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \in \mathcal{V} ,$$

so gelten tatsächlich die 6 genannten Vektorraumgesetze (zu Hause nachprüfen!).
Damit ist hier $(\mathcal{V},+,\cdot)$ ein ($\mathbb{R}$-) Vektorraum sowie jeder Vektor $\vec{x}$ aus $\mathcal{V}$ wegen

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot x + 0\cdot y\\0\cdot x + 1\cdot y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot x + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\cdot y$$



$(z.B.\ \vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot(-2) + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\cdot(-1)\ !)$

eine Lk der Vektoren aus $\mathbb{B}$.
Diese Lk ist offensichtlich eindeutig dem Vektor $\vec{x}$ zugeordnet, $\mathbb{B}$ eine Basis, $\dim(\mathcal{V}) = 2$! $\mathcal{V}$ ist 2D !

Ist $\mathcal{C} = \{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\}$ auch eine Basis von $(\mathbb{R}^{2\times1},+,\cdot)$?

b) Definiert man für $s \in \mathbb{R}$ und für Funktionen f, g mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{D}_g = \mathbb{R} \wedge \mathbb{W}_f \subseteq \mathbb{R} \supseteq \mathbb{W}_g$ (reelle Funktionen)

$$(f + g\cdot s)(x) := f(x) + s\cdot g(x)$$

dann ist auch $f + g\cdot s$ eine reelle Funktion!
Man kann sogar einfach, aber länglich, zeigen, dass
$(\{f \mid f \text{ ist Funktion mit } \mathbb{D}_f = \mathbb{R} \wedge \mathbb{W}_f \subseteq \mathbb{R}\}, +, \cdot)$
ein (nicht endlich dimensionaler) Vektorraum ist!
$\{\cos; \sin\}$, $\{\exp; 1/\exp\}$ sind Basen von Unterräumen (VÜ!) !

c) Der „kleinste" Vektorraum ist der Nullraum $(\{\vec{o}\},+,\cdot)$.
Da $\{\vec{o}\}$ nicht linear unabhängig ist, kann hierfür auch keine Basis gefunden werden;
Dieser Vektorraum hat per Konvention die Dimension 0 !

d) Ist $(\mathcal{V},+,\cdot)$ ein n-dimensionaler Vektorraum, dann hat bekanntlich jede Basis $\mathcal{B}=\{\vec{b}_i \mid n \geq i \in \mathbb{N}^+\}$ genau n Elemente, so dass es für jeden Vektor $\vec{x} \in \mathcal{V}$ genau einen Satz von Zahlen x_i gibt mit $\vec{x}=\sum_{i=1}^{n} \vec{b}_i \cdot x_i$!

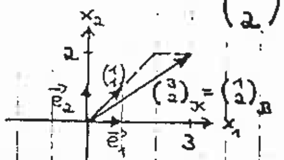
x_i heißt dann auch i-te Koordinate von $\vec{x}$ relativ zur Basis $\mathcal{B}$. Offenbar ist die Größe der Koordinaten abhängig von der vorher gewählten Basis.

Z.B. ist für $n \in \mathbb{N}$ die Menge $\mathbb{R}^{n\times 1} := \left\{ \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} \middle| \, r_i \in \mathbb{R} \right\}$
mit $\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} \cdot s := \begin{pmatrix} r_1+st_1 \\ r_2+st_2 \\ \vdots \\ r_n+st_n \end{pmatrix}$ ein Vektorraum (Verallg. v. a)!).

Offensichtlich ist dabei die Menge der <u>kanonischen Einheitsvektoren</u> $\vec{e}_i$ mit Nullen in allen Zeilen außer der i-ten Zeile, dort steht eine Eins, eine Basis von $(\mathbb{R}^{n\times 1},+,\cdot)$, also $\dim(\mathbb{R}^{n\times 1})=n$.
Relativ zu dieser kanonischen Basis erhält man die Koordinaten eines beliebigen Vektors $\vec{x}$ sehr einfach:

$$\vec{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot x_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot x_2 + \cdots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot x_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{e}_i \cdot x_i .$$

So gesehen könnte man in b) einfach cos durch $\binom{1}{0}=\vec{e}_1$ und sin durch $\vec{e}_2=\binom{0}{1}$ darstellen!
Da machen Sie natürlich in der Praxis nicht mit !?
Tatsächlich ist es aber so, dass man prinzipiell jeden Vektorraum mit abzählbarer Basis einheitlich durch die Menge der zugehörigen Koordinatentupel darstellen kann, z. B.



$\binom{3}{2} = \binom{1}{0} \cdot 3 + \binom{0}{1} \cdot 2$ mit den (kartesischen) Koordinaten $x_1=3$ und $x_2=2$ relativ zur kanonischen Basis $\mathcal{K}=\{\vec{e}_1;\vec{e}_2\}$.

$= \binom{1}{0} \cdot 1 + \binom{1}{1} \cdot 2$ mit den Koordinaten $x_1'=1$ und $x_2'=2$ relativ zur Basis $\mathcal{B}=\{\binom{1}{0};\binom{1}{1}\}$.

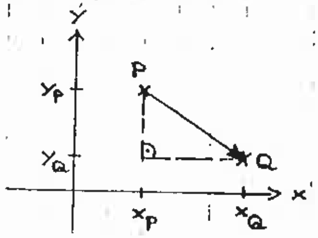
Damit ist hier $\binom{3}{2}=\binom{3}{2}_{\mathcal{K}}=\binom{1}{2}_{\mathcal{B}}$!

Wie man aus den Koordinaten relativ zu einen Basis (z.B. $\mathcal{K}$) die Koordinaten relativ zu einer anderen Basis (z.B. $\mathcal{B}$) erhält, lernen Sie im Abschnitt 1.3.4 unter dem Stichwort „Basistransformation" !

e) Technisch wichtig zur Modellierung von diversen Phänomenen sind die Menge $\mathbb{R}[x]$ aller Polynome mit reellen Koeffizienten
(z. B.: $3x^3+3x^2-5x-1$ mit den Basis-Monomen $x^0=1; x; x^2; x^3$
und den zugehörigen Koordinaten bzw. Koeffizienten
(auch eindeutig!) $-1; -5; 3; 3$!)
und die Menge $\left\{ \sum_{i=0}^{n} (c_i \cdot \cos(ix) + s_i \cdot \sin(ix)) \mid n \in \mathbb{N} \wedge \binom{c_i}{s_i} \in \mathbb{R}^{2\times 1} \right\}$
aller trigonometrischen Polynome (Fourieranalyse in Signaltheorie) !

Beide Mengen bilden zusammen mit den üblichen Operationen + und · je einen Vektorraum mit abzählbar unendlicher Basis.
Dabei dient der Vektorraum trigonometrischer Polynome der Beschreibung aller periodischen Vorgänge, die in der Elektrotechnik häufig auftreten!

Ich hatte auf Seite 7 den Begriff vektorielle Größe durch Betrag und Orientierung charakterisiert.
Betrag ist in der allgemeinen Vektor-Interpretation genauer als Länge, oder können Sie sich eine „lange" Kraft wirklich zumuten?
Wir beleuchten beide Begriffe im zweidimensionalen Fall, da sich in anderen abzählbaren Dimensionen grundsätzlich nichts ändert!
Bekanntlich ist der Betrag einer reellen Zahl anschaulich lediglich ihr „Abstand" vom Ursprung der Zahlengerade, sofern man reelle Zahlen als Punkte der Zahlengerade interpretiert.
Im Ortsvektorbild ist demnach der Betrag einer reellen Zahl die (Euklidische) „Länge" des zugehörigen Ortsvektors.
Formal gilt für den Betrag irgendeiner reellen Zahl x : $|x|=\sqrt{x^2}$.
Im $\mathbb{R}^{2\times 1}$ gilt der Satz von Pythagoras (nebenbei allerdings wohl altbabylonischen Ursprungs) und damit für den Euklidischen Betrag eines Vektors $\overrightarrow{PQ}$:



$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(x_Q-x_P)^2+(y_Q-y_P)^2} = |\vec{q}-\vec{p}| ,$$

und für irgendeinen Vektor $\vec{v}=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ einfach

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2+v_2^2} = \sqrt{|v_1|^2+|v_2|^2} = (|v_1|^2+|v_2|^2)^{1/2}$$

Wie würden Sie den (Euklidischen) Betrag von $\vec{v}\in\mathbb{R}^{n\times 1}$ definieren?

$|\vec{v}| :=$

Nun können Sie stets für $\vec{v} \neq \vec{o}$ den Betrag $|\vec{v}|$ ausklammern:

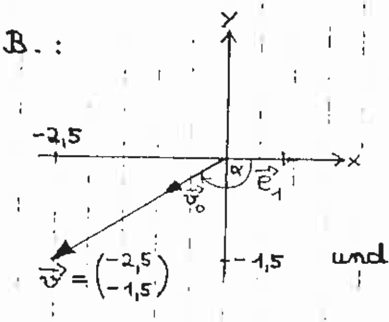
$$\vec{v} = (\vec{v}\cdot|\vec{v}|^{-1})\cdot|\vec{v}| = \vec{v}_0\cdot|\vec{v}|$$

mit dem Betrag $|\vec{v}|$ und der Orientierung $\vec{v}_0 = \vec{v}\cdot|\vec{v}|^{-1}$ $(|\vec{v}_0|=1\,!)$!

Solche Vektoren vom Betrag 1 wie $\vec{v}_0$ nennt man auch Einheitsvektoren!

Die zuletzt genannte Faktorisierung nutzt man im 2D-Fall zu einer alternativen Beschreibung aller vom Nullvektor verschiedenen Vektoren.
Neben kartesischen Koordinaten (relativ zu $\{\vec{e}_1;\vec{e}_2\}$) kennt man auch (ebene) Polarkoordinaten: Betrag und Winkel des Vektors zu $\vec{e}_1$!

Z.B.:



$$\vec{v}=\begin{pmatrix} -2{,}5 \\ -1{,}5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2{,}5/\sqrt{8{,}5} \\ -1{,}5/\sqrt{8{,}5} \end{pmatrix}\cdot\sqrt{8{,}5} \text{ mit } \vec{v}_0=\begin{pmatrix} -2{,}5/\sqrt{8{,}5} \\ -1{,}5/\sqrt{8{,}5} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix},$$

kartesische Koordinaten: $-2{,}5\,;\,-1{,}5$
Polarkoordinaten: $|\vec{v}|=\sqrt{34}/2\,;\ \alpha=-\arccos(-5/\sqrt{34})$

und allgemein: $$\boxed{\vec{v}=\begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}\cdot|\vec{v}| \text{ mit } \alpha=\begin{cases} -\arccos(v_1/|\vec{v}|), & v_2<0 \\ +\arccos(v_1/|\vec{v}|), & v_2\geq 0 \end{cases}}$$

$(-\pi<\alpha\leq\pi\ ;\ |\vec{v}|>0)$

1.2.2 Geometrie im Vektorraum (3. Woche)

Eventuell haben Sie sich zuletzt gesagt: Schön, man kann also Mengen manchmal mit einer Addition und einem S-Produkt zu Vektorräumen machen, und damit rechnen. Um aber den Abstand zwischen zwei Punkten zu berechnen (ein Aspekt analytischer Geometrie) benötigt man aber den ganzen Aufwand nicht!
Dem möchte ich fragend entgegnen („chinesische Lehrmethode"):

a) In der Schule haben Sie Gleichungen für ganzrationale Funktionen (dabei sind die Funktionsterme Polynome!) aus diversen Eigenschaften bestimmt, z.B. (aus Zinser: >Analysis 11<, S.216)
„Der Graph einer ganzrationalen Funktion 4. Grades ist symmetrisch zur y-Achse und hat in A(2|0) eine Wendetangente mit der Steigung $-\frac{4}{3}$. Wie lautet der zugehörige Funktionsterm?".
Wie konnten Sie sicher sein, solche meist eindeutig zu erhalten?

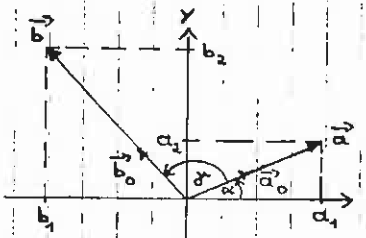
b) Sie haben in der Schule Winkel zwischen Vektoren alleine aus den kartesischen Koordinaten derselben bestimmt:
Warum geht das so einfach?

c) Wie beschreiben Sie vorsorglich periodische Vorgänge?
(⟶ in ihrer Zukunft: Fourieranalyse in der Signaltheorie!)

Sie erinnern die Überschrift „1.2 Analytische Geometrie". Praktisch bedeutet dies, geometrische Eigenschaften wie Abstände, Winkel, Flächen- und Volumeninhalte möglichst einfach aus wenigen Informationen, hier konkret: Koordinaten weniger Eckpunkte oder Vektoren, zu berechnen!

In diesem Abschnitt werden Sie die Mittel dazu (wieder) erhalten:
Skalarprodukt, Vektorprodukt, Determinante und Spatprodukt!

Wir beschränken uns dabei zunächst auf den 2D-Fall.
Unser Ziel ist es nun, aus den kartesischen Koordinaten von zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ möglichst einfach Informationen über den Winkel zwischen beiden Vektoren zu erhalten.



$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \vec{a}_0 \cdot |\vec{a}|$ mit $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ und $\vec{a}_0 = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$

und analog: $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\beta) \\ \sin(\beta) \end{pmatrix} \cdot |\vec{b}|$.

Dabei gilt lt. Skizze $\beta = \alpha + \gamma$ $(\gamma = ?)$
und es gelten die Additionstheoreme:
(Eigenschaften im Vektorraum!)

$$\begin{aligned} \cos(\beta) &= \boxed{\cos(\alpha+\gamma) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\gamma) - \sin(\alpha)\cdot\sin(\gamma)} \quad \wedge \\ \sin(\beta) &= \boxed{\sin(\alpha+\gamma) = \sin(\alpha)\cdot\cos(\gamma) + \cos(\alpha)\cdot\sin(\gamma)} \end{aligned}$$

Das ist letztlich ein LGS für die Unbekannten $\cos(\gamma)$, $\sin(\gamma)$.
Skrupellose Auflösung (sollte Standard sein!) ergibt (Übung!):

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(\gamma) &= \cos(\beta-\alpha) = \cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta) \overset{!}{=} \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} \\ \sin(\gamma) &= \sin(\beta-\alpha) = -\sin(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta) - \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) \overset{!}{=} \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} \end{aligned}} \quad \wedge$$

... und unser Ziel ist (in 2D) erreicht!

Stellt man nämlich beide Gleichungen nach den Zählern um, so erhält man geometrisch interpretierbare „Produkte" ...

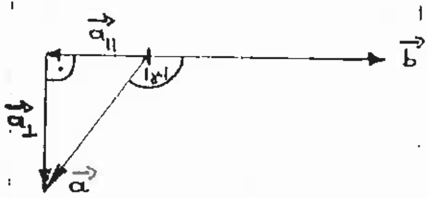
... das (Euklidische) Skalarprodukt bzw. innere Produkt $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\gamma)$

... die Determinante bzw. „Vektorprodukt" $\det(\vec{a}\vec{b}) = a_1b_2 - a_2b_1 = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(\gamma)$

Dem Skalarprodukt entnimmt man neben dem Betrag $|\gamma|$ des Winkels zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

$$|\gamma| = \arccos\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}\right) \in [0;\pi]$$

auch eine direkte Möglichkeit, den Vektor $\vec{a}$ in einen Anteil $\vec{a}_{\parallel}$ bzw. $\vec{a}_p$ parallel zum Vektor $\vec{b}$ und einen Anteil $\vec{a}_{\perp}$ bzw. $\vec{a}_s$ orthogonal bzw. senkrecht zu $\vec{b}$ zu zerlegen :

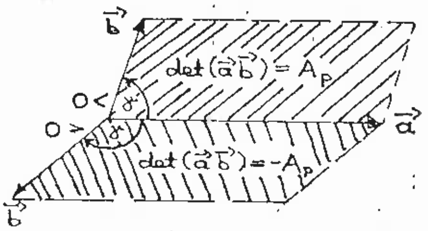


$$\vec{a}_{\parallel} = \vec{b}_0\cdot|\vec{a}|\cdot\cos(|\gamma|) \overset{!}{=} \vec{b}\cdot\frac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{\vec{b}\cdot\vec{b}}$$

$$\vec{a}_{\perp} = \vec{a} - \vec{a}_{\parallel}$$

(Orthogonale Zerlegung von $\vec{a}$ relativ zu $\vec{b}$!)

Der Determinante entnimmt man den mit einem Vorzeichen versehenen Flächeninhalt A_p des durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms



Sind für $|\gamma| \leq \pi$

$\vec{a}, \vec{b}$ im Gegenuhrzeigersinn angeordnet, ($\gamma \in [0;\pi]$)

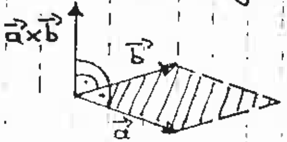
dann ist $A_p = +\det(\vec{a}\vec{b}) = a_1b_2 - a_2b_1$,

sonst, also für $\gamma \in]-\pi;0[$ gilt : $A_p = -\det(\vec{a}\vec{b}) \overset{!}{=} \det(\vec{b}\vec{a})$

(Falls Sie das nicht verstanden haben, überlegen Sie, wie der Flächeninhalt des jeweils schraffierten Parallelogramms zu berechnen ist!

Der Name „Vektorprodukt" erinnert an die Vorstellung eines Vektors der in rechtshändigem Sinn orthogonal zu den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ steht. Die Realisierung dieser Vorstellung ist nur in 3D möglich :

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$



$\vec{a} \mathrel{\hat{=}}$ Daumen der rechten Hand
$\vec{b} \mathrel{\hat{=}}$ Zeigefinger der rechten Hand
$\vec{a}\times\vec{b} \mathrel{\hat{=}}$ Mittelfinger der rechten Hand

Das Vektorprodukt wird so zu einem Produkt von Vektoren in $\mathbb{R}^{3\times 1}$ und soll einen gemäß der Rechte Hand Regel orientierten Flächeninhalt des durch die beiden Faktorvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms beschreiben.
Dieser Überlegung entspricht allgemein in $\mathbb{R}^{3\times 1}$ das Vektorprodukt

$$\boxed{\vec{a}\times\vec{b} := \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}}$$!

Zurück zum Skalarprodukt im $\mathbb{R}^{2\times 1}$. Sie können leicht zu Hause selbst nachprüfen, dass das Skalarprodukt den folgenden geometrischen Forderungen für alle $\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in\mathbb{R}^{2\times 1}$ und alle $s\in\mathbb{R}$ genügt :

- ▶ $\vec{u}\cdot\vec{u} = |\vec{u}|^2$ (positiv definit)
- ▶ $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u}\perp\vec{v} \vee \vec{u}=\vec{o} \vee \vec{v}=\vec{o}$ (Orthogonalität)
- ▶ $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$ (Symmetrie)
- ▶ $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}\cdot s) = (\vec{u}\cdot\vec{v})+(\vec{u}\cdot\vec{w})\cdot s$ (Rechtslinearität)

Fordert man dies allgemein im Vektorraum $(\mathbb{R}^{n\times 1},+,\cdot)$ zusammen mit der kartesischen Selbstverständlichkeit

$$\vec{e}_i\cdot\vec{e}_k = \underset{\text{Kronecker-Symbol}}{\delta_{ik}} := \begin{cases} 0 & \text{für } i\neq k \\ 1 & \text{für } i=k \end{cases},$$

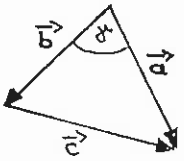
dann wird der Vektorraum zum Euklidischen Vektorraum $(\mathbb{R}^{n\times 1},+,\cdot,\bullet)$

mit $\vec{u}\bullet\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i\cdot v_i = u_1v_1+u_2v_2+\cdots+u_nv_n$!

Insbesondere in $\mathbb{R}^{3\times 1}$ erhält man wieder

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\gamma) \quad !$$

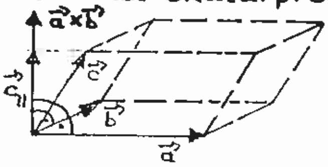
Dabei ist die zweite Gleichung Essenz des Kosinussatzes, der Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras auf beliebige Dreiecke :



$$\boxed{|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\gamma)}$$

$$(\vec{c}=\vec{a}-\vec{b},\quad \gamma\in[0;\pi]).$$

Was kommt nun heraus, wenn man Vektorprodukt und Skalarprodukt kombiniert ?



⌜ $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}_{\parallel}+\vec{c}_{\perp}) = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}_{\parallel}$

$$= \begin{cases} +V_{Spat}, & \text{falls } \vec{a},\vec{b},\vec{c} \text{ Rechtssystem} \\ -V_{Spat}, & \text{falls } \vec{a},\vec{b},\vec{c} \text{ Linkssystem} \end{cases}$$ ⌟

Deswegen nennt man $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ auch Spatprodukt, da $\vec{a},\vec{b}$ und $\vec{c}$ eventuell einen „schiefen Quader", Spat genannt, aufspannen !
Für den Volumeninhalt des durch $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ aufgespannten Spates gilt also stets : $V_{Spat} = |(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|$

Dabei kann man in Anlehnung an den 2D-Fall statt Spatprodukt auch Determinante sagen.
Es gilt insgesamt die folgenden gleichbedeutenden Schreibweisen fürs Spatprodukt :

$$[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}] = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \det(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}).$$

Im „Rießinger" finden Sie, S.79: $[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}] = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$!

Übung : Bestätigen Sie durch Ausmultiplikation : $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$!

Beispiele : (VÜ)

a) Die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind offenbar paarweise orthogonal : $\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{a} \bullet \vec{c} = \vec{b} \bullet \vec{c} = 0$; und haben alle den Betrag $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = (\vec{c} \bullet \vec{c})^{1/2} = 1$.

Damit ist $\{\vec{a} ; \vec{b} ; \vec{c}\}$ eine <u>O</u>rtho<u>N</u>ormal<u>B</u>asis von $(\mathbb{R}^{3\times 1}, +, \cdot, \bullet)$.

Außerdem folgt

$$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{c} = [\underset{\substack{\cos(\alpha) \\ \sin(\alpha)}}{\begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix}} \times \underset{\substack{-\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha)}}{\begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix}}] \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{1}}$$

$$> 0$$

Damit ist $\{\vec{a} ; \vec{b} ; \vec{c}\}$ auch ein orthogonales Rechtssystem
(sogar ein orthonormales Rechtssystem !)

Wegen

$$|(\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{c}\,| = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot |\cos(|\sphericalangle(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c})|)|$$
$$= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(|\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})|) \cdot |\vec{c}| \cdot |\cos(|\sphericalangle(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c})|)|$$

ist <u>mit</u> $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$ und
$|(\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{c}\,| = 1$ bereits klar, dass

$$\sin(|\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})|) = 1 \quad \wedge \quad |\cos(|\sphericalangle(\vec{a} \times \vec{b}), \vec{c})|)| = 1 \quad \wedge \; |\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{b} \quad \wedge \quad \vec{c} \parallel \vec{a} \times \vec{b} \quad \wedge \quad |\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \{\vec{a} ; \vec{b} ; \vec{c}\} \text{ ist ONB !}$$

<u>b)</u> Ist $\{\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} ; \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}\}$ linear unabhängig ?

Wenn ja, wie groß ist der Volumeninhalt des durch $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Vierflachs ?

$$\ulcorner \; (\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{c} = [\underset{\substack{2 \\ -1}}{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}} \times \underset{\substack{2 \\ 2}}{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}] \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = -1 + 24 - 18 = 5 \neq 0$$

$\Rightarrow$ $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ spannen einen Vierflächner auf
$\Rightarrow$ $\{\vec{a} ; \vec{b} ; \vec{c}\}$ ist linear unabhängig !

$$\Rightarrow \quad V_4 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}_{\parallel}| \overset{!}{=} \frac{1}{6} \cdot |(\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{c}\,| = \underline{\underline{\frac{5}{6}}} \text{ VE} \quad ! \quad \lrcorner$$

<u>c)</u> Können Sie die drei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ in eine Ebene legen ?
Berechnen Sie den (kleinen) Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sowie den Winkel zwischen $\vec{c}$ und der durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Dreiecksfläche !

$$\ulcorner \; (\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{c} = [\underset{\substack{3 \\ 1}}{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \times \underset{\substack{4 \\ 1}}{\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}] \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = -1 \Rightarrow \text{Nein !}$$

$$|\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})| = \arccos\left(\frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right) = \arccos\left(\frac{3 \cdot 4 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{18}}\right) = \arccos\left(\frac{13}{6\sqrt{5}}\right)$$
$$\approx 14{,}31° \quad \text{und}$$

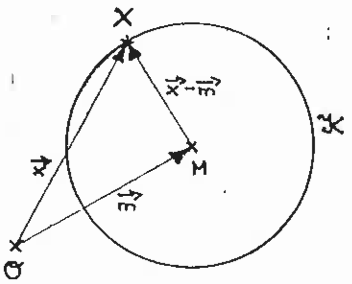
$$90° - \arccos\left(\frac{|(\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{c}|}{|\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}|}\right) = 90° - \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{5}}\right) \approx \underline{\underline{7{,}75°}} \quad \lrcorner$$

<u>Aufgaben</u> : A7 bis A9 + A11 und A12 nach 1.2.1 !
A10 + A13 bis A18 nach 1.2.2 !

1.2.3 Anwendungen (4. Woche)

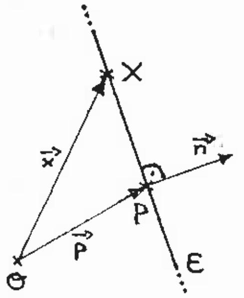
In diesem Abschnitt beschränke ich mich auf den Punktraum $\mathbb{R}^3$, genauer $\mathbb{R}^{1\times3}$. Hier geht es um eine möglichst einfache Beschreibung elementarer geometrischer Gebilde: Kugel, Ebene, Gerade, und damit zusammenhängender geometrischer Eigenschaften: Winkel und Abstände, Gerade als Schnittmenge zweier Ebenen.
Sie werden sehen, wie man das sehr leicht mithilfe der Wissensbasis des vorhergehenden Abschnitts 1.2.2, mithilfe geeigneter Vektoren des $\mathbb{R}^{3\times1}$ erreicht!
Außerdem werden Sie sehen, wie man irgendeine Kreisbahn in 3D, z.B. einer mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegten elektrischen Ladung q in einem homogenen Magnetfeld der Flussdichte $\vec{B}$ infolge der Lorentzkraft $\vec{F} = \vec{v} \times \vec{B} \cdot q$ (Sie erinnern die Linke Hand Regel für Elektronen ($q=-e_0<0\,C$)?), mithilfe unserer bisherigen Erkenntnisse vektoriell darstellen kann! Schließlich werde ich Ihnen eine sehr einfache Möglichkeit präsentieren, eindeutig lösbare LGS mit 3 Unbekannten mithilfe von vier Spatprodukten zu lösen!

Kugel (-Sphäre)



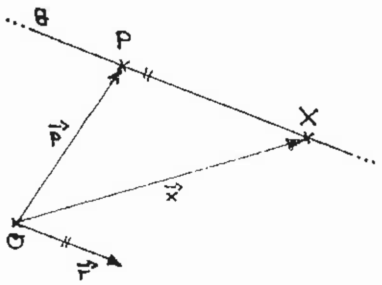
$|\vec{x}-\vec{m}| = r$
ist eine Gleichung
für eine Kugel $\mathcal{K}$
mit Mittelpunkt M
und Radius r.

Ebene



$\vec{n}\cdot(\vec{x}-\vec{p}) = 0$
ist eine Gleichung
für eine Ebene E
in Normalenform
mit Normalenvektor $\vec{n}$
und Stützvektor $\vec{p}$

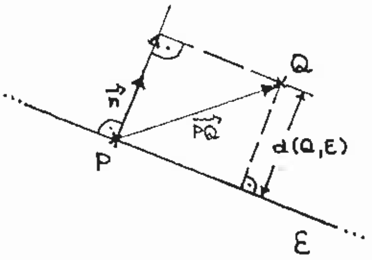
Gerade



... mit den Gleichungen
in Parameterform
g: $\vec{x} = \vec{p} + \vec{r}\cdot s$; $s \in \mathbb{R}$
in Plückerform
g: $\underset{\text{Richtungsvektor}}{\vec{r}} \times (\vec{x}-\underset{\text{Stützvektor}}{\vec{p}}) = \vec{0}$

... sind Ihnen vermutlich schon (bis auf die Plückerform) aus der Schule bekannt. Die Plückerform für g ähnelt der Normalenform der Ebene E. Beide eignen sich hervorragend zur Schnittmengenbildung und zur Abstandsbestimmung. Zum Vergleich:

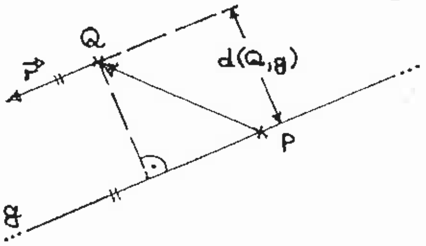
Abstand Punkt - Ebene



$$d(Q,E) = |\overrightarrow{PQ}_{\parallel}| = \frac{|\vec{n}\cdot(\vec{q}-\vec{p})|}{|\vec{n}|}$$

($\overrightarrow{PQ}_{\parallel}$ relativ zu $\vec{n}$)

Abstand Punkt - Gerade



$$d(Q,g) = \frac{|\vec{r}\times(\vec{q}-\vec{p})|}{|\vec{r}|}$$

(Höhe „über $\vec{r}$")

Verläuft nun eine Gerade parallel zu einer Ebene, notwendig dafür ist die Orthogonalität von Geradenrichtungs- und Ebenennormalenvektor, dann hat jeder Punkt der Gerade den gleichen Abstand zur Ebene. Sind zwei Geraden parallel, notwendig dafür ist die Kollinearität beider Richtungsvektoren (Vektorprodukt $= \vec{o}$), so haben alle Punkte der einen Gerade den gleichen Abstand von der anderen Gerade. In diesen Fällen bedeuten die beiden vorhin genannten Abstände (-15-) gleichzeitig die Abstände zwischen Ebene und Gerade bzw. Gerade und Gerade!

Den in der Schule so umständlich berechneten Abstand zwischen windschiefen Geraden (nicht parallel und ohne gemeinsamen Punkt) erhält man nun einfach über die Vorstellung eines Spates, dessen Grundfläche durch die beiden Richtungsvektoren ($\vec{a}$ und $\vec{b}$) aufgespannt wird, $\vec{c}$ ist dann die Differenz beider Stützvektoren. In diesem Spatbild ist der (kürzeste) Abstand beider Geraden einfach die Höhe über der Grundfläche der Richtungsvektoren!

Zwei Ebenen $E_1 : \vec{n}_1 \cdot (\vec{x} - \vec{p}_1) = 0$ und $E_2 : \vec{n}_2 \cdot (\vec{x} - \vec{p}_2) = 0$ sind parallel, wenn beide Normalenvektoren kollinear sind und beide Ebenen keinen gemeinsamen Punkt haben, kurz:

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \vec{o} \quad \wedge \quad E_1 \cap E_2 = \emptyset \ .$$

Falls $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \neq \vec{o}$, dann ist $E_1 \cap E_2 = g$; also eine Gerade. Eine einfache Planskizze zeigt sofort, dass $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ zum Richtungsvektor $\vec{r}$ der Schnittgerade g gewählt werden kann. Damit benötigen Sie nur noch einen gemeinsamen Punkt P der Ebenen E_1 und E_2. Durch geeignete Wahl einer Koordinate (z. B. Null) ist solch ein Punkt P bzw. der zugehörige Stützvektor $\vec{p}$ sicher leicht zu bekommen. Darum ist die folgende vollständige Schnittgeradenformel eher nur etwas für die Galerie:

$$\boxed{\begin{aligned} &E_1 \cap E_2 = g : \quad \vec{x} = \vec{p} + \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \cdot s \quad \wedge \quad s \in \mathbb{R} \quad \text{mit} \\ &\qquad\qquad \vec{p} = \vec{p}_1 + (\vec{n}_1 \times (\vec{n}_1 \times \vec{n}_2)) \cdot \frac{(\vec{p}_2 - \vec{p}_1) \cdot \vec{n}_2}{(\vec{n}_1 \times (\vec{n}_1 \times \vec{n}_2)) \cdot \vec{n}_2} \end{aligned}}$$

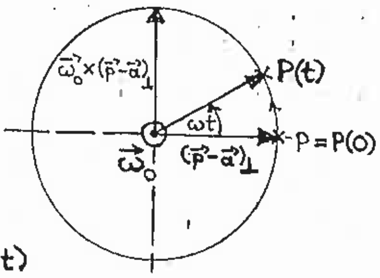
natürlich nur für $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \neq \vec{o}$!

Möglicherweise kennen Sie von der Schule her Formeln für die Schnittwinkel
$\sigma(E_1, E_2)$ zwischen sich schneidenden Ebenen,
$\sigma(E, g)$ zwischen E und g im Schnittfall,
$\sigma(g_1, g_2)$ zwischen sich schneidenden Geraden.
Anhand einfacher Planskizzen machen Sie sich klar:

$$\sigma(E_1, E_2) = \arccos\left(\frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}\right) \quad \wedge \quad \sigma(E, g) = 90^\circ - \arccos\left(\frac{|\vec{n} \cdot \vec{r}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{r}|}\right)$$

$$\wedge \quad \sigma(g_1, g_2) = \arccos\left(\frac{|\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2|}{|\vec{r}_1| \cdot |\vec{r}_2|}\right) \quad !$$

Nun stellen Sie sich bitte eine elektrische Punktladung vor, die sich auf einer Kreisbahn im 3 dimensionalen Raum bewegt. Unterstellt man eine gleichförmige Kreisbewegung mit konstanter Kreisfrequenz $\omega > 0 \, s^{-1}$, so kann man sich vorstellen, dass die Punktladung um eine Gerade $g : \vec{\omega}_0 \times (\vec{x} - \vec{a}) = \vec{o}$ rotiert. Dabei ist der Einheitsvektor $\vec{\omega}_0$ so gewählt, dass er den gestreckten Daumen der rechten Faust symbolisiert und die gekrümmten Finger der rechten Hand die Drehrichtung wiedergeben. Deswegen nennen wir $\vec{\omega}_0$ auch Orientierung dieser Drehbewegung : $\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 \cdot \omega$ heißt Winkelgeschwindigkeit .



Ist $\vec{p}$ der Ortsvektor der Punktladung zum Zeitpunkt $t = 0\,s$, so erhält man letztlich nebenstehendes Bild der Drehbewegung. Gemäß elementarer Trigonometrie erhält man für den Ortsvektor $\vec{p}(t)$ der Punktladung :

$$(\vec{p}(t)-\vec{a})_\perp = (\vec{p}-\vec{a})_\perp \cdot \cos(\omega t) + \vec{\omega}_0 \times (\vec{p}-\vec{a})_\perp \cdot \sin(\omega t)$$

(dabei ist „$\perp$" relativ zu $\vec{\omega}_0$ (zeigt heraus ⊙) gemeint).
Dabei ist zu beachten : $\vec{\omega}_0 \times (\vec{p}-\vec{a})_\perp = \vec{\omega}_0 \times (\vec{p}-\vec{a}-(\vec{p}-\vec{a})_\parallel) = \vec{\omega}_0 \times (\vec{p}-\vec{a})$,
$|\vec{\omega}_0 \times (\vec{p}-\vec{a})_\perp| = |\vec{\omega}_0| \cdot |(\vec{p}-\vec{a})_\perp| = |(\vec{p}-\vec{a})_\perp|$
ist der Radius der Kreisbahn , und
$(\vec{p}(t)-\vec{a})_\perp = \vec{p}(t)-\vec{a} - (\vec{p}(t)-\vec{a})_\parallel = \vec{p}(t)-\vec{a}-(\vec{p}-\vec{a})_\parallel$ sowie
$(\vec{p}-\vec{a})_\parallel = \vec{\omega}_0 \cdot (\vec{\omega}_0 \bullet (\vec{p}-\vec{a}))$. Damit erhalten wir insgesamt für den Ortsvektor $\vec{p}(t)$ der Punktladung zu irgendeinem Zeitpunkt t bei Drehung um g : $\vec{\omega}_0 \times (\vec{x}-\vec{a}) = \vec{o}$ mit $\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 \cdot \omega$:

$$\boxed{\begin{aligned} &\vec{p}(t) = \vec{a} + (\vec{p}-\vec{a})_\parallel + (\vec{p}-\vec{a})_\perp \cdot \cos(\omega t) + \vec{\omega}_0 \times (\vec{p}-\vec{a}) \cdot \sin(\omega t) \\ &\text{mit } (\vec{p}-\vec{a})_\parallel = \vec{\omega}_0 \cdot (\vec{\omega}_0 \bullet (\vec{p}-\vec{a})) \text{ und} \\ &\phantom{\text{mit }} (\vec{p}-\vec{a})_\perp = \vec{p}-\vec{a} - (\vec{p}-\vec{a})_\parallel \overset{!}{=} -\vec{\omega}_0 \times (\vec{\omega}_0 \times (\vec{p}-\vec{a})) \end{aligned}}$$!

Schließlich noch zu etwas völlig anderem ! Gegeben ist das LGS

$$\begin{aligned} 3x_1 - 3x_2 - x_3 &= -16 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &= 12 \\ 5x_1 - 2x_2 - 3x_3 &= -7 \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \underbrace{\begin{pmatrix}3\\3\\5\end{pmatrix}}_{\vec{a}} \cdot x_1 + \underbrace{\begin{pmatrix}-3\\1\\-2\end{pmatrix}}_{\vec{b}} \cdot x_2 + \underbrace{\begin{pmatrix}-1\\-1\\-3\end{pmatrix}}_{\vec{c}} \cdot x_3 = \underbrace{\begin{pmatrix}-16\\12\\-7\end{pmatrix}}_{\vec{d}}$$

$$\vec{a} \cdot x_1 + \vec{b} \cdot x_2 + \vec{c} \cdot x_3 = \vec{d} \; .$$

Dabei ist $[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}] = -16 \neq 0$ $\Longrightarrow$ $\{\vec{a};\vec{b};\vec{c}\}$ ist Basis
$\Longrightarrow$ LGS ist eindeutig lösbar .

Wir müssen also nur die konkreten Werte für x_1, x_2 und x_3 folgern . Dabei können die grundlegenden Eigenschaften des Vektorprodukts genutzt werden : $\vec{a} \cdot x_1 + \vec{b} \cdot x_2 + \vec{c} \cdot x_3 = \vec{d} \quad | \times \vec{b} \; | \bullet \vec{c}$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad (\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{c} \cdot x_1 &= (\vec{d} \times \vec{b}) \bullet \vec{c} \\ \Longleftrightarrow \quad x_1 &= [\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}] \,/\, [\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}] \; . \end{aligned}$$

Da das Spatprodukt zyklisch ist (A18 !) folgt analog
$x_2 = [\vec{a}\,\vec{d}\,\vec{c}] \,/\, [\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]$ und $x_3 = [\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{d}] \,/\, [\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]$,

insgesamt vektoriell :

$$\boxed{\begin{aligned} &\vec{x} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}[\vec{d}\,\vec{b}\,\vec{c}]\\ [\vec{a}\,\vec{d}\,\vec{c}]\\ [\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{d}]\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]} \\ &\text{löst } \vec{a} \cdot x_1 + \vec{b} \cdot x_2 + \vec{c} \cdot x_3 = \vec{d} \text{ eindeutig} \\ &\text{falls } [\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{c} \neq 0 \end{aligned}}$$, !

Diese Regel heißt auch Cramer Regel . Sie werden diese Regel schon bald (in GET) nutzen !

Hier folgt (Nachrechnen !) $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\7\\1\end{pmatrix}$!

Aufgaben : A19 bis A24 !

1.3 Matrizen

1.3.1 Addition und Multiplikation (5. Woche)

... kennen Sie schon in einigen Spezialfällen. Erinnern Sie z.B. A8 a):

$$\underbrace{\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}}_{(3\times1)\text{-Matrix}}\cdot(-2)+\begin{pmatrix}0\\-1\\4\end{pmatrix}\cdot\underbrace{3}_{(1\times1)\text{-Matrix}}+\begin{pmatrix}6\\-1\\2\end{pmatrix}\cdot5=\begin{pmatrix}34\\-14\\20\end{pmatrix}$$

ist eine Summe einzelner Matrizenprodukte.

Tatsächlich können Sie die linke Seite der obigen Gleichung sogar als ein Matrizenprodukt schreiben, nämlich

$$\begin{pmatrix}-2&0&6\\3&-1&-1\\1&4&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}$$

Dies ist das Produkt einer Matrix mit 3 Zeilen und 3 Spalten, kurz (3x3)-Matrix $\begin{pmatrix}-2&0&6\\3&-1&-1\\1&4&2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times3}$

und einer Matrix mit 3 Zeilen und einer Spalte, kurz (3x1)-Matrix $\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}$.

Das Ergebnis dieser Multiplikation ist eine (3x1)-Matrix $\begin{pmatrix}34\\-14\\20\end{pmatrix}$.

Betrachten Sie z. B. das LGS

$$\begin{aligned}3x_1-3x_2-x_3&=-16\\3x_1+x_2-x_3&=12\\5x_1-2x_2-3x_3&=-7\end{aligned}$$

Möglicherweise wissen Sie, wie man ein solches LGS mithilfe eines CAS-fähigen Rechners löst.

Sie geben z. B. das folgende Tableau, die (3x4)-Matrix

$$\begin{array}{cccc}3&-3&-1&-16\\3&1&-1&12\\5&-2&-3&-7\end{array}$$

ein und erhalten letztlich ein Endschema der Form $\begin{array}{cccc}1&0&0&2\\0&1&0&7\\0&0&1&1\end{array}$.

Sie übersetzen: $x_1=2 \wedge x_2=7 \wedge x_3=1$!

In Wirklichkeit wird hier die Matrizengleichung $\boxed{\underline{A}\cdot\underline{x}=\underline{b}}$

mit den bekannten Matrizen $\underline{A}=\begin{pmatrix}3&-3&-1\\3&1&-1\\5&-2&-3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times3}$ und $\underline{b}=\begin{pmatrix}-16\\12\\-7\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times1}$

und der unbekannten Matrix $\underline{x}=(x_1|x_2|x_3)^T=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

(T wie transponiert ($\hat{=}$ gestürzt)!) durch letztlich eine einzige Äquivalenzumformung in die Endform

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\underline{x}=\begin{pmatrix}2\\7\\1\end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \underline{x}=\begin{pmatrix}2\\7\\1\end{pmatrix} \quad \text{überführt.}$$

Formal muss es hier eine Inverse $\underline{A}^{-1}$ geben, so dass $\boxed{\underline{x}=\underline{A}^{-1}\cdot\underline{b}}$

mit $\underline{A}^{-1}\cdot\underline{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\underline{1}_3=\underline{1}=\underline{E}$, genannt Einheitsmatrix,

und (dann auch) $\underline{A}^{-1}\cdot\underline{b}=\begin{pmatrix}2\\7\\1\end{pmatrix}$. Allgemein zusammengefasst gelten ...

Definition :

- Eine $(m\times n)$-Matrix ist eine Tafel mit $m\cdot n$ Einträgen, die in m Zeilen und n Spalten gelistet sind. Demgemäß schreibt man für eine Matrize $\underline{A}$ auch $(a_{kl})_{\substack{1\le k\le m\\1\le l\le n}}$ bzw. kurz (a_{kl}) mit Zeilenindex k und Spaltenindex l ! Z.B. ist
$$\underline{A} = (a_{kl}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \text{ falls alle } a_{kl}\in\mathbb{R},$$
eine reelle $(m\times n)$-Matrix !

- Wir definieren die Linearkombination $(a_{kl}) + s(b_{kl}) = (c_{kl})$ mit $c_{kl} := a_{kl} + s\cdot b_{kl}$ für Matrizen $\underline{A}$ und $\underline{B}$ von gleichem Format !

- Wir definieren das Produkt einer Zeilenmatrix $\underline{z}$ mit n Spalten und einer Spaltenmatrix $\underline{s}$ mit n Zeilen durch das schon bekannte innere Produkt der beiden zugehörigen Vektoren :
$$\underline{z}\cdot\underline{s} := \underline{z}^T\bullet\underline{s} = \sum_{i=1}^{n} z_i\cdot s_i = z_1\cdot s_1 + z_2\cdot s_2 + \cdots + z_n\cdot s_n$$
In Erweiterung ist das Matrizenprodukt $\underline{A}\cdot\underline{B}$ nur dann definiert, wenn die Spaltenanzahl von $\underline{A}$ mit der Zeilenanzahl von $\underline{B}$ übereinstimmt :
$$\underline{A}\cdot\underline{B} = \begin{pmatrix} \underline{z}_1 \\ \underline{z}_2 \\ \vdots \\ \underline{z}_m \end{pmatrix}\cdot(\underline{s}_1|\underline{s}_2|\cdots|\underline{s}_n) := \begin{pmatrix} \underline{z}_1^T\bullet\underline{s}_1 & \underline{z}_1^T\bullet\underline{s}_2 & \cdots & \underline{z}_1^T\bullet\underline{s}_n \\ \underline{z}_2^T\bullet\underline{s}_1 & \underline{z}_2^T\bullet\underline{s}_2 & \cdots & \underline{z}_2^T\bullet\underline{s}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \underline{z}_m^T\bullet\underline{s}_1 & \underline{z}_m^T\bullet\underline{s}_2 & \cdots & \underline{z}_m^T\bullet\underline{s}_n \end{pmatrix}$$
(Motto : „Zeile mal Spalte")

- Vertauscht man in der $(m\times n)$-Matrize $\underline{A}$ stets Zeile mit Spalte (gleicher Nummer !), so erhält man die $(n\times m)$-Matrize $\underline{A}^T$, die Transponierte zu $\underline{A}$!

- Gibt es zu einer Matrize $\underline{A}$ eine Matrize $\underline{B}$, so dass
$$\underline{A}\cdot\underline{B} = \underline{E} = \underline{B}\cdot\underline{A}$$
mit einer quadratischen Einheitsmatrix $\underline{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \underline{1}_n$, dann heißt $\underline{A}$ regulär bzw. invertierbar. $\underline{B}$ ist dann die Inverse zu $\underline{A}$, Schreibweise $\underline{B} = \underline{A}^{-1}$!

Bemerkung : Während die Linearkombination von Matrizen, analog zu der von Vektoren, nur für Matrizen von gleichem Format definiert sind, z.B. ist
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 10 \\ 5 & -9 \end{pmatrix} \quad \text{definiert}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{nicht definiert},$$
sieht es bei der Multiplikation zweier Matrizen völlig anders aus :
$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ist nicht definiert, aber}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & -7 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ist definiert !}$$

Noch deutlicher wird der Unterschied bei Vertauschung der Reihenfolge

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad , \text{ aber}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\neq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} .$$

Insgesamt gelten noch die folgenden ...

Regeln :

- $\underline{A} + \underline{B} = \underline{B} + \underline{A}$ und $(\underline{A} + \underline{B}) + \underline{C} = \underline{A} + (\underline{B} + \underline{C}) = \underline{A} + \underline{B} + \underline{C}$
  und $(\underline{A} \cdot \underline{B}) \cdot \underline{C} = (\underline{A} \cdot \underline{B}) \cdot \underline{C}$
- $s(\underline{A} + \underline{B}) = s\underline{A} + s\underline{B}$ und $s(\underline{A} \cdot \underline{B}) = (s\underline{A}) \cdot \underline{B} = \underline{A} \cdot (s\underline{B}) = s\underline{A} \cdot \underline{B}$
- $A \cdot (\underline{B} + \underline{C}) = \underline{A} \cdot \underline{B} + \underline{A} \cdot \underline{C}$ und $(\underline{A} + \underline{B}) \cdot \underline{C} = \underline{A} \cdot \underline{C} + \underline{B} \cdot \underline{C}$
  und $(r+s)\underline{A} = r\underline{A} + s\underline{A}$
- $(\underline{A} + \underline{B})^T = \underline{A}^T + \underline{B}^T$ und $(\underline{A} \cdot \underline{B})^T = \underline{B}^T \cdot \underline{A}^T$
- $(\underline{A} \cdot \underline{B})^{-1} = \underline{B}^{-1} \cdot \underline{A}^{-1}$
- $\underline{A} \cdot \underline{A}^{-1} = \underline{E} = \underline{A}^{-1} \cdot \underline{A}$ und $\underline{A} \cdot \underline{E} = \underline{A} = \underline{E} \cdot \underline{A}$

Merke : Im allgemeinen gilt $\underline{A} \cdot \underline{B} \neq \underline{B} \cdot \underline{A}$, selbst dann, wenn beide Produkte definiert sind !
Im allgemeinen folgt aus $\underline{A} \cdot \underline{B} = \underline{A} \cdot \underline{C}$ nicht $\underline{B} = \underline{C}$,
z. B. mit $\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\underline{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\underline{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(Rechnen Sie nach , VÜ!) !

Tatsächlich löst man ein LGS
dadurch, dass man die erweiterte Matrix $(\underline{A} \mid \underline{b})$
durch Multiplikation von links mit regulären Matrizen so
vereinfacht , dass die Lösung schließlich anhand
resultierenden Endschemas ablesbar ist !
Darum geht es im nächsten Abschnitt ...

Aufgaben : A25 bis A28

1.3.2 Gauß- und Gauß-Jordan-Verfahren (6. Woche)

... sind systematische Verfahren zur Lösung eines LGS: Sukzessives Ersetzen einer Gleichung (Zeile der erweiterten Matrix) durch eine geeignete Linearkombination mit anderen Gleichungen führt schließlich zu einem möglichst einfachen Endschema mit minimalem Anteil der Variablen (maximal vielen Nullen), so dass die Lösungsmenge des LGS daraus interpretiert werden kann!

Tatsächlich werden Sie sehen, wie man solche Äquivalenzumformungen eines LGS durch Multiplikationen mit geeigneten regulären Matrizen durchführen kann.

Beispiel: (zur Übung!)

Gegeben ist das LGS:

$$\begin{aligned} 0{,}1\,x_1 + 0{,}3\,x_2 - 0{,}2\,x_3 &= b_1 \\ 0{,}2\,x_1 - 0{,}4\,x_2 + 0{,}1\,x_3 &= b_2 \\ -0{,}3\,x_1 + 0{,}1\,x_2 + 0{,}1\,x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

Frage: Für welche $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ ist das LGS (reell) lösbar? Wie lauten die jeweiligen Lösungsmengen?

				x_1	x_2	x_3	b_1	b_2	b_3	
				0,1	0,3	-0,2	1	0	0	
Anfangsschema				0,2	-0,4	0,1	0	1	0	$\mid -2z_1$
				-0,3	0,1	0,1	0	0	1	$\mid +3z_1$
	1	0	0	0,1	0,3	-0,2	1	0	0	$\mid \cdot 10$
	-2	1	0	0	-1	0,5	-2	1	0	$\mid \cdot(-1)$
Gauß	3	0	1	0	1	-0,5	3	0	1	$\mid + z_2$
	10	0	0	1	3	-2	10	0	0	$\mid -3z_2$
Gauß - Jordan	0	-1	0	0	1	-0,5	2	-1	0	
	0	1	1	0	0	0	1	1	1	
	1	-3	0	1	0	-0,5	4	3	0	
	0	1	0	0	1	-0,5	2	-1	0	Endschema
	0	0	1	0	0	0	1	1	1	

Interpretation des Endschemas:

$$\begin{aligned} x_1 - 0{,}5x_3 &= 4b_1 + 3b_2 \\ x_2 - 0{,}5x_3 &= 2b_1 - b_2 \\ 0 &= b_1 + b_2 + b_3 \end{aligned}$$

Die Gleichung $\boxed{b_1 + b_2 + b_3 = 0}$ ist die Lösbarkeitsbedingung.

Falls schon diese Gleichung nicht zu einer wahren Aussage führt, ist die Lösungsmenge leer, kurz $\mathbb{L} = \emptyset$!

Sonst gibt es unendlich viele Lösungen.

Die dann gegebene Lösungsmenge lässt sich sogar anschaulich interpretieren:

$$\begin{aligned} x_1 &= 4\cdot b_1 + 3\cdot b_2 + 0\cdot b_3 + 0{,}5\cdot x_3 \\ x_2 &= 2\cdot b_1 - 1\cdot b_2 + 0\cdot b_3 + 0{,}5\cdot x_3 \\ x_3 &= 0\cdot b_1 + 0\cdot b_2 + 0\cdot b_3 + 1\cdot x_3 \end{aligned}$$

z. B. mit dem reellen Parameter $s = 0{,}5x_3$

$$\Leftrightarrow \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{b}}_{\text{Stützvektor}} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot s \quad \wedge \quad s \in \mathbb{R}$$

ist Gerade im $\mathbb{R}^3$!

Die Matrizen der linken Spalte beschreiben nicht nur die durchgeführten Äquivalenzumformungen.
Möglicherweise ist Ihnen schon aufgefallen, dass man das Gesamtschema als Falkschema interpretieren kann, bei dem die oben genannten Matrizen gleichzeitig die Umformungsmatrizen sind, die man von links mit der erweiterten Matrix multiplizieren muss, um die entsprechende Äquivalenzumformung durchzuführen.
Sie können zur Übung bestätigen, dass die Umformungsmatrizen tatsächlich invertierbar (bzw. regulär) sind:

$$\underline{U}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \underline{U}_1^{-1} =$$

$$\underline{U}_2 = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \underline{U}_2^{-1} =$$

$$\underline{U}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \underline{U}_3^{-1} =$$

$$\underline{U}_3 \cdot \underline{U}_2 \cdot \underline{U}_1 \cdot \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}3 & -0{,}2 \\ 0{,}2 & -0{,}4 & 0{,}1 \\ -0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}1 \end{pmatrix} \quad =$$

In ähnlicher Weise kann die Gleichung $\underline{A} \cdot \underline{X} = \underline{E}$ mit einer regulären Matrix $\underline{A}$ eindeutig aufgelöst werden zu $\underline{X} = \underline{A}^{-1}$.
Im Ergebnis erhalten Sie die Inverse $\underline{A}^{-1}$ zu $\underline{A}$.

<u>**Beispiel**</u>: (zur Übung!) $\underline{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; $\underline{A}^{-1} = ?$

Ergänzen Sie selbst ↓

			3	1	-5	1	0	0
			1	-1	1	0	1	0
			-4	2	-1	0	0	1
1	-3	0	0	4	-8	1	-3	0
0	1	0	1	-1	1	0	1	0
0	4	1	0	-2	3	0	4	1
1	0	2	0	0	-2	1	5	2
0	1	0	1	-1	1	0	1	0
0	0	1	0	-2	3	0	4	1
-1/2	0	0	0	0	1	-1/2	-5/2	-1
1/2	1	0	1	-1	0	1/2	7/2	1
3/2	0	1	0	-2	0	3/2	22/2	4
1	0	0	0	0	1	-1/2	-5/2	-1
0	1	-1/2	1	0	0	-1/4	-9/4	-1
0	0	-1/2	0	1	0	-3/4	-22/4	-2
0	1	0	1	0	0	-1/4	-9/4	-1
0	0	1	0	1	0	-3/4	-22/4	-2
1	0	0	0	0	1	-1/2	-5/2	-1

$$\Rightarrow \quad \underline{A}^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 9 & 4 \\ 3 & 23 & 8 \\ 2 & 10 & 4 \end{pmatrix} \quad !$$

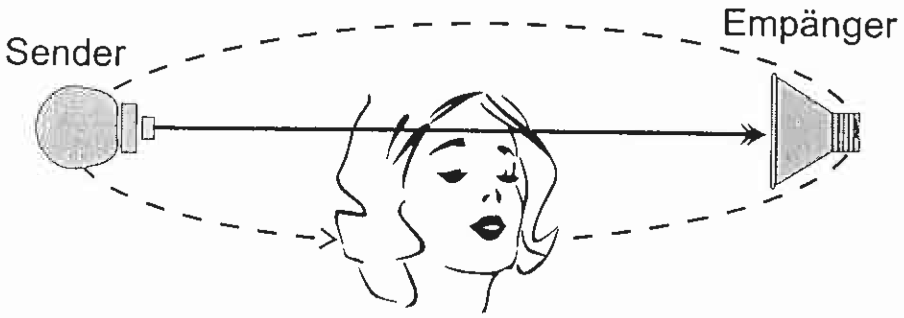
<u>Aufgaben</u>: A29 bis A32, Aufgaben 1. bis 6. zu Matrizengleichungen

<u>Bemerkung</u>: Auch in der Medizin ist das Gauß-Jordan-Verfahren, kurz GJV, zur Lösung großer LGS mit Tausenden von Gleichungen mit ebenso vielen Unbekannten bei Auswertung von Messungen der Computer-Tomographie zu CT-Bildern untersuchter Körperregionen von entscheidender Bedeutung.
Lesen Sie dazu die beigefügten Seiten 23 bis 27 !

Computer-Tomographie und lineare Gleichungssysteme

Im Jahre 1973 entstand eine Technik, welche die durch Organüberlagerungen verursachten Schwächen herkömmlicher Röntgenbilder beseitigte: die *Computer-Tomographie*, abgekürzt CT.

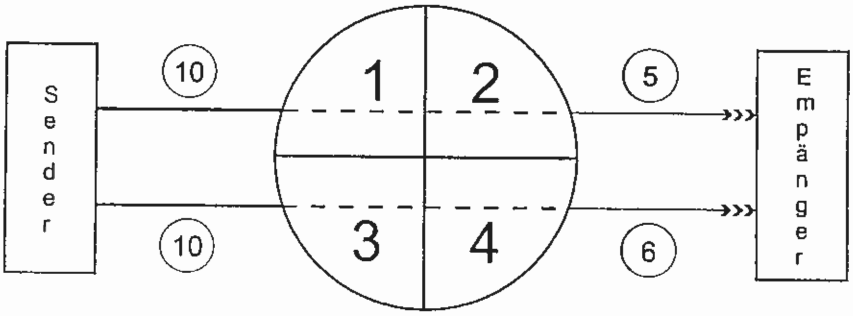
Die CT beruht auf Röntgenstrahlung. CT-Bilder geben einen Querschnitt durch den menschlichen Körper wieder.Die Bilder entstehen aufgrund von Messungen mit Hilfe von Computern.



Ein Röntgenstrahl wird von einem Sender ausgestrahlt und durchquert die vorgegebene Hirnschicht. Nach Verlassen des Körpers trifft er auf einen Strahlenempfänger, der misst, wie stark der Strahl jetzt noch ist.

Die Messvorrichtung von oben

Tatsächlich sendet die Strahlenquelle aber nicht nur einen Strahl, sondern viele parallele Strahlen aus. Der Empfänger misst demzufolge für jeden parallelen Strahl die Stärke seiner Abschwächung.



Wir gehen nun davon aus, dass alle Strahlen den Sender mit einer Stärke von 10 Einheiten verlassen. Die sukzessive Abschwächung des ersten Strahls lässt sich durch folgende Gleichung beschreiben:

$$10 - x_1 - x_2 = 5 \Longleftrightarrow x_1 + x_2 = 5.$$

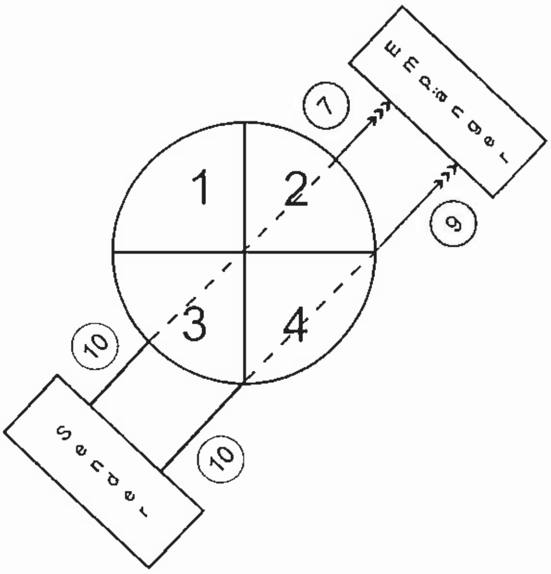
Analog wird der zweite Strahl beim Durchqueren der Hirnteile 3 und 4 um x_3 und x_4 Einheiten von 10 auf 6 Einheiten abgeschwächt. Daraus ergibt sich die Gleichung

$$10 - x_3 - x_4 = 6 \Longleftrightarrow x_3 + x_4 = 4.$$

Erneute Messung durch Drehung

Die beiden Messungen ergeben ein Gleichungssystem mit 2 Gleichungen, aber 4 Unbekannten x_i, $i = 1, \ldots, 4$. Die Unbekannten aus diesem System lassen sich nicht eindeutig bestimmen.

Deshalb wird die Messvorrichtung gedreht. Jetzt kann eine neue Messung durchgeführt werden:



Der obere Strahl führt nun auf die Gleichung

$$10 - x_3 - x_2 = 7 \Longleftrightarrow x_2 + x_3 = 3.$$

Der untere Strahl liefert die Gleichung

$$10 - x_4 = 9 \Longleftrightarrow x_4 = 1.$$

Das resultierende Gleichungssystem

Insgesamt ergibt sich damit das folgende Gleichungssystem:

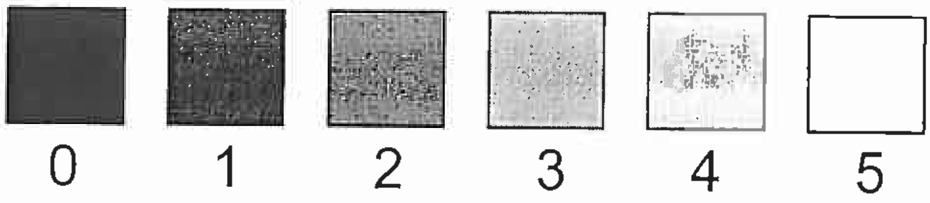
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \qquad\qquad\qquad &= 5 \\ x_3 + x_4 &= 4 \\ x_2 + x_3 \qquad &= 3 \\ x_4 &= 1. \end{aligned}$$

Dieses System hat genau eine Lösung:

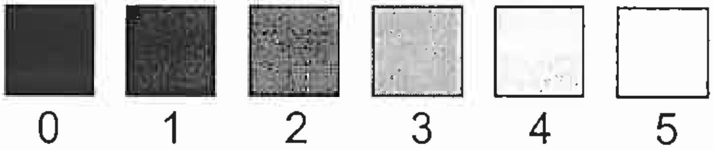
$$x_1 = 5,\ x_2 = 0,\ x_3 = 3 \quad \text{und} \quad x_4 = 1.$$

Diese besagt, dass Teil 1 den Strahl um 5 Einheiten, Teil 2 um 0 Einheiten usw. abschwächt.

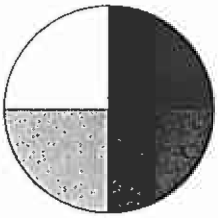
Zum CT-Bild kommt man jetzt, wenn man diese Lösungszahlen mittels einer *Grautonskala* umsetzt:



Entstehen des CT-Bildes



Teil 1 unseres vereinfachten CT-Bildes wird also mit dem Grauton Nummer 5, Teil 2 mit dem Ton Nummer 0 etc. eingefärbt. So entsteht folgendes CT-Bild:



Um medizinisch verwertbare Bilder zu erhalten, müssen natürlich sehr viele Messungen durchgeführt werden. Richtige CT-Bilder bestehen aus Tausenden von Quadraten, die in unterschiedlichen Grautönen gefärbt sind. Jedem Quadrat entspricht eine Unbekannte x_i.

Die Konstruktion eines solchen Bildes bedingt daher die Lösung großer linearer Gleichungssysteme mit Tausenden von Gleichungen und Unbekannten.

1.3.3 Determinanten und Cramer-Regel (7. Woche)

Am Ende des Abschnitts 1.2.3 haben Sie gesehen, wie man mithilfe des Spatproduktes, dem 3D-Fall der Determinante, untersuchen kann, ob ein LGS aus 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten eindeutig lösbar ist, und wie man dann diese eindeutige Lösung formulieren kann.
Übersetzt man die dortigen Erkenntnisse in unsere Matrixsprache, so liest sich das nun so:

Das LGS $\underline{A}\cdot\underline{x} = \underline{b}$ mit $\underline{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $\underline{b} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$

… ist genau dann eindeutig nach $\underline{x}$ auflösbar, falls $\underline{A}$ regulär ist. Dabei gilt:

$$\underline{A} \text{ ist regulär} \iff \det(\underline{A}) \neq 0 \qquad !$$

Erinnere $\det(\underline{A}) = (a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})\cdot a_{13} + (a_{31}a_{12} - a_{11}a_{32})\cdot a_{23} + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})\cdot a_{33}$

$$= (\underline{s}_1 \times \underline{s}_2)\bullet \underline{s}_3$$

Nach der Cramer Regel ist dann $\underline{x} = \begin{pmatrix} \det(\underline{b}|\underline{s}_2|\underline{s}_3) \\ \det(\underline{s}_1|\underline{b}|\underline{s}_3) \\ \det(\underline{s}_1|\underline{s}_2|\underline{b}) \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\det(\underline{A})} \quad !$

Demnach lässt sich auch die Inverse $\underline{A}^{-1}$ formulieren:

$$\underline{A}^{-1} = (\underline{A}^{-1}\cdot\underline{e}_1|\underline{A}^{-1}\cdot\underline{e}_2|\underline{A}^{-1}\cdot\underline{e}_3) = \frac{1}{\det(\underline{A})}\begin{pmatrix} \det(\underline{e}_1|\underline{s}_2|\underline{s}_3) & \det(\underline{e}_2|\underline{s}_2|\underline{s}_2) & \det(\underline{e}_3|\underline{s}_2|\underline{s}_3) \\ \det(\underline{s}_1|\underline{e}_1|\underline{s}_3) & \det(\underline{s}_1|\underline{e}_2|\underline{s}_3) & \det(\underline{s}_1|\underline{e}_3|\underline{s}_3) \\ \det(\underline{s}_1|\underline{s}_2|\underline{e}_1) & \det(\underline{s}_1|\underline{s}_2|\underline{e}_2) & \det(\underline{s}_1|\underline{s}_2|\underline{e}_3) \end{pmatrix}$$

Diese Formel sieht schlimmer aus als sie ist.
Tatsächlich sind die einzelnen Matrixelemente recht schnell zu berechnen, da das Spatprodukt (die dreireihige Determinante) nach A18 zyklisch ist, und in jedem der Matrixelemente einer der drei kanonischen Einheitsvektoren $\underline{e}_i$ enthalten ist!

Beispiel: $\underline{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ mit $\det(\underline{A}) = (1\cdot 2 - (-4)\cdot(-1))\cdot(-5) + (-4-6) + (-3-1)\cdot(-1)$

$\begin{matrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix}$ $\qquad = 10 - 10 + 4 = 4 \neq 0 \Rightarrow \underline{A}$ ist regulär!

z.B. ist $\det(\underline{s}_1|\underline{e}_1|\underline{s}_3) = \det\begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & 0 \end{pmatrix} = (-4+1)\cdot 1 = -3 \quad !$

Rechnen Sie den Rest selbst! Ihr Ergebnis sollte der Inversen des Beispiels auf Seite 22 des Skripts entsprechen!

Tatsächlich kann man die Inversenformel noch vereinfachen, und zwar mithilfe von sogenannten Streichmatrizen.

Definition: Ist $\underline{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (quadratische Matrix), dann ist $\underline{S}_{kl} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ die Streichmatrix, die durch Streichen der k. Zeile und l. Spalte von $\underline{A}$ entsteht !

Folgerung: Für $\underline{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $\det(\underline{A}) \overset{!}{=} \sum_{k=1}^{3} (-1)^{k+3}\cdot\det(\underline{S}_{k3})\cdot a_{k3} \neq 0$

$$\text{ist } \underline{A}^{-1} \overset{!}{=} \frac{1}{\det(\underline{A})}\begin{pmatrix} \det(\underline{S}_{11}) & -\det(\underline{S}_{21}) & \det(\underline{S}_{31}) \\ -\det(\underline{S}_{12}) & \det(\underline{S}_{22}) & -\det(\underline{S}_{32}) \\ \det(\underline{S}_{13}) & -\det(\underline{S}_{23}) & \det(\underline{S}_{33}) \end{pmatrix} \quad !$$

z.B. : $$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -9 & -4 \\ -3 & -23 & -8 \\ -2 & -10 & -4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 9 & 4 \\ 3 & 23 & 8 \\ 2 & 10 & 4 \end{pmatrix} \quad !$$

Die Inversenformel $\underset{=}{A}^{-1} = \left((-1)^{k+l} \cdot \frac{\det(\underset{=}{S}_{lk})}{\det(\underset{=}{A})}\right)_{\substack{1\le k\le n \\ 1\le l\le n}}$

gilt nicht nur für $n=3$, sondern sogar für alle $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, wenn man die Determinante einer quadratischen Matrise in folgender Weise rekursiv definiert :

$$\boxed{\begin{array}{l} \det(a_{11}) := a_{11} \text{ und für alle } n \in [2;+\infty[\, \cap \mathbb{N} \text{ und } \underset{=}{A} \in \mathbb{R}^{n\times n} : \\ \qquad \det(\underset{=}{A}) := \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+n} \cdot \det(\underset{=}{S}_{kn}) \cdot a_{kn} \end{array}}$$

Bedenken Sie : Jede Streichmatrix $\underset{=}{S}_{kn}$ ist $\underset{=}{A}$ ohne k. Zeile und ohne n. Spalte (letzte Spalte), daher $\underset{=}{S}_{kn} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$!

Zur Vereinfachung der Schreibweise werden oft „Betragsstriche" zur Kennzeichnung von Matrizedeterminanten verwendet.
z.B. können Sie statt $\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ auch $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}$ schreiben,

so dass also $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 2 - (-4)\cdot(-1) = -2$,

offensichtlich <u>kein</u> Betrag !

Tatsächlich ist hier gemäß obiger rekursiver Definition
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{2} (-1)^{k+2} \cdot \det(\underset{=}{S}_{k2}) \cdot a_{k2}$$
$$= (-1)^{1+2} \cdot \det(\underset{=}{S}_{12}) \cdot a_{12} + (-1)^{2+2} \cdot \det(\underset{=}{S}_{22}) \cdot a_{22}$$
$$= (-1)\cdot(-4)\cdot(-1) + 1\cdot 1\cdot 2 = -2 .$$

z.B. ist $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}\cdot 1 + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}\cdot 4 - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}\cdot 1 + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix}\cdot 1$$
$$= -(-6)\cdot 1 + (-6)\cdot 4 - 2\cdot 1 + (-2)\cdot 1$$
$$= -22$$

Rechnen Sie das nach (Übung!) !

Besonders einfach ist es nun, die Determinante einer (unteren) Dreiecksmatrix zu berechnen, z.B.
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \\ 4 & 4 & 8 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix}\cdot 5 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}\cdot(-3)\cdot 5 = 1\cdot 2\cdot(-3)\cdot 5 = -30 .$$

Offensichtlich gilt für jede untere Dreiecksmatrix $\underset{=}{A}$ $\left(= \begin{pmatrix} \diagdown & 0 \\ * & \diagdown \end{pmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{n\times n}$:
! $\det(\underset{=}{A}) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$ ist das Produkt aller Diagonalelemente !

Nicht mehr so einfach erscheint die Berechnung von

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

Sie haben jetzt genügend Platz (!), um diese Determinante der Transponierten der vorherigen (4×4)-Matrixe rekursiv zu berechnen (Übung!). Tun Sie es jetzt! Was fällt auf?

An dieser Stelle wollen wir im allgemeinen Fall diskutieren, wie groß die Anzahl r_n der Rechenschritte zur Berechnung der Determinante einer $(n \times n)$-Matrixe $\underline{A}$ ist.

Für $n = 1$, $\det(\underline{A}) = a_{11} \Rightarrow r_1 = 0$

$n = 2$, $\det(\underline{A}) = -a_{21} \cdot a_{12} + a_{11} \cdot a_{22} \Rightarrow r_2 = 1 + 2 \cdot 1 = 3$

$n = 3$, $\det(\underline{A}) = \det(\underline{S}_{13}) \cdot a_{13} - \det(\underline{S}_{23}) \cdot a_{23} + \det(\underline{S}_{33}) \cdot a_{33} \Rightarrow r_3 = 2 + 3 + 3 \cdot r_2$

$\vdots$

und allgemein aufgrund der rekursiven Determinantendefinition ebenfalls rekursiv: $r_1 = 0 \ \wedge \ r_{n+1} = n + (n+1) \cdot (1 + r_n)$

z.B.:

n	1	2	3	4	5	6	7	…
r_n	0	3	14	63	324	1955	13698	

Die Anzahl r_n wächst mit n stärker als exponentiell!
Das es für $n \geq 4$ dennoch nicht so umfangreich ist, die Determinante einer $(n \times n)$-Matrixe auszurechnen, liegt an folgenden zwei …

Regeln:
- $\det(\underline{A}^T) = \det(\underline{A})$
- $\det(\underline{U} \cdot \underline{A}) = \det(\underline{U}) \cdot \det(\underline{A}) = \det(\underline{A}) \cdot \det(\underline{U}) = \det(\underline{A} \cdot \underline{U})$ für beliebige (Umformungs-) Matrizen $\underline{U} \in \mathbb{R}^{n \times n}$!

Folgerung: … für Umformungsmatrizen mit $\det(\underline{U}) = 1$
$\Rightarrow \det(\underline{A}) = \det(\underline{U} \cdot \underline{A}) = \det(\underline{A} \cdot \underline{U})$!
Erinnern Sie sich an das GJV in 1.3.2, so kann man auch hier eine Spalte bzw. Zeile durch Addition von Vielfachen anderer Spalten bzw. Zeilen verändern, ohne die Matrixdeterminante zu ändern!
Außerdem bewirkt Vertauschung zweier Spalten bzw. Zeilen lediglich eine Veränderung des Vorzeichens der Determinante!
Streckung einer Spalte bzw. Zeile führt zu einer Streckung der Determinante, wobei beide Streckfaktoren gleich sind !
Daraus folgt für alle $s \in \mathbb{R}$ und $\underline{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$$\det(s\underline{A}) = s^n \cdot \det(\underline{A}) \qquad !$$

Zwei wesentliche Folgerungen aus den bereits genannten Fakten sind die Cramer-Regel und der Entwicklungssatz von Pierre Simon marquis de Laplace (1749-1827).

Cramer-Regel: $\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}$ ist nur für $\det(\underline{A}) \neq 0$ eindeutig lösbar,

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} \det(\underline{b}|\underline{s}_2|\cdots|\underline{s}_{n-1}|\underline{s}_n) \\ \vdots \\ \det(\underline{s}_1|\underline{s}_2|\cdots|\underline{s}_{n-1}|\underline{b}) \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\det(\underline{A})} \qquad !$$

Entwicklungssatz von Laplace : $\underline{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $z\in[1;n]\cap\mathbb{N}$, $s\in[1;n]\cap\mathbb{N}$.

$$\boxed{\begin{aligned}\det(\underline{A}) &= \sum_{z=1}^{n}(-1)^{z+s}\cdot\det(\underline{S}_{zs})\cdot a_{zs}\\ &= \sum_{s=1}^{n}(-1)^{z+s}\cdot\det(\underline{S}_{zs})\cdot a_{zs}\end{aligned}}\quad\begin{aligned}&\text{(Entwicklung nach s. Spalte)}\\ &\text{(Entwicklung nach z. Zeile)}\qquad !\end{aligned}$$

Beispiel : ... grundsätzlich sollte man nach der Spalte bzw. Zeile mit den meisten Nullen entwickeln !

$$\begin{vmatrix}1&2&0&1\\0&2&-1&4\\-1&0&-2&1\\4&0&5&1\end{vmatrix}\overset{\text{2.Sp.}}{=}-\underset{\qquad\quad +4\underline{S}_2}{\begin{vmatrix}0&-1&4\\-1&-2&1\\4&5&1\end{vmatrix}}\cdot 2+\underset{-\underline{S}_3\qquad\quad}{\begin{vmatrix}1&0&1\\-1&-2&1\\4&5&1\end{vmatrix}}\cdot 2=\begin{vmatrix}0&1&0\\-1&2&-7\\4&-5&21\end{vmatrix}\cdot 2+\begin{vmatrix}0&0&1\\-2&-2&1\\3&5&1\end{vmatrix}\cdot 2$$

$$=-\begin{vmatrix}-1&-7\\4&21\end{vmatrix}\cdot 2+\begin{vmatrix}-2&-2\\3&5\end{vmatrix}\cdot 2=-(28-21)\cdot 2+(6-10)\cdot 2=-22$$

oder gleich analog zum GJV :

$$\begin{vmatrix}1&2&0&1\\0&2&-1&4\\-1&0&-2&1\\4&0&5&1\end{vmatrix}=2\cdot\underset{-\underline{S}_2\qquad\qquad -\underline{S}_2}{\begin{vmatrix}1&1&0&1\\0&1&-1&4\\-1&0&-2&1\\4&0&5&1\end{vmatrix}}=2\cdot\underset{\qquad\quad -\underline{S}_1\ +3\underline{S}_1}{\begin{vmatrix}0&1&0&0\\-1&1&-1&3\\-1&0&-2&1\\4&0&5&1\end{vmatrix}}=-2\cdot\underset{\qquad\quad -2\underline{S}_2}{\begin{vmatrix}-1&0&0\\-1&-1&-2\\4&1&13\end{vmatrix}}=2\cdot\begin{vmatrix}-1&0\\1&11\end{vmatrix}=-22$$

ist schneller !

Bemerkung : Möglicherweise kennen Sie folgendes Sarrus-Schema zur Berechnung zweireihiger- und dreireihiger Determinanten , z.B.

$$\det\begin{pmatrix}2&5\\3&7\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}2&5\\3&7\end{vmatrix}=2\cdot 7-3\cdot 5=-1\qquad\text{und}$$

$$\det\begin{pmatrix}2&7&17\\3&11&19\\5&13&23\end{pmatrix}=\left|\begin{array}{ccc|cc}2&7&17&2&7\\3&11&19&3&11\\5&13&23&5&13\end{array}\right.=2\cdot 11\cdot 23+7\cdot 19\cdot 5+17\cdot 3\cdot 13-5\cdot 11\cdot 17-13\cdot 19\cdot 2-23\cdot 3\cdot 7$$

$$=-78\qquad\text{sind auch richtig , aber}$$

$$„\det\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&2&-1&4\\-1&0&-2&1\\4&0&5&1\end{pmatrix}"=\left|\begin{array}{cccc|ccc}1&2&0&1&1&2&0\\0&2&-1&4&0&2&-1\\-1&0&-2&1&-1&0&-2\\4&0&5&1&4&0&5\end{array}\right.\begin{aligned}&=1\cdot 2\cdot(-2)\cdot 1+2\cdot(-1)\cdot 1\cdot 4+0\cdot 4\cdot 1\cdot 0+1\cdot 0\cdot 0\cdot 5\\ &\quad-4\cdot 0\cdot(-1)\cdot 1-0\cdot(-2)\cdot 4\cdot 1-5\cdot 1\cdot 0\cdot 2-1\cdot(-1)\cdot 2\cdot 0\\ &=-12\neq-22\end{aligned}$$

ist offensichtlich nicht die Determinante der vierreihigen Matrize !

Die Regel von Sarrus zur Berechnung von $\det(\underline{A})$ für $\underline{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ gilt für $n\geq 4$ nicht mehr !

Aufgaben : A33 bis A36

1.3.4. Lineare Transformationen (8. Woche)

Zum Einstieg stellt sich folgendes Problem (vgl. Seite 9 !) :

$\mathcal{K} = \{\binom{1}{0};\binom{0}{1}\}$ und $\mathcal{B} = \{\binom{1}{0};\binom{1}{1}\}$

sind zwei Basen des Vektorraums $(\mathbb{R}^{2\times 1},+,\cdot)$.
Wie berechnet man aus den Koordinaten x_1 und x_2 relativ zur kanonischen Basis $\mathcal{K}$ die Koordinaten y_1 und y_2 relativ zu $\mathcal{B}$?

⌜ Es gilt $\binom{1}{0}\cdot x_1 + \binom{0}{1}\cdot x_2 = \binom{1}{0}\cdot y_1 + \binom{1}{1}\cdot y_2 \Leftrightarrow \binom{x_1}{x_2} = \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\cdot\binom{y_1}{y_2}$

mit $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix} \Rightarrow \binom{y_1}{y_2} = \begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}\cdot\binom{x_1}{x_2}$.

Dies ist eine einfache Funktionsgleichung einer Funktion f , die unsere Frage beantwortet.
Diese Funktion beschreibt die Transformation der Koordinaten x_1 und x_2 irgendeines Vektors $\vec{v}$ relativ zu $\mathcal{K}$ in Koordinaten y_1 und y_2 desselben Vektors relativ zu $\mathcal{B}$. ⌟

Es ist also z.B. für $\underline{x} = \binom{x_1}{x_2} = \binom{3}{2} \Rightarrow \underline{y} = \begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}\cdot\binom{3}{2} = \binom{1}{2}$, d.h.:

$$\binom{1}{0}\cdot 3 + \binom{0}{1}\cdot 2 = \binom{1}{0}\cdot 1 + \binom{1}{1}\cdot 2 .$$

Tatsächlich kann man eine solche Funktion f mit $f(\underline{x}) = \begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}\cdot\underline{x}$ auch als Funktion $\subseteq \mathbb{R}^{2\times 1}\times\mathbb{R}^{2\times 1}$ interpretieren.
Dabei fällt per Definition des Matrizenproduktes auf, dass mit

$f(\vec{e}_1) = \binom{1}{0}$ und $f(\vec{e}_2) = \binom{-1}{1}$

auch schon $f(\vec{e}_1\cdot x_1 + \vec{e}_2\cdot x_2) = f(\underline{x}) = f(\vec{e}_1)\cdot x_1 + f(\vec{e}_2)\cdot x_2$

immer berechenbar ist, und zwar in besonders einfacher Weise:
Jede Linearkombination von (Basis-) Vektoren wird zur entsprechenden Linearkombination der Bilder dieser (Basis-) Vektoren abgebildet !

Deswegen spricht man bei einer solchen Funktion f auch von einer
linearen Transformation (kurz: LT) !

Hier genügt das Wissen um die Spalten $f(\vec{e}_i)$.
Die LT f wird hier eindeutig durch die darstellende Matrix
$[f] = \underline{M} = (f(\vec{e}_1)|f(\vec{e}_2)) = \begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$
in der Funktionsgleichung $\underline{y} = \underline{M}\cdot x$ beschrieben !

Definition: Eine lineare Transformation (kurz: LT) ist eine Funktion f mit Vektorräumen $(\mathbb{D}_f,+,\cdot),(\mathbb{W}_f,+,\cdot)$ und der Eigenschaft („Linearität")

$$\boxed{f(\vec{u}+\vec{v}\cdot s) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})\cdot s} \quad !$$

Bemerkung: Ist dabei $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}^{n\times 1}$ mit $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, dann gilt:

f ist LT $\Leftrightarrow f(\underline{x}) = \underline{M}\cdot\underline{x}$ mit der darstellenden Matrix
$\underline{M} = (f(\underline{e}_1)|\cdots|f(\underline{e}_n))$

für $\underline{e}_i = (\delta_{ki})_{1\le k\le n} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ (vgl. Seite 13 !) !

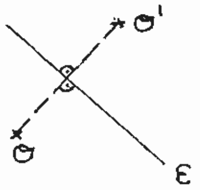
Beispiele :

a) Die für $m \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ gegebene reelle Funktion f mit der Gleichung $y = m \cdot x + b$
ist nur für $b = 0$ linear, also eine LT.
Beachten Sie dabei, dass für jede LT gilt:
$$f(\vec{o}) = f(\vec{o} \cdot 0) = f(\vec{o}) \cdot 0 = \vec{o} \quad !$$

b) $f(\vec{x}) = \vec{m} \bullet \vec{x} = \vec{m}^T \cdot \vec{x}$ zeigt, dass „Skalarprodukt mit einem festen Vektor $\vec{m}$" eine LT f mit $[f] = \underline{M} = \vec{m}^T$ ist !

c) $f(\vec{x}) = \vec{\alpha} \times \vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha_2 x_3 - \alpha_3 x_2 \\ \alpha_3 x_1 - \alpha_1 x_3 \\ \alpha_1 x_2 - \alpha_2 x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 0 & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$ zeigt, dass „Vektorprodukt mit einem festen Vektor $\vec{\alpha}$" eine LT f mit einer (schiefsymmetrischen) darstellenden Matrix
$$\underline{M} = [f] = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 0 & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 & 0 \end{pmatrix} = \vec{\alpha} \times$$
ist. Dabei ist $\det(\underline{M}) = \alpha_3 \alpha_1 \alpha_2 + (-\alpha_2 \alpha_3) \cdot \alpha_1 = 0$,
$\underline{M}$ nicht regulär.
Tatsächlich hat f mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}^{3 \times 1}$ schon anschaulich keine Umkehrfunktion !

d) Die Spiegelung f an einer Ebene ist genau dann eine LT, wenn $\mathcal{O} \in E$!
Sonst ist $f(\vec{o}) \neq \vec{o}$ (vgl. Bild ⟶).
Erinnern Sie A24, so erhalten Sie für
$$E : \vec{n}_0 \bullet \vec{x} = 0$$



(Einheitsnormalenvektor $\vec{n}_0$, $|\vec{n}_0| = 1$) relativ zu $\vec{n}_0$:
$$f(\vec{x}) = \vec{x} - 2\vec{x}_{\parallel} = \vec{x} - 2\vec{n}_0 \cdot (\vec{n}_0 \bullet \vec{x}) = (\underline{1}_3 - 2\vec{n}_0 \cdot \vec{n}_0^T) \cdot \vec{x}$$
ist der Ortsvektor des Bildpunkts X' nach Spiegelung des Punktes X an E !
Tatsächlich zeigt die darstellende (3×3)-Matrix $\underline{M} = \underline{1}_3 - 2\vec{n}_0 \cdot \vec{n}_0^T$, dass es sich bei f um eine LT handelt.
Dabei ist hier klar: $f^{-1} = f$ bzw. $\underline{M}^{-1} = \underline{M}$ (bilden Sie $\underline{M}^2$!).
Außerdem ist hier $\underline{M}^T = (\underline{1}_3 - 2\vec{n}_0 \cdot \vec{n}_0^T)^T = \underline{1}_3 - 2\vec{n}_0 \cdot \vec{n}_0^T = \underline{M} = \underline{M}^{-1}$.
Wegen $\underline{M}^T \cdot \underline{M} = \underline{M} \cdot \underline{M}^T = \underline{1}_3$ heißt $\underline{M}$ und damit auch f orthogonal !
Für $X \in E$ gilt stets $f(\vec{x}) = (\underline{1}_3 - 2\vec{n}_0 \cdot \vec{n}_0^T) \cdot \vec{x} = \vec{x} - 2\vec{n}_0 \cdot (\vec{n}_0^T \cdot \vec{x}) = \vec{x}$
(wegen $\vec{n}_0^T \cdot \vec{x} = \vec{n}_0 \bullet \vec{x} = 0$ n.V. !) $\Longrightarrow X' = X$!
Solche Punkte, die auf sich selbst abgebildet werden heißen auch Fixpunkte (der Funktion f). Die zugehörigen Ortsvektoren $\vec{x} \neq \vec{o}$ heißen Eigenvektoren von f (bzw. $\underline{M}$) zum Eigenwert 1 !

e) Jede Drehung f um eine Ursprungsgerade $g : \vec{\alpha} \times \vec{x} = \vec{o}$, $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_0 \cdot \alpha$ mit Orientierung $\vec{\alpha}_0$ und Drehwinkel α ist offensichtlich eine LT, denn (vgl. Seite 17, $\vec{a} = \vec{o}$, $\vec{p} = \vec{x}$, $\vec{p}(t) = f(\vec{x})$!)
$$f(\vec{x}) = (\vec{\alpha}_0 \cdot \vec{\alpha}_0^T + \cos(\alpha)(\underline{1}_3 - \vec{\alpha}_0 \cdot \vec{\alpha}_0^T) + \sin(\alpha)\,\vec{\alpha}_0 \times) \cdot \vec{x} \quad !$$

Da f offensichtlich orthonormale Rechtssysteme in orthonormale Rechtssysteme abbildet, gilt (auch ohne Nachrechnen klar !)
$$\underline{M}^T = \underline{M}^{-1} \quad (f \text{ ist orthogonal}) \quad \text{und} \quad \det(\underline{M}) = +1 \quad !$$

Hier ist g die Menge aller Fixpunkte von f !

Definition : Jede LT mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}^{n\times 1}$ und $[f]^T = [f]^{-1} = [f^{-1}]$ heißt lineare orthogonale Transformation, kurz : LOT !

Bemerkungen :

a) Wegen der „Regeln" zur Determinantenberechnung folgt für jede LOT f : $1 = 1^n = \det(\underline{1}_n) = \det([f]^T\cdot[f]) = (\det([f]))^2$

$$\Longrightarrow \quad |\det([f])| = 1 \quad !$$

Eine LOT f mit $\det([f]) = \begin{cases} -1 & \text{heißt Spiegelung} \\ +1 & \text{heißt Drehung} \end{cases}$!

b) Stellt sich für f mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}^{3\times 1}$ heraus :

$$[f]^T\cdot[f] = 1 \quad \wedge \quad \det([f]) = 1 \quad ,$$

dann ist f eine Drehung um eine Ursprungsgerade. Orientierung $\vec{\alpha}_0$ und Drehwinkel α erhält man systematisch in folgender Weise :

① Suche Eigenvektor $\vec{x} \neq \vec{o}$ mit $f(\vec{x}) = \vec{x}$ $\curvearrowright$ $\vec{x} = \vec{r}$ (Richtungsvektor $\vec{r}$ von g !)

② Suche $\vec{s}$ mit $\vec{r}\bullet\vec{s} = 0$

③ Drehwinkel $\alpha = \arccos\left(\dfrac{\vec{s}\bullet f(\vec{s})}{|\vec{s}|\cdot|f(\vec{s})|}\right)$

④ Orientierung $\vec{\alpha}_0 = \begin{cases} \vec{r}\cdot|\vec{r}|^{-1} & \text{für } \alpha = 180° \\ \vec{s}\times f(\vec{s})\cdot|\vec{s}\times f(\vec{s})|^{-1} & \text{für } \alpha \in [0;180°[\end{cases}$

c) Bekanntlich führt die Verkettung zweier Spiegelungen zu einer Drehung ! Rechnen Sie es nach !

Beispiel : Gegeben ist f mit $[f] = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Interpretieren Sie f !

$\ulcorner$ $[f]^T\cdot[f] = \frac{1}{9}$

$$\begin{array}{rrr|rrr} & & & 2 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 & 2 \\ & & & 2 & -1 & 2 \\ \hline 2 & -1 & 2 & 9 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 9 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 9 \end{array} = \underline{1}_3 \quad \text{und}$$

$$\det([f]) = \frac{1}{27}\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{3+12+12}{27} = 1$$

$\Longrightarrow$ f ist Drehung !

① $f(\vec{x}) = \vec{x} \Longleftrightarrow ([f] - \underline{1}_3)\cdot\underline{x} = \underline{0} \Longleftrightarrow$

$$\begin{array}{|rrr|r|l} x_1 & x_2 & x_3 & & \\ \hline -1 & 2 & -1 & 0 & \\ \hline -1 & -1 & 2 & 0 & | - z_1 \quad | : (-3) \\ 2 & -1 & -1 & 0 & | + z_2 + z_3 \\ \hline 0 & 1 & -1 & 0 & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \hline \end{array}$$

Wähle nun $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{r}$.

② $\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ erfüllt $\vec{r}\bullet\vec{s} = 0$!

③ $f(\vec{s}) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und damit $\alpha = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{60°}}$

④ $\vec{\alpha}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right|^{-1} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \underline{\underline{-\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}}$

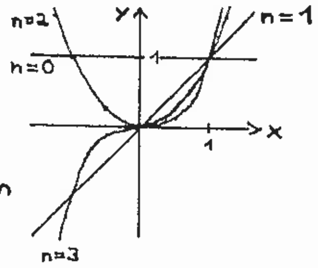
Ergebnis : f ist Drehung mit $\vec{\alpha} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 60°$

Aufgaben : A 37 bis A 42 , zur Wdh. : A 43 und A 44 !

1.4 Spezielle Funktionen

1.4.1 Rationale Funktionen (9. Woche)

Durch $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, ist die n. Potenzfunktion gegeben. Dabei sind gerade Potenzfunktionen symmetrisch zu $x = 0$ (y-Achse), ungerade Potenzfunktionen symmetrisch zu $O(0|0)$ (Symmetriezentrum Z) !



Bildet man nun eine beliebige Linearkombination solcher Potenzfunktionen, so erhält man eine ganzrationale Funktion g.

Für $g(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ mit $a_n \neq 0$ ist g

ganzrational vom Grad n ! Ihr Schaubild heißt Parabel n. Ordnung !

Sind z und n ganzrational, dann ist $\boxed{f := \frac{z}{n}}$ eine (gebrochen) rationale Funktion !

Beispiele :

a) $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^3-4x+3} = \frac{(x-1)\cdot(x-2)}{(x-1)\cdot(x^2+x-3)} = \frac{(x-1)\cdot(x-2)}{(x-1)\cdot(x-\frac{1}{2}(-\sqrt{13}-1))\cdot(x-\frac{1}{2}(\sqrt{13}-1))}$ 1. Linearfaktor - zerlegung

z. B. mit $x^3-4x+3 = (x-1)\cdot\underbrace{(x^2+x-3)}_{=0}$ und nach Lösungsformel ist

$$\begin{array}{l} x^3-4x+3 \\ \underline{x^3-x^2} \\ \quad x^2-4x \\ \quad \underline{x^2-x} \\ \qquad -3x+3 \\ \qquad \underline{-3x+3} \\ \qquad\qquad 0 \end{array}$$

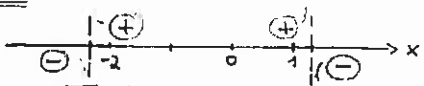
$x_0 = 1$

$x_{1/2} = \frac{1}{2}\cdot(-1 \mp \sqrt{1^2-4\cdot1\cdot(-3)}) = \frac{-1\mp\sqrt{13}}{2}$

also $x^3-4x+3 = (x-1)\cdot(x-\underbrace{\frac{-\sqrt{13}-1}{2}}_{\approx -2,3})\cdot(x-\underbrace{\frac{\sqrt{13}-1}{2}}_{\approx 1,3})$

⤳ Lücke bei $x = 1$, Loch $L(1|1)$

⤳ Polstellen $\frac{-1\mp\sqrt{13}}{2}$ (mit VZW)



Senkrechte Asymptoten $x = \frac{-\sqrt{13}-1}{2}$; $x = \frac{\sqrt{13}-1}{2}$

⤳ Wg. $\lim\limits_{|x|\to+\infty}(f(x)) = 0$: Waagerechte Asymptote $y = 0$

⤳ Schnittpunkte mit den Achsen : $Y(0|\frac{2}{3})$, $N(2|0)$

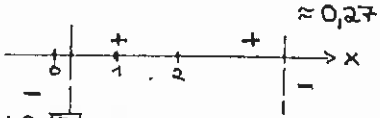
Extrempunkte : $f'(x) = 0$ mit VZW. Erinnere $\boxed{(\frac{z}{n})' = \frac{z'\cdot n - z\cdot n'}{n^2}}$ Quotientenregel

Hier ist $f(x) = \frac{z(x)}{n(x)}$ mit $z(x) = x-2 \Rightarrow z'(x) = 1$

$n(x) = x^2+x-3 \Rightarrow n'(x) = 2x+1$

$\Rightarrow f'(x) = -\frac{x^2-4x+1}{(x^2+x-3)^2} = -(x^2+x-3)^{-2}\cdot(x-\underbrace{(2-\sqrt{3})}_{\approx 0,27})\cdot(x-\underbrace{(2+\sqrt{3})}_{\approx 3,73})$

also f' :

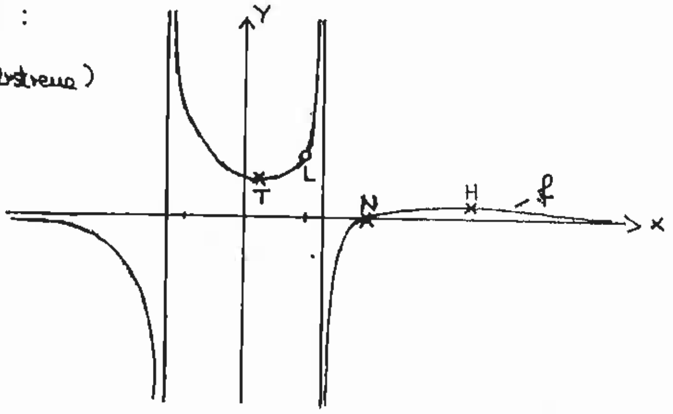


$f(2-\sqrt{3}) \overset{...}{=} (2\sqrt{3}+5)/13$

$f(2+\sqrt{3}) \overset{...}{=} (5-2\sqrt{3})/13$

$\Rightarrow T(\underbrace{2-\sqrt{3}}_{\approx 0,27} | \underbrace{\frac{5+2\sqrt{3}}{13}}_{\approx 0,65})$ und $H(\underbrace{2+\sqrt{3}}_{\approx 3,73} | \underbrace{\frac{5-2\sqrt{3}}{13}}_{\approx 0,12})$

qualitative Skizze :
(nur Verlauf ohne
notwendige Maßstabstreue)



<u>b)</u> $f(x) = \frac{0{,}5\cdot x^3 - 1{,}5x + 1}{x^2+3x+2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3-3x+2}{x^2+3x+2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(x-1)\cdot(x^2+x-2)}{(x+1)\cdot(x+2)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(x-1)^2}{x+1}$

mit $\underline{\underline{L(-2|-4{,}5)}}$ und senkrechte Asymptote $\underline{\underline{x=-1}}$; $\underline{\underline{N(1|0)}}$; $\underline{\underline{Y(0|0{,}5)}}$.

Hier ist allerdings $f(x) = \frac{(x-1)^2}{2\cdot(x+1)} \xrightarrow{x\to\pm\infty} \pm\infty \quad (\neq 0)$.

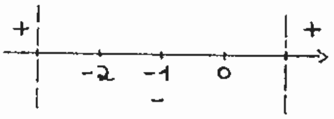
! Polynomdivision : $f(x) = \frac{1}{2}\cdot(x^2-2x+1):(x+1) = \frac{1}{2}\cdot\left(x-3+\frac{4}{x+1}\right)$

$$\begin{array}{r} x^2 + x \\ \hline -3x+1 \\ -3x-3 \\ \hline 4 \end{array}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} + \overset{\to 0 \text{ für } |x|\to\infty}{\boxed{\frac{2}{x+1}}}}}$$

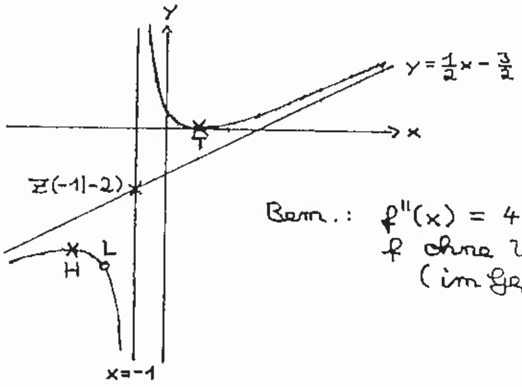
=> Schiefe Asymptote : $\underline{\underline{y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}}}$ ... und $f(x)$ ist einfacher abzuleiten :

$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2-2^2}{2\cdot(x+1)^2} = \frac{(x+3)\cdot(x-1)}{2\cdot(x+1)^2}$



=> $\underline{\underline{H(-3|-4)}}$ und $\underline{\underline{T(1|0)}}$

quantitative Skizze :
(mit Zwischenwerten ,
maßstabstreu !)



Bem.: $f''(x) = 4\cdot(x+1)^{-3} \neq 0$
f ohne Wendepunkte
(im Gegensatz zu a) !)

Wichtige Grundlage der Diskussion rationaler Funktionen ist so offenbar eine (mindestens teilweise) Faktorisierung von $z(x)$ und $n(x)$. Dafür gibt es neben linearer Ergänzung und Polynomdivision ein relativ einfaches Schema , das <u>Horner-Schema</u>. Historisch gesehen diente es der einfachen Berechnung von Werten ganzrationaler Funktionen.

<u>Beispiel</u> : $f(x) = 3x^4 + 2x^3 - 5x^2 + x - 1$ an der Stelle $a=2$

$$\begin{array}{ccccccccc} +\,0 & & 6 & & 16 & & 22 & & 46 \\ & \nearrow^{\cdot 2} & & \nearrow^{\cdot 2} & & \nearrow^{\cdot 2} & & \nearrow^{\cdot 2} & \\ 3 & & 8 & & 11 & & 23 & & 45 \end{array}$$

=> $f(x) = (3\cdot x^3 + 8x^2 + 11x + 23)\,(x-2) + 45$

mit $f(2) = \underline{\underline{45}}$

Hier benötigt man also nur noch 8 (statt 13) Rechenschritte zur Berechnung des Funktionswertes an der Stelle 2 !

An beliebiger Stelle $a \in \mathbb{R}$ erhalten sie analog (ausführlich !)

$$\begin{array}{rlllll}
f(x) = & 3\cdot x^4 & + \; 2\cdot x^3 & - \; 5\cdot x^2 & + \; 1\cdot x & - 1 \\
+ & 0\cdot x^4 & + \; 3\cdot x^3\cdot a & + (3a+2)x^2\cdot a & + (3a^2+2a-5)\cdot x\cdot a & + (3a^3+2a^2-5a+1)\cdot a \\
= & 3\cdot x^3\cdot x & + (3a+2)x^2\cdot x & + (3a^2+2a-5)\cdot x\cdot x & + (3a^3+2a^2-5a+1)\cdot x & + \; f(a)
\end{array}$$

Nach diesem (Additions-) Schema gilt tatsächlich

$$f(x) + (3x^3 + (3a+2)x^2 + (3a^2+2a-5)x + (3a^3+2a^2-5a+1))\cdot a$$

$$= (3x^3 + (3a+2)x^2 + (3a^2+2a-5)x + (3a^3+2a^2-5a+1))\cdot x + f(a)$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x) = m_a(x)\cdot(x-a) + f(a) \quad \text{mit}$$

$$\begin{array}{rcccc}
m_a(x) = & 3x^3 & + \; (3a+2)\cdot x^2 & + (3a^2+2a-5)\cdot x & + (3a^3+2a^2-5a+1) \\
 & 0 & 3a & 6a^2+2a & 9a^3+4a^2-5a \\
 & 3 & 6a+2 & 9a^2+4a-5 & 12a^3+6a^2-10a+1
\end{array}$$

und damit $\quad m_a(a) = 12a^3+6a^2-10a+1 \overset{!}{=} f'(a)$,

$$f(x) = k_a(x)\cdot(x-a)^2 + f'(a)\cdot(x-a) + f(a)$$

bei $\quad k_a(x) = 3x^2+(6a+2)x+(9a^2+4a-5)$.

An der Stelle $\underline{a=1}$ erhält man so via Horner-Schema (kurz: HS)

$$\begin{array}{ccccc}
3 & 2 & -5 & 1 & -1 \\
0 & 3 & 5 & 0 & 1 \\
3 & 5 & 0 & 1 & \boxed{0} = f(1) \\
0 & 3 & 8 & 8 & \\
3 & 8 & 8 & \boxed{9} = f'(1) & \\
0 & 3 & 11 & & \\
3 & 11 & \boxed{19} & & \\
0 & 3 & & & \\
3 & \boxed{14} & & & \\
0 & & & & \\
\boxed{3} & & & &
\end{array}$$

der Reihe nach

$$\begin{aligned}
f(x) &= (3x^3+5x^2+1)\cdot(x-1) && \text{(Faktorisierung)} \\
&= ((3x^2+8x+8)\cdot(x-1)+9)\cdot(x-1) \\
&= (((3x+11)\cdot(x-1)+19)\cdot(x-1)+9)\cdot(x-1) \\
&= (((3\cdot(x-1)+14)\cdot(x-1)+19)\cdot(x-1)+9)\cdot(x-1) \\
&= 3\cdot(x-1)^4 + 14\cdot(x-1)^3 + 19\cdot(x-1)^2 + 9\cdot(x-1) && \text{(Taylorentwicklung)}
\end{aligned}$$

Ermitteln Sie daraus $f''(1)$, $f'''(1)$ und $f^{(4)}(1)$!

$\ulcorner \; f''(1) = \qquad\qquad \wedge \quad f'''(1) = \qquad\qquad \wedge \quad f^{(4)}(1) = \qquad\qquad \lrcorner$

<u>Satz</u> : (Horner - Schema)

$$\begin{array}{ccccc}
a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \\
0 & a\cdot b_{n-1} & \cdots & a\cdot b_1 & a\cdot b_0 \\
b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_0 & f(a) \\
0 & a\cdot c_{n-2} & \cdots & a\cdot c_0 & \\
c_{n-2} & c_{n-3} & \cdots & f'(a) &
\end{array}
\quad
\begin{array}{l}
\Leftrightarrow \; f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \\
\Leftrightarrow \; f(x) = f(a) + (x-a)\cdot\sum_{i=0}^{n-1} b_i\cdot x^i \\
\Leftrightarrow \; f(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + (x-a)^2\cdot\sum_{i=0}^{n-2} c_i\cdot x^i
\end{array}$$

Das HORNER-Schema ist ein Rechenverfahren, mit dem man für ein Polynom

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

an der Stelle x_0 mit minimalem Rechenaufwand folgendes berechnet:

(1) Funktionswert $f(x_0)$

(2) Division von $f(x)$ durch den Linearfaktor $x - x_0$, also $\frac{f(x)}{x-x_0}$

(3) Ableitungen $f'(x_0), f''(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0)$

(4) Taylorentwicklung von f an der Stelle x_0

Man schreibt die Koeffizienten des Polynoms $f(x)$ in absteigender Reihenfolge $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ hintereinander ($a_k = 0$ nicht vergessen, falls die Potenz x^k fehlt!), schreibt dann x_0 vor die zweite Zeile, beginnt die dritte Zeile mit a_n und geht jeweils mit x_0 multiplizierend in der durch die Pfeile (siehe Beispiel) angedeuteten Weise vor. Die über dem waagerechten Strich untereinanderstehenden Zahlen sind zu addieren, die Summe ist mit x_0 zu multiplizieren, usw.

Beispiel *Für* $f(x) = x^3 - x^2 - 9x + 13$ *berechne man* $f(3)$ *und* $\frac{f(x)}{x-3}$.

HORNER-Schema

$$f(x) = x^3 - x^2 - 9x + 13, \quad x_0 = 3$$

$$\begin{array}{r|rrrrll}
 & 1 & -1 & -9 & 13 & + & \\
x_0 = 3 & & \nearrow 3 & \nearrow 6 & -9 & + & \\
\hline
 & 1 \nearrow_{3\cdot 1} & 2 \nearrow_{3\cdot 2} & -3 & \boxed{4} & = & f(3)
\end{array}$$

Man liest ab:

(1) Schlußzahl der dritten Zeile ist der Funktionswert $f(x_0)$ hier: $f(3) = 4$.

(2) Die übrigen Zahlen der dritten Zeile sind die Koeffizienten des Polynoms $g(x)$, das man bei Division von $f(x)$ durch den Linearfaktor $x - x_0$ erhält

$$\frac{f(x)}{x-x_0} = g(x) + \frac{f(x_0)}{x-x_0} \quad \text{hier:} \quad \frac{x^3-x^2-9x+13}{x-3} = 1x^2 + 2x - 3 + \frac{4}{x-3}.$$

$\boxed{f(x) \text{ ist genau dann ohne Rest durch } x - x_0 \text{ teilbar, wenn } f(x_0) = 0 \text{ ist.}}$

Das HORNER-Schema läßt sich auch im Komplexen verwenden:

Beispiel Imaginäre Einheit $i = \sqrt{-1}$ (in Mathe 2 wird i durch j ersetzt)
! Hauptwert !

Für das Polynom $f(z) = z^3 - (1+i)z^2 - (2-i)z + 2i$ *berechne man* $f(i)$ *und* $\frac{f(z)}{z-i}$.

HORNER-Schema im Komplexen

$$\begin{array}{r|rrrl}
 & 1 & -1-i & -2+i & 2i \\
z_0 = i & & i & -i & -2i \\
\hline
 & 1 & -1 & -2 & 0 = f(i)
\end{array} \qquad \text{und} \qquad \frac{f(z)}{z-i} = z^2 - z - 2.$$

Beispiel

Für das Polynom $f(x) = 2x^4 - x^3 - x - 18$ *berechne man* $f(2), f'(2), f''(2), f^{(3)}(2), f^{(4)}(2)$, *sowie* $\frac{f(x)}{x-2}$ *und die* **Taylorentwicklung** *von* f *an der Stelle* $x_0 = 2$ *(Umordnung von* f *nach Potenzen von* $x - 2$*).*

Vollständiges HORNER-Schema

$$\begin{array}{c|cccccl}
 & 2 & -1 & 0 & -1 & -18 & + \\
x_0=2 & & {\scriptstyle 2\cdot 2}\nearrow 4 & {\scriptstyle 2\cdot 3}\nearrow 6 & 12 & 22 & + \\
\hline
 & 2\nearrow & 3\nearrow & 6 & 11 & \boxed{4} = \frac{f(2)}{0!} & \Longrightarrow \quad f(2)=4 \\
x_0=2 & & {\scriptstyle 2\cdot 2}\nearrow 4 & 14 & 40 & & \\
\hline
 & 2\nearrow & 7 & 20 & \boxed{51} = \frac{f'(2)}{1!} & & \Longrightarrow \quad f'(2)=51 \\
x_0=2 & & 4 & 22 & & & \\
\hline
 & 2 & 11 & \boxed{42} = \frac{f''(2)}{2!} & & & \Longrightarrow \quad f''(2)=42\cdot 2!=84 \\
x_0=2 & & 4 & & & & \\
\hline
 & 2 & \boxed{15} = \frac{f^{(3)}(2)}{3!} & & & & \Longrightarrow \quad f^{(3)}(2)=15\cdot 3!=90 \\
x_0=2 & & & & & & \\
\hline
 & \boxed{2} = \frac{f^{(4)}(2)}{4!} & & & & & \Longrightarrow \quad f^{(4)}(2)=2\cdot 4!=48
\end{array}$$

Man liest ab:

(1) Schlußzahl der dritten Zeile ist der Funktionswert $f(x_0)$ hier $f(2) = 4$.

(2) Die übrigen Zahlen der dritten Zeile sind die Koeffizienten des Polynoms $g(x)$, das man bei Division von $f(x)$ durch den Linearfakt. $x - x_0$ erhält:

$$\frac{f(x)}{x-x_0} = g(x) + \frac{f(x_0)}{x-x_0} \quad \text{hier} \quad \frac{2x^4-x^3-x-18}{x-2} = 2x^3 + 3x^2 + 6x + 11 + \frac{4}{x-2}$$

(3) Ableitungen: $f'(2) = 51,\ f''(2) = 84,\ f'''(2) = 90,\ f''''(2) = 48$.

(4) Die Koeffizienten der Taylorentwicklung sind die umrahmten Zahlen des Horner-Schemas:

$$f(x) = \underbrace{2x^4-x^3-x-18}_{\substack{f \text{ geordnet nach} \\ \text{Potenzen von } x.}} = \underbrace{\boxed{2}(x-2)^4+\boxed{15}(x-2)^3+\boxed{42}(x-2)^2+\boxed{51}(x-2)+\boxed{4}}_{\substack{\text{Taylorentwicklung} \\ \text{von } f \text{ an der Stelle } 2}\ =\ \substack{f \text{ umgeordnet nach} \\ \text{Potenzen von } x-2}}$$

(5) Alle Koeffizienten der Umordnung nach Potenzen von $(x - 2)$ sind ≥ 0, also: Keine Nullstelle von f ist > 2.

Beispiel (Euklidischer Algorithmus): *Man bestimme den größten gemeinsamen Teiler* ggT (42, 9) *von 42 und 9, und löse die diophantische Gleichung* $42x+9y =$ggT (42, 9).

Division mit Rest:	Einsetzen liefert:	alle Lösungen der diophantischen Gleichung
$42 = 4\cdot 9 + 6$	$3 = 9 - 1\cdot 6$	
$9 = 1\cdot 6 + \underline{3}$	$3 = 9 - 1\cdot(42 - 4\cdot 9)$	$42x + 9y = 3$ bzw. $14x + 3y = 1$ sind:
$6 = 2\cdot 3$	$3 = -1\cdot 42 + 5\cdot 9$	
$\Rightarrow \underline{3} = \text{ggT}(42, 9).$	ggT als Vielfachsumme.	$(x, y) = (-1, 5) + m(3, -14),\ m \in \mathbb{Z}$.

Eine Anwendung des HS ist auch die Umrechnung einer Dualzahl in eine Dezimalzahl !

Bsp.: $(10110111)_2 = (?)_{10}$

bzw. $1\cdot 2^7+0\cdot 2^6+1\cdot 2^5+1\cdot 2^4+0\cdot 2^3+1\cdot 2^2+1\cdot 2^1+1\cdot 2^0 = ?$

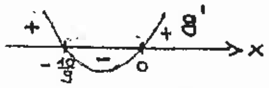
HS mit $\underline{a=2}$:

$$\begin{array}{c|cccccccc|}
 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
+ & 0 & 2 & 4 & 10 & 22 & 44 & 90 & 182 \\
\hline
= & 1 & 2 & 5 & 11 & 22 & 45 & 91 & \underline{183}
\end{array} \longrightarrow (?)_{10} = (183)_{10}\ !$$

Das Horner Schema kann sogar helfen, sich einer unbekannten Nullstelle von f anzunähern.
Z.B. ist im vorherigen Beispiel $f(x) = 3x^4 + 2x^3 - 5x^2 + x - 1$
$= (3x^3+5x^2+1)\cdot(x-1)$.

Demnach ist 1 eine nun bekannte Nullstelle von f, kurz $1 \in N_0(f)$.
Wir suchen nun $N_0(g)$ für $g(x) = 3x^3+5x^2+1$.

$g'(x) = 9x^2 + 10x = 9x\cdot(x+\frac{10}{9})$



$\Rightarrow$ $H_g(-\frac{10}{9} \mid 3\frac{14}{243})$ und $T_g(0|1)$, und $g(x) \longrightarrow -\infty$ für $x \longrightarrow -\infty$.

Es gibt also genau eine reelle Nullstelle von g, links von $-\frac{10}{9}$.
Wähle $a = -2$: $g(x) = 3\cdot x^3 + 5\cdot x^2 + 0\cdot x + 1$

0	−6	2	−4
3	−1	2	$\boxed{-3} = g(-2)$
0	−6	14	
3	−7	$\boxed{16} = g'(-2)$	

$$\Rightarrow \quad g(x) = -3 + 16\cdot(x+2) + (x+2)^2\cdot(3x-7) \quad !$$

Um sich der reellen Nullstelle von g weiter anzunähern, bedient man sich nun der Tangente an g im Arbeitspunkt A(−2|−3).
Man setzt dazu im Newtonschen Tangentenverfahren (NTV):

$$t_{-2}(x) = -3 + 16\cdot(x+2) \overset{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{29}{16}$$

Wähle nun $-\frac{29}{16}$ als Arbeitsstelle und setze das NTV fort:

3	5	0	1
0	−87/16	203/256	−5887/4096
3	−7/16	203/256	$\boxed{-1791/4096} = g(a)$
0	−87/16	1363/128	
3	−47/8	$\boxed{2929/256} = g'(a)$	

$$t_a(x) = g(a) + g'(a)\cdot(x-a) \overset{!}{=} 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad x = k(a) := \frac{a\cdot g'(a) - g(a)}{g'(a)}$$

$= -1{,}77428303\ldots$ ist neues a !

Mit $g(a) = 3a^3 + 5a^2 + 1$, $g'(a) = 9a^2 + 10a$, und damit (per TR)
folgt : $k(a) = \frac{a\cdot g'(a) - g(a)}{g'(a)} = \frac{a^2\cdot(6a+5)-1}{a\cdot(9a+10)} = -1{,}77273864\ldots$ etc.

und damit rekursiv (vgl. S. 39 !)

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1 = a \quad \wedge \quad x_{n+1} = k(x_n) \\ \text{bei } k(x) = \dfrac{x\cdot g'(x) - g(x)}{g'(x)} \end{array}}$$

NTV zur numerischen Lösung von $g(x) = 0$

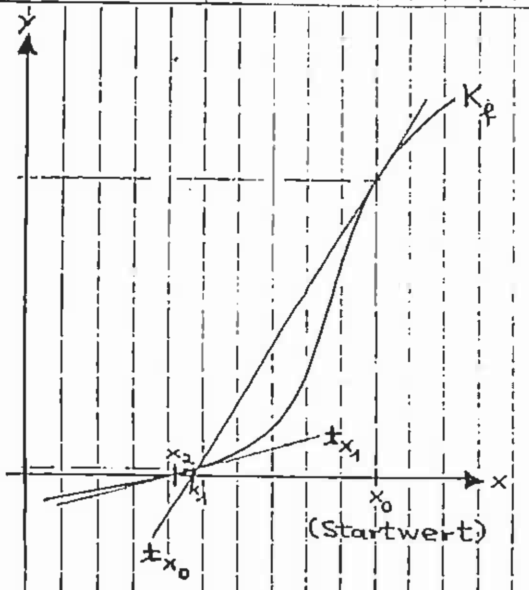
$\Rightarrow$

n	x_n (TR)
1	−2
2	−29/16 = −1,8125
3	−1,774283032
4	−1,772738647
5	−1,77273617
6	−1,77273617 (steht !)

$$\Rightarrow \quad N_0(f) = \underline{\{-1{,}77273617 \,;\, 1\}}$$

<u>Übung</u> : Ermitteln Sie in ähnlicher Weise alle Nullstellen der ganzrationalen Funktion f mit $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 1$!
Hinweis : Wählen Sie $x_1 \in \{-0{,}5 \,;\, 0{,}5 \,;\, 1{,}5\}$!

NEWTONsches Tangenten Verfahren



… zur Lösung einer Gleichung:

$$f(x) = 0$$

Tangente t_{x_0} an K_f im Punkt $(x_0 | f(x_0))$:

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$0 = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x_1 - x_0)$$

liefert

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

und analog allgemein

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}} =: k(x_n) \text{ mit } \boxed{k(x) := \frac{x \cdot f'(x) - f(x)}{f'(x)}}$$

Diese Iteration zur Bestimmung der Nullstelle x_∞ von f vermöge

$$x_\infty = \lim_{n \to \infty} x_n$$

heißt NTV (s.o.)!

Mitteilung: Liegen die x_n in einer Menge $\mathbb{M}$ und gelten

- f hat eine Nullstelle in $\mathbb{M}$
- für alle $x \in \mathbb{M}$: $f'(x) \neq 0$
- f ist konvex oder konkav auf $\mathbb{M}$
  $(f''(x) \geq 0)$ $(f''(x) \leq 0)$

dann konvergiert das **NTV** bei beliebigem Startwert $x_0 \in \mathbb{M}$ und zwar sogar monoton. Dabei gilt:

$$\boxed{x_\infty - x_{n+1} \leq \frac{\max\{|f''(x)| \mid x \in \mathbb{M}\}}{2 \min\{|f'(x)| \mid x \in \mathbb{M}\}} |x_{n+1} - x_n|^2}$$

Fehler-abschätzung

Beispiel: $f(x) = x^2 - 6$, $\mathbb{M} = [2; +\infty[$ (Wahl!)

!Anschauung!

$$\Longrightarrow \underline{x_{n+1}} = x_n - \frac{x_n^2 - 6}{2x_n} = \underline{\frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{6}{x_n}\right)}$$

NTV entspricht HERON-verfahren zur Best. v. √

Wähle $x_0 = 3$ $\Longrightarrow$ $x_1 = 2{,}5$ $\Longrightarrow$ $x_2 = 2{,}45$

Anmerkung: $\max\{|f'(x)| \mid x \in \mathbb{M}\} = 2$ und
$\min\{|f'(x)| \mid x \in \mathbb{M}\} = 4$

$$\Longrightarrow |\sqrt{6} - x_{n+1}| \leq \frac{1}{4} \cdot |x_{n+1} - x_n|^2 \text{ und für } n = 1$$

$$|\sqrt{6} - x_2| \leq 0{,}000625 \Longrightarrow \sqrt{6} \approx 2{,}45$$

TR-Wert
$\sqrt{6} = 2{,}44948974$

Interpolation mit ganzrationalen Funktionen : Newton-Interpolation

Interpolation : Schluss von zwei bekannten Funktionswerten auf Zwischenwerte (Bertelsmann : Die neue deutsche Rechtschreibung, S. 508)

In technischen Anwendungen will man oft einer gegebenen Messtabelle eine ganzrationale Funktion anpassen, um weitere Voraussagen treffen zu können, oder charakteristische Größen bestimmen zu können !

Z.B. :

Index	k	0	1	2	3
Stützstelle	x_k	0	2	5	7
Stützwert	y_k	-12	16	28	-54

zur Bestimmung der Koeffizienten a_i in $y = f(x) = \sum_{i=0}^{3} a_i \cdot x^i$

... mit 4 Koeffizienten a_0, a_1, a_2, a_3 entsprechend der vier Stützpunkte $P_k(x_k|y_k)$

Das ist prinzipiell durch Lösung des LGS : $f(x_k) = y_k$, $k \in \{0;1;2;3\}$ möglich, d.h. in dieser Normalform :

	a_0	a_1	a_2	a_3	
x=0 :	1	0	0	0	-12
x=2 :	1	2	4	8	16
x=5 :	1	5	25	125	28
x=7 :	1	7	49	343	-54

und zwar per GJV

Tatsächlich kann man nach Newton die ganzrationale Interpolationsfunktion f gleich so unter Berücksichtigung der Tabelle entwickeln, dass man gleich eine Stufenform zur Bestimmung von (anderen) Koeffizienten erhält :

$$f(x) = c_0 + c_1 \cdot (x-x_0) + c_2 \cdot (x-x_0)\cdot(x-x_1) + c_3 \cdot (x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)$$

Diese Newton-Interpolation (vgl. Pap. 1, S. 195 ff.) liefert nun die c_i wieder via $f(x_k) = y_k$, $k \in \{0;1;2;3\}$:

$x = x_0 = 0$: $c_0 = -12$

$x = x_1 = 2$: $c_0 + c_1 \cdot 2 = 16$

$x = x_2 = 5$: $c_0 + c_1 \cdot 5 + c_2 \cdot 5 \cdot 3 = 28$

$x = x_3 = 7$: $c_0 + c_1 \cdot 7 + c_2 \cdot 7 \cdot 5 + c_3 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2 = -54$

bzw. in Matrixform :

(bereits Stufenform !)

c_0	c_1	c_2	c_3		
1	0	0	0	-12	
1	2	0	0	16	$\mid - z_1 \mid : 2$
1	5	15	0	28	$\mid - z_1 \mid : 5$
1	7	35	70	-54	$\mid - z_1 \mid : 7$
1	0	0	0	-12	
0	1	0	0	14	
0	1	3	0	8	$\mid - z_2 \mid : 3$
0	1	5	10	-6	$\mid - z_2 \mid : 5$
1	0	0	0	-12	
0	1	0	0	14	
0	0	1	0	-2	
0	0	1	2	-4	$\mid - z_3 \mid : 2$
1	0	0	0	-12	
0	1	0	0	14	
0	0	1	0	-2	
0	0	0	1	-1	

$$\Rightarrow \quad f(x) = -12 + 14x - 2x\cdot(x-2) - x\cdot(x-2)\cdot(x-5) \;\ddot{=}\; \underline{\underline{-12 + 8x + 5x^2 - x^3}}$$

Aufgaben : A45 bis A47 und Z4 !

1.4.2 Exponentialfunktionen (10. Woche)

Erinnern Sie, wie man die Taylorentwicklung einer ganzrationalen Funktion f per Horner-Schema erhält, z.B.

$$f(x) = x^3 + 3x - 1 \quad ; \quad a = \tfrac{1}{3} \quad \text{(Arbeitsstelle)}$$

HS:

$$\begin{array}{llll}
1 & 0 & 3 & -1 \\
0 & 1/3 & 1/9 & 28/27 \\
1 & 1/3 & 28/9 & \boxed{1/27} = f(\tfrac{1}{3}) \\
0 & 1/3 & 2/9 & \\
1 & 2/3 & \boxed{10/3} = f'(\tfrac{1}{3}) & \\
0 & 1/3 & & \\
1 & \boxed{1} = \tfrac{1}{2}\cdot f''(\tfrac{1}{3}) & & \\
0 & & & \\
\boxed{1} = \tfrac{1}{6}\cdot f'''(\tfrac{1}{3}) & & &
\end{array}$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = (x-\tfrac{1}{3})^3 + (x-\tfrac{1}{3})^2 + \tfrac{10}{3}\cdot(x-\tfrac{1}{3}) + \tfrac{1}{27}$$

Allgemein werden Sie im 2. Semester für jede zweimal (stetig) differenzierbare Funktion f einsehen, dass

$$f(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \tfrac{1}{2}\cdot f''(z)\cdot(x-a)^2$$

für eine geeignete Zwischenstelle z zwischen x und a gilt. Dabei sollte das Intervall mit den Grenzen x und a in D_f liegen und a eine innere Stelle der Definitionsmenge D_f von f sein. Die Tangente t_a mit $t_a(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a)$ im Arbeitspunkt $A(a|f(a))$ nennt man auch Linearisierung oder lineare Näherung. Die quadratische Näherung q_a ist in entsprechender Weise durch

$$q_a(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \tfrac{1}{2}\cdot f''(a)\cdot(x-a)^2$$

gegeben. In obigem Beispiel ist $t_{1/3}(x) = \frac{1}{27} + \frac{10}{3}\cdot(x-\frac{1}{3})$ und

$$q_{1/3}(x) = \tfrac{1}{27} + \tfrac{10}{3}\cdot(x-\tfrac{1}{3}) + (x-\tfrac{1}{3})^2 .$$

In der Nähe von $\frac{1}{3}$ liegt die einzige reelle Nullstelle von f. Überzeugen Sie sich selbst davon, dass man durch Lösung von $q_{1/3}(x) = 0$ eine bessere Näherung dieser Nullstelle erhält als durch Lösung von $t_{1/3}(x) = 0$ (NTV!).

Ergebnis: $t_{1/3}(x) = 0 \Leftrightarrow x = 29/90 = 0{,}3\overline{2}$

$$q_{1/3}(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\tfrac{4}{3} \overset{(-)}{+} \sqrt{\tfrac{74}{27}} = 0{,}322184936\ldots$$

$$\left(\text{exakte Lösung: } \sqrt[3]{\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}} - \sqrt[3]{\tfrac{2}{1+\sqrt{5}}} = 0{,}322185354(617)\ldots!\right).$$

Da es für nicht ganzrationale Funktionen auch kein Horner-Schema gibt, muss man die zur Taylorentwicklung notwendigen Ableitungen in anderer Weise bestimmen, am besten natürlich mit möglichst geringem Aufwand.
In dieser Hinsicht haben Sie mit einer in allen wissenschaftlichen Disziplinen wichtigen Funktion keine Arbeit.
Es handelt sich hier um die natürliche Exponentialfunktion exp mit den eindeutig beschreibenden Eigenschaften

$$\exp' = \exp \quad \wedge \quad \exp(0) = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \exp(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots = e^x$$ symbolisch und konsistent mit den Potenzregeln!

Bemerkungen :

a) $\exp(1) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots = 2{,}718281828459045\ldots = e$

wird Eulersche Zahl genannt und ist tatsächlich irrational !

b) Für Interessierte sei an dieser Stelle die Konsistenz des Symbols e^x mit der 1. Potenzregel bewiesen :

$$\begin{aligned} \exp(a+b) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \cdot (a+b)^i && \Big|\ \text{binomische Formel} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} \cdot a^k \cdot b^{i-k} && \Big|\ \binom{i}{k} = \frac{i!}{k! \cdot (i-k)!} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{i} \frac{a^k}{k!} \frac{b^{i-k}}{(i-k)!} && \Big|\ \Big(\sum_{k=0}^{\infty} c_k\Big) \cdot \Big(\sum_{\ell=0}^{\infty} d_\ell\Big) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{i} c_k \cdot d_{i-k} \\ & && \quad (\text{Cauchy-Produkt}) \\ &= \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}\Big) \cdot \Big(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{b^\ell}{\ell!}\Big) \\ &= \exp(a) \cdot \exp(b) \iff e^{a+b} = e^a \cdot e^b \quad ! \end{aligned}$$

c) $\exp$ ist wegen $\exp'(x) = \exp(x) = e^x > 0$ streng monoton wachsend. Daher ist die Umkehrrelation $\exp^{-1}$ ebenfalls eine Funktion, der natürliche Logarithmus (logarithmus naturalis) $\boxed{\ln = \exp^{-1}}$,

$$\begin{tikzcd} \ln(e^x) = \ln(y) = x \arrow[r, bend left, "\exp"] & y = e^x = e^{\ln(y)} \arrow[l, bend left, "\ln"] \end{tikzcd} \quad !$$

d) Ein großer Vorteil von exp und ln ist neben ihrer natürlichen Einfachheit die Generierung einer beliebigen Exponentialfunktion, eines beliebigen Logarithmus : Wir definieren für $1 \neq b > 0$

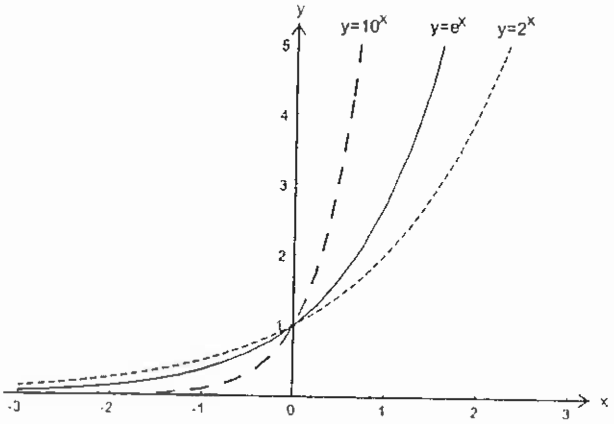
$$\boxed{b^x = \exp_b(x) := \exp(x \cdot \ln(b)) = e^{x \cdot \ln(b)}} \quad \text{und}$$

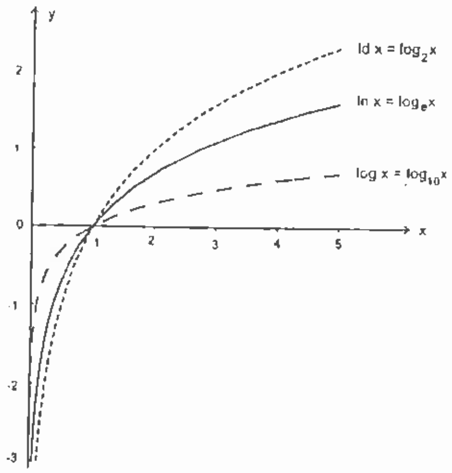
und wegen $x = b^y \iff x = e^{y \cdot \ln(b)} \iff \ln(x) = y \cdot \ln(b)$

$$\iff \boxed{\log_b(x) := \frac{\ln(x)}{\ln(b)}} = y \quad !$$

$\exp_b$ ist die Exponentialfunktion zur Basis b ,
$\log_b$ ist der Logarithmus zur Basis b !

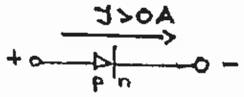
Gängig sind die Basen 2 , e und 10 ...



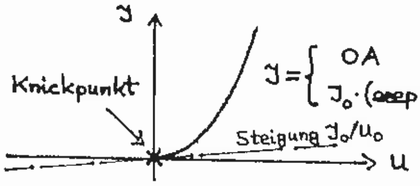


Beispiele :

a) Ideale Diodenkennlinie :



(Durchlasspolung, $U > 0V$)



$$I = \begin{cases} 0A & \text{für } U < 0V \\ I_0 \cdot (\exp(\frac{U}{U_0}) - 1) & \text{für } U \geq 0V \end{cases}$$ (ideal!)

… mit dem differentiellen Widerstand

$$r_0 = \frac{U_0}{I_0} = \frac{1}{\frac{dI}{dU}\Big|_{U=0}}$$

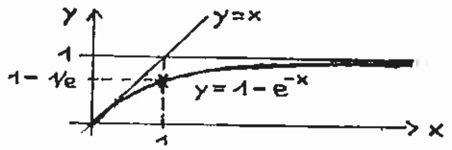
typisch: $U_0 = 26\,mV$ und $I_0 = 4 \cdot 10^{-12} A$

$\Rightarrow r_0 = 6{,}5 \cdot 10^9 \Omega = 6{,}5\,G\Omega$ (im Arbeitspunkt $A(0V|0A)$)

$\Rightarrow \frac{1}{r_0} \approx 1{,}5 \cdot 10^{-10} \frac{1}{\Omega}$ … fällt als Steigung kaum auf!

Real gibt es bei einer zu stark negativen Spannung U einen Durchbruch der Elektronen, was zu einem stark negativen Sperrstrom führt ($U_0 = k_B \cdot T/e_0$ und $I_0 \sim \exp(-(E_L - E_V)/(k_B \cdot T))$, $k_B = 1{,}381 \cdot 10^{-23} J/K$) !

b) Aufladen eines Kondensators : (vgl. A49 und „Kuchling", S.437 !)



$y = \frac{U_C}{U}$

$x = \frac{t}{R \cdot C}$

$U_C(t) = U \cdot (1 - \exp(-\frac{t}{R \cdot C}))$

angelegte Gleichspannung (zum Aufladen!)

$\Rightarrow Q_C(t) = C \cdot U_C(t) = C \cdot U \cdot (1 - \exp(-\frac{t}{R \cdot C}))$

mit dem Sättigungswert $C \cdot U$ der Kondensatorladung !

c) $f(x) = e^{kx}$. $f'(x) = ?$ ohne Kettenregel !

⌜ $f(x) = e^{kx} = \exp(kx) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(kx)^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{k^i}{i!} \cdot x^i$

$\Rightarrow f'(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k^i}{i!} \cdot i \cdot x^{i-1} = k \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(kx)^{i-1}}{(i-1)!} = k \cdot \exp(kx) = \underline{\underline{k \cdot e^{kx}}}$! ⌟

Bestimmen Sie analog nun $f'(x)$ für $f(x) = \exp(-x^2)$!

⌜

⌟

d) Man spricht von exponentieller Änderung (Wachstum, Zerfall) eines Bestandes $B(t)$ (> 0), falls die folgende Differentialgleichung erfüllt wird : $\boxed{\dot{B}(t) = k \cdot B(t)}$

($k < 0 \Rightarrow$ Zerfall, $k > 0 \Rightarrow$ Wachstum) mit $\dot{B} = \frac{dB}{dt}$ = Zeitableitung.

z.B. $k = \ln(1{,}02) > 0$ bei Zinseszins zu 2% p.a.
$k = \ln(0{,}999879) < 0$ beim ${}^{14}_{6}C$ Zerfall in ${}^{14}_{7}N + e^-$
(Halbwertszeit $T_H = -\frac{\ln(2)}{k} \approx 5730\,a$)

$\Leftrightarrow \boxed{B(t) = B(0) \cdot \exp(k \cdot t)}$! Bestätigen Sie die Folgerung aus obiger Differentialgleichung !

e) Unter beschränkter Änderung eines Bestandes B(t) versteht man, dass die Bestandsfunktion der folgenden Differentialgleichung genügt: $\boxed{\dot{B}(t) = k\cdot(S-B(t))}$ bei $k>0$

Zur Lösung substituiert man $D(t) := S - B(t)$!
Setzen Sie nun ein und lösen Sie das Problem mithilfe von d) !

Ergebnis: $\boxed{B(t) = S-(S-B(0))\cdot \exp(-kt)}$

Skizzieren Sie B für $S > B(0)$ und für $S < B(0)$!

f) Zur logistischen Änderung eines Bestandes B(t) gehört die Differentialgleichung $\boxed{\dot{B}(t) = k\cdot B(t)\cdot(S-B(t))}$ für $k>0$

Die Substitution $Q(t) = \frac{S}{B(t)}$ ergibt dazu äquivalent $\boxed{\dot{Q}(t) = k\cdot S\cdot(1-Q(t))}$

offenbar vom „Typ e)", so dass $Q(t) = 1-(1-Q(0))\cdot \exp(-kSt)$

$$\Longleftrightarrow \boxed{B(t) = \frac{S}{1-\left(1-\frac{S}{B(0)}\right)\cdot \exp(-kSt)}}$$

... ein eventuell schon aus der Schule (Oberstufe!) bekanntes Ergebnis, hier relativ einfach (und eindeutig!) hergeleitet!

Skizzieren Sie den Fall $0 < B(0) = \frac{S}{2}$!

g) Die Differentialgleichung einer harmonischen Schwingung eines Bestandes B(t) ist $\boxed{\ddot{B}(t) + \omega^2\cdot B(t) = 0}$ bei $\omega > 0$ (s^{-1}) !

Sie kennen aus der Physik die allgemeine reelle Lösung: $\boxed{B(t) = \hat{B}\cdot \cos(\omega t+\varphi)}$

($\hat{B} > 0$ ist die Amplitude, φ die Phase!)

Übrigens löst auch $B(t) = \exp(j\omega t)$, $j^2=-1$, ebenso wie
$B(t) = \exp(-j\omega t)$
die obige Differentialgleichung der harmonischen Schwingung mit der Kreisfrequenz ω !

Finden Sie zu Hause einen Zusammenhang zwischen $\exp(j\omega t)$, $\cos(\omega t)$ und $\sin(\omega t)$ heraus!

Aufgaben: A48 bis A50, „Weitere Aufgaben..." $\boxed{1.}$ bis $\boxed{5.}$, Z5 !

A1 Vereinfachen Sie soweit möglich (ohne Taschenrechner !) :

a) $\frac{5}{3}+\frac{7}{8}$ b) $\frac{5}{3}+\frac{7}{9}$ c) $\frac{4}{15}+\frac{8}{9}$ d) $\frac{3}{17}-\frac{1}{2}$ e) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$

f) $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}$ g) $\frac{u-v}{uv}-\frac{u-w}{uw}+\frac{v-w}{vw}$ h) $\frac{x}{4x-8}-\frac{2x}{3x+6}+\frac{2x^2-9x}{5x^2-20}$

i) $\dfrac{\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a-b}}{1-\frac{a}{a-b}}$ j) $\frac{4u^2-16v^2}{3\cdot(u+v)}:\frac{2u-4v}{3u+6v}$ k) $\frac{x-2}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}$ l) $\sqrt[4]{4}\cdot(\sqrt{\sqrt[3]{2}})^3$

m) $\dfrac{\sqrt{a^3\cdot b^7\cdot c^5}}{\sqrt[4]{a^2\cdot b^6\cdot c^{22}}}$ n) $(\sqrt{5}-\sqrt{4})\cdot\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{4}}$ o) $\ln(b^{(r^s)})$ p) $\log_5(\frac{1}{125})$

q) $\log_8(512)$ r) $\sqrt{e^{\ln(15)+2\cdot\ln(2)-\ln(12)}}$

s) $[(e^{128}+3)^3-9\cdot e^{256}-26\cdot e^{128}-27-e^{384}]^{\frac{1}{128}}$

A2 Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ der Gleichung für $\mathbb{G}=\mathbb{R}$!

a) $x^2-8x+12=0$ b) $2x^2+4x-22{,}5=0$ c) $3x^2-24x+48=0$

d) $3x^2-39x+120=0$ e) $x^2-6x+10=0$ f) $x^2-1{,}2x+0{,}32=0$

g) $x^2+3x+2{,}25=0$ h) $5x^2+11x+5{,}6=0$ i) $3x^2-5x+4=0$

j) $x^4-26x^2+25=0$ k) $3x^4-21x^2-54=0$ l) $x^4-\frac{145}{36}x^2=-4$

m) $2x^9-12x^8+10x^7=0$ n) $x^8+4x^7-12x^6=0$ o) $2x^3+1=3x$

p) $x^4+x^3+48=16x^2+4x$

A3 Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ für $\mathbb{G}=\mathbb{R}$!

a) $x^2+12x>0$ b) $5x^2-12x<0$ c) $x^2-10x+16>0$

d) $x^2+2x+2<0$ e) $x^8-4x^6>0$ f) $x^6-2x^5-15x^4<0$

g) $x-2\sqrt{x}-3<0$ h) $e^x\cdot(e^x-4)+3>0$ i) $\frac{1}{x+1}-\frac{x}{x+4}<0$

A4 a) Zeigen Sie per Widerspruchsbeweis : $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$!

b) Können Sie für $R:=\{M \mid M\notin M\}$ entscheiden, ob $R\in R$ oder $R\notin R$?

c) Welches Rechteck hat bei festem Flächeninhalt A den kleinsten Umfang u ?

d) Vor langer Zeit lebte in Arabien ein alter Araber. Seine Familie bestand aus 2 Söhnen, einer Tochter und 17 Kamelen. Er verfügte in seinem Testament :

„Mein erster Sohn soll die Hälfte, mein zweiter Sohn soll ein Drittel, meine Tochter ein Neuntel erhalten ! "

Wie viele Kamele erhalten der erste Sohn, der zweite Sohn, die Tochter nach seinem Tod, ohne eines zu töten ?

A5 Geben Sie alle möglichen binären Relationen nebst D_R und W_R mithilfe von Tabelle und Mengen X, Y, Z der Vorlesung an! Welche davon sind Funktionen?

A6 Skizzieren Sie die Funktion f mit maximaler reeller Definitionsmenge sowie ihre Umkehrrelation f^{-1} (ohne TR)! Ermitteln Sie $f \cap f^{-1}$ mindestens graphisch!

a) $f(x) = 2\cdot(x-1)-3$ b) $f(x) = 2\cdot|x-1|-3$ c) $f(x) = \tan(x)$, $|x| \leq \frac{\pi}{2}$

d) $f(x) = x^3$ e) $f(x) = \frac{1}{x}$ f) $f(x) = 4-(x-2)^2$

g) $f(x) = \frac{1}{x-1}$ h) $f(x) = \sin(x)$, $|x| \leq \pi$ i) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

A7 M_a, M_b, M_c sind die Seitenmittelpunkte des Dreiecks ABC mit den Eckpunkten $A(-2|-2)$, $B(8|0)$, $C(6|4)$.

a) Berechnen Sie die Vektoren $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{M_aM_b}, \overrightarrow{M_bM_c}, \overrightarrow{M_cM_a}$ sowie ihre Längen!
Vergleichen Sie die Dreiecke ABC und $M_aM_bM_c$!

b) Die Seitenhalbierenden (AM_a), (BM_b) und (CM_c), also die Geraden durch die jeweils angegebenen Punkte, schneiden sich im Schwerpunkt S des Dreiecks ABC.
Bestimmen Sie den Ortsvektor $\vec{s} := \overrightarrow{OS}$ des Schwerpunktes in Abhängigkeit von den Ortsvektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ der Punkte A, B, C !

A8 Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}0\\-1\\4\end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix}6\\-1\\2\end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie die Vektoren und ihre Längen:

$\vec{x} = -\vec{a}\cdot 2 + \vec{b}\cdot 3 + \vec{c}\cdot 5$, $\vec{y} = (\vec{b} - \vec{a}\cdot 3)\cdot 5 - \vec{c}\cdot 2$, $\vec{z} = (\vec{a}+\vec{b})\cdot 3 - (\vec{b}-\vec{c})\cdot 5 + \vec{a}$!

b) Bildet die Menge $\{\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^{3\times 1}$?

c) Ermitteln Sie, falls möglich, für alle kanonischen Einheitsvektoren
$\vec{e_1} := \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e_2} := \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e_3} := \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$
eine jeweils darstellende Linearkombination der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$!

d) Können Sie einen Punkt D so benennen, dass das Viereck ABCD mit den Ortsvektoren
$\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$
ein Parallelogramm ist ?

A9 a) Zeigen Sie, dass $\{1; x; x^2; x^3\}$ eine Basis des Vektorraumes aller kubischen Polynome ist !

b) Ist auch $\{1; (x-1); (x-1)\cdot(x-2); (x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)\}$ eine Basis des Vektorraumes aller kubischen Polynome ?

c) Eine ganzrationale Funktion f dritten Grades genügt der folgenden Tabelle:

x	1	2	3	4
y	0	17	76	201

Bestimmen Sie damit f(x) und alle Nullstellen von f !

Berechnen Sie die Innenwinkel und Flächeninhalte der folgenden Mehrecke :

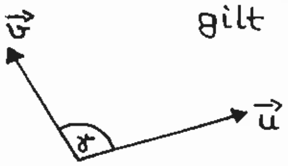
a) Viereck ABCD mit A(-3|-3), B(2|-2), C(3|5), D(-2|4) !

b) Dreieck ABC mit A(-2|-2), B(8|0), C(6|4) !

c) Dreieck ABC mit A(-1|1|1), B(2|1|3), C(-1|-1|1) !

d) Viereck ABCD mit A(-2|3|1), B(0|-1|4), C(6|-1|2), D(4|3|-1) !

Hinweis : Sie können hier davon ausgehen, dass auch in $\mathbb{R}^{3\times 1}$ gilt (Können Sie es auch zeigen ?) :



$$\boxed{u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3 = \vec{u} \bullet \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\gamma)}$$

$$(\gamma \in [0;\pi])$$

A11 Berechnen Sie die ebenen Polarkoordinaten der Vektoren

a) $\vec{a} = \binom{3}{4}$ b) $\vec{b} = \binom{-1}{2}$ c) $\vec{c} = \binom{\sqrt{3}}{-3}$ d) $\vec{d} = \binom{-1-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}}$

Hinweis : Überlegen Sie sich im Zweifelsfall, in welchen Quadranten der Vektor zeigt !

A12 Auf eine Punktmasse wirken drei Kräfte $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ und $\vec{F}_3$. $\vec{F}_1$ hat einen Betrag von 4 N und einen Polarwinkel von 45°, $\vec{F}_2$ greift unter einem Winkel von 120° mit einem Betrag von 3 N an, während $\vec{F}_3$ einen Winkel von -30° und einen Betrag von 2 N hat.

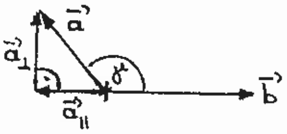
a) Bestimmen Sie die kartesische Koordinatendarstellung der angreifenden Kräfte !

b) Berechnen Sie die Resultierende bzw. Gesamtkraft $\vec{F}$!

c) Bestimmen Sie zeichnerisch die resultierende Kraft $\vec{F}$, ihren Betrag und den Winkel, unter dem sie an den Massenpunkt angreift !

d) Berechnen Sie den Betrag und den Winkel aus c) !

A13 Bekanntlich kann man jeden Vektor $\vec{a}$ in einen Parallelanteil $\vec{a}_{\parallel}$ parallel zu $\vec{b} \neq 0$ und einen Orthogonalanteil $\vec{a}_{\perp}$ senkrecht zu $\vec{b}$ zerlegen.



a) Zeigen Sie mithilfe des Euklidischen Skalarproduktes :

$$\vec{a}_{\parallel} = \vec{b} \cdot \frac{\vec{b} \bullet \vec{a}}{\vec{b} \bullet \vec{b}} \quad \text{(Orthogonalprojektion von } \vec{a} \text{ auf } \vec{b}\text{)} \ !$$

b) Berechnen Sie mithilfe von a) die Flächeninhalte von A10 !

A14 Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften des Vektorproduktes :

a) $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \quad \wedge \quad \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \quad \wedge \quad \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1$

b) $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u} \quad \wedge \quad \vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w} \cdot s) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w} \cdot s$

c) $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{o} \quad \wedge \quad (\vec{u} \times \vec{v}) \bullet (\vec{u} \times \vec{v}) = |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \bullet \vec{v})^2$

d) $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin(\varphi)$ mit $\varphi = |\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})| \in [0; \pi]$

A15 Untersuchen Sie die folgenden Mengen auf lineare Unabhängigkeit (Orthogonalität , Linkssystem, Rechtssystem ?) :

a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ b) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ c) $\left\{ \begin{pmatrix} \cos(\lambda) \\ \sin(\lambda) \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -\sin(\lambda) \\ \cos(\lambda) \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

d) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} r \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, r \in \mathbb{R}$ e) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

A16 Berechnen Sie sowohl den Oberflächeninhalt als auch den Volumeninhalt des Vierflachs mit den Eckpunkten

a) A(0|0|0), B(1|7|3), C(2|-3|4), D(6|1|10)

b) E(-1|0|5), F(2|2|2), G(3|2|0), H(6|1|2)

c) I(π|0|0), J(0|π|0), K(0|0|π), L(π|π|π)

A17 a) Bestimmen Sie einen Vektor $\vec{c}$, so dass

$$\left\{ \begin{pmatrix} -\cos(\lambda)\sin(\beta) \\ -\sin(\lambda)\sin(\beta) \\ \cos(\beta) \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \cos(\lambda)\cos(\beta) \\ \sin(\lambda)\cos(\beta) \\ \sin(\beta) \end{pmatrix}; \vec{c} \right\}$$

ein orthonormales Rechtssystem ist !

b) Bestimmen Sie das Skalarprodukt und das Vektorprodukt der beiden Vektoren

$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos(\beta) \\ \sin(\beta) \\ 0 \end{pmatrix}$, und bestätigen Sie damit die beiden

Additionstheoreme : $\cos(\beta - \alpha) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$,
$\sin(\beta - \alpha) = \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta)$!

c)* Zeigen Sie , dass es für jede Linearkombination

$$s_1 \cdot \cos(x) + s_2 \cdot \sin(x) \quad \text{mit} \quad s_1 \in \mathbb{R}, \; s_2 \in \mathbb{R}$$

eine Amplitude $A \geq 0$ und einen Phasenwinkel $\varphi \in]-\pi; \pi]$ gibt mit

$$s_1 \cdot \cos(x) + s_2 \cdot \sin(x) = A \cdot \sin(x - \varphi) \quad !$$

A18 Zeigen Sie für alle $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$: $(\vec{u} \times \vec{v}) \bullet \vec{w} = (\vec{w} \times \vec{u}) \bullet \vec{v}$!

(D.h. : Das Spatprodukt ist zyklisch !)

A19 Bestimmen Sie je eine Gleichung für die Gerade g mit $A(1|0|3) \in g$ und $B(1|3|2) \in g$, h mit

$$\vec{r}_h = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C(4|-6|1) \in h \ !$$

Wie liegen beide Geraden relativ zueinander im $\mathbb{R}^3$? Bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Abstand mithilfe einer einfachen Formel !

Wie ermitteln Sie die Schnittmenge $g \cap E$ allgemein ? Wann hat $g \cap E$ genau ein Element ?

Wie rechnen Sie nach, ob eine Gerade g Sekante, Tangente oder Passante einer Kugel ist ?

A20 Bestimmen Sie die Schnittmenge, gegebenenfalls Schnittwinkel oder Abstand !

a) $E_1 \cap E_2$ b) $E_1 \cap E_3$ c) $E_2 \cap E_3$ d) $E_1 \cap E_2 \cap E_3$ (Skizze!)

für $E_1 = (ABC)$ mit $A(2|4|-1)$, $B(3|7|-5)$, $C(-1|9|-10)$;
E_2, bezüglich der $P(7|5|7)$ und $Q(-1|1|-5)$ spiegelbildlich liegen ;
E_3 : $2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0$!

A21 Ein starrer Körper rotiert um eine Gerade durch den Ursprung mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{100\,\pi}{\sqrt{14}\ s} \quad (\text{Frequenz } 50\ \text{Hz}) \ .$$

Der Punkt $P(3|2|3)$ sei der Ort eines Punktes des starren Körpers zur Zeit $t = 0$.

a) Beschreiben Sie die Bahn dieses Körperpunktes durch eine geeignete Parameterdarstellung $\vec{p}\,(t)$!

b) Wo befindet sich besagter Punkt zur Zeit $t = 0{,}02\,s$ ($59{,}95\,s$; $999{,}995\,s$) ?

c) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ und die Beschleunigung $\vec{a}(t)$ dieses Massenpunktes sowie ihre Beträge $|\vec{v}(t)|$ und $|\vec{a}(t)|$ (1 LE = 1 cm) !

d) Überprüfen Sie rechnerisch, ob $\{\vec{\omega}_0 ; \vec{v}(t) \cdot |\vec{v}(t)|^{-1} ; \vec{a}(t) \cdot |\vec{a}(t)|^{-1}\}$ ein orthonormales Rechtssystem ist !

A22 Die folgenden Probleme sind eindeutig lösbar. Tun Sie es!

a) Zeigen Sie: $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$ ist linear unabhängig!

b) Lösen Sie das LGS:

$$2x_1 - 5x_2 + 7x_3 = 1 \quad \wedge \quad 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 \quad \wedge \quad x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 2 \quad !$$

c) Welche Parabel 2. Ordnung geht durch die Punkte A(-1|9), B(3|13), C(-2|18) ?

d) Eine zum Ursprung punktsymmetrische Parabel 5. Ordnung hat in O(0|0) die Gerade g: $y = 7x$ als Tangente und in W(1|0) einen Wendepunkt.
Wie lautet ihre Funktionsgleichung ?

A23 a) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

eine Basis von $\mathbb{R}^{3\times 1}$ bilden!

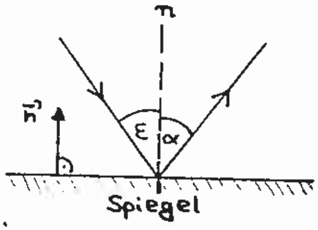
b) Ermitteln Sie daraus eine orthogonale Basis $\{\vec{b}_1 ; \vec{b}_2 ; \vec{b}_3\}$ per Ansatz:

$$\vec{b}_1 := \vec{a}_1 \quad \wedge \quad \vec{b}_2 := \vec{a}_2 - \vec{b}_1 \cdot r \quad \wedge \quad \vec{b}_3 := \vec{a}_3 - \vec{b}_1 \cdot s - \vec{b}_2 \cdot t \qquad !$$

c) Können Sie auch, und zwar mithilfe von b), eine ONB angeben ?

A24 (Prinzip des Rückstrahlers)

Bei der Reflexion eines Lichtstrahls an einem ebenen Spiegel gilt aufgrund des Huygensschen Prinzips:



- Einfallender Strahl, Normale des Spiegels und reflektierter Strahl liegen in einer Ebene!
- Einfallswinkel ε und Ausfallswinkel α sind gleich weit!

a) Ein Lichtstrahl mit Richtungsvektor $\vec{s}$ wird an einem Spiegel mit Normalenvektor $\vec{n}$ reflektiert.
Bestimmen Sie die Richtung des reflektierten Strahls in Abhängigkeit von $\vec{s}$ und $\vec{n}$!

b) Ein Lichtstrahl falle vom Punkt A(2|1|3) ausgehend längs der Geraden g:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \frac{c_0 \cdot t}{\sqrt{6}} \quad \wedge \quad t \geq 0 \quad \wedge \quad c_0 = 299792458$$

auf ein System paarweise senkrechter Spiegel, welche in den drei Koordinatenebenen eines kartesischen Koordinatensystems angebracht sind.
Verfolgen Sie den Weg des Lichtstrahls und geben Sie eine Gleichung der Geraden an, entlang der der Strahl nach drei Reflexionen das System wieder verlässt! Was fällt auf ?

A25 Gegeben sind die Matrizen

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{C} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie soweit möglich $\underline{A}\cdot\underline{B}$, $\underline{B}\cdot\underline{A}$, $(\underline{A}\cdot\underline{B})\cdot\underline{C}$, $\underline{A}\cdot(\underline{B}\cdot\underline{C})$, $\underline{A}^2 - \underline{B}\cdot\underline{C}$, $\underline{C}\cdot\underline{B} - 2\,\underline{1}_2$, $(\underline{A}\cdot\underline{B})^T$, $\underline{A}^T\cdot\underline{B}^T$, $\underline{B}^T\cdot\underline{A}^T$, $\underline{A}\cdot(\underline{B}+\underline{C}^T)$, $(\underline{C}\cdot\underline{A}+\underline{B}^T)^T$, $\underline{B}+\underline{A}^T\cdot\underline{C}^T$ sowie $\underline{A}^{-1}$ durch Auflösung der Gleichung $\underline{A}\cdot\underline{X} = \underline{1}_3$ nach $\underline{X}$!

A26 Berechnen Sie $\underline{A}^2$, $\underline{A}^3$, $\underline{A}^4$! Wie lautet vermutlich $\underline{A}^n$ für $n \in \mathbb{N}_0$?

a) $\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ b) $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

A27 Berechnen Sie für die Matrizen $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ und $\underline{B} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ reelle Zahlen a, b und c, so dass die erste Zeile der Matrix

a) $5\underline{A} - 4\underline{B}$ b) $\underline{A}\cdot\underline{B}$ c) $\underline{B}\cdot\underline{A}$ genau $(1|-2|4)$ ist !

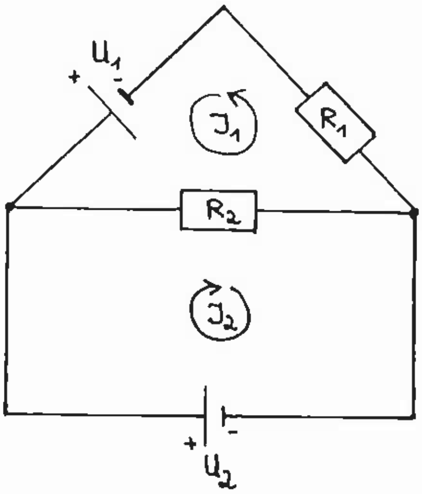
A28 a) Ermitteln Sie per Ansatz $\underline{A}\cdot\underline{X} = \underline{1}_2$ eine Formel für die Inverse einer (2×2)-Matrix $\underline{A}$!

b) Bestimmen Sie die Widerstandsmatrix $\underline{R}$ des folgenden Netzwerks, so dass $\underline{U} = \underline{R}\cdot\underline{J}$ (Ohmsches Gesetz)

und $\underline{U}$, $\underline{J}$ die Spaltenvektoren der gekennzeichneten Quellspannungen und (Ersatz-) Stromstärken sind,

mithilfe der Maschenregel :

„Die Summe aller Spannungen in einer Masche ist 0 Volt"!



Wie lautet die zugehörige elektrische Leitwertmatrix $\underline{R}^{-1}$?

Wie stark ist der elektrische Gleichstrom durch den Widerstand R_2 bei $R_1 = R_2 = 100\,\Omega$ und $U_1 = 2V$; $U_2 = 1{,}5V$? Wie ist er orientiert (Zeichnen Sie ein !) ?

A29 Lösen Sie das LGS $\underline{A}\cdot\underline{x}=\underline{b}$ erst allgemein per GJV, und dann für die angegebene spezielle ~~Inhomogenität~~ $\underline{b}$ auch zeichnerisch !

a) $\underline{A}=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}, \underline{b}=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$ b) $\underline{A}=\begin{pmatrix}2&4\\3&6\end{pmatrix}, \underline{b}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ c) $\underline{A}=\begin{pmatrix}1&2\\3&6\end{pmatrix}, \underline{b}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

A30 Lösen Sie das LGS erst allgemein, und dann erst für die angegebene Inhomogenität !

a) $\begin{aligned}2x_1+x_2-2x_3&=10\\3x_1+2x_2+2x_3&=1\\5x_1+4x_2+3x_3&=4\end{aligned}$ b) $\begin{aligned}2x_2-x_3&=15\\4x_1\quad+5x_3&=33\\x_1+x_2\quad&=12\end{aligned}$ c) $\begin{aligned}2x_1+x_2-2x_3&=1\\x_1-x_2+4x_3&=2\end{aligned}$

d) $\begin{aligned}100x_1-20x_2-40x_3&=300\\-30x_1+206x_2-28x_3&=150\\-40x_1-32x_2+96x_3&=120\end{aligned}$ e) $\begin{array}{cccc|cccc}x_1&x_2&x_3&x_4&2&1&0&0\\\hline 1&1&1&3&1&0&0&0\\1&-1&1&2&0&1&0&0\\2&1&5&2&0&0&1&0\\1&1&-3&-1&0&0&0&1\end{array}$

Wie lautet in c) die spezielle Lösung für $x_1=0$ ($x_1=\frac{5}{2}$) ?

A31 Bestimmen Sie via GJV ...

a) $\underline{J}$ aus $\underline{U}=\underline{R}\cdot\underline{J}$ nebst $\underline{R}^{-1}$ in A28b) !

b) die Lösungsmenge des LGS : $\begin{aligned}x_1+\quad 2x_3-5x_4&=0\\x_1+4x_2+4x_3-5x_4&=10c\\x_1+2x_2+3x_3-5x_4&=5c\\4x_1+2x_2+9x_3-20x_4&=5c\end{aligned}$

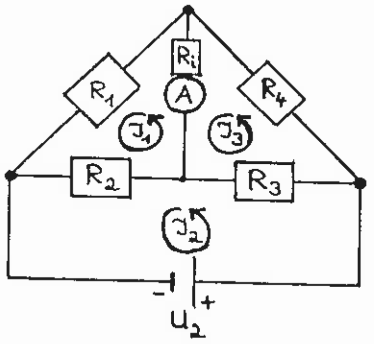
in Abhängigkeit von $c\in\mathbb{R}$!

c) die Lösungsmenge von $\begin{pmatrix}0{,}7&0{,}1&0{,}1\\0{,}2&0{,}6&0{,}1\\0{,}1&0{,}3&0{,}8\end{pmatrix}\cdot\underline{x}=\underline{x}\cdot\lambda$ abhängig von $\lambda\in\mathbb{R}$!

d) die Lösungsmenge des LGS $\begin{aligned}x_1+5x_2+3x_3+2\cdot x_4&=-1\\3x_1-4x_2+2\cdot x_3+8\cdot x_4&=1\\-x_1+14\cdot x_2+4\cdot x_3-a^2\cdot x_4&=a-1\\9\cdot x_1+7\cdot x_2+14x_3+22\cdot x_4&=-1\end{aligned}$

in Abhängigkeit von $a\in\mathbb{R}$!

A32 Wheatstone'sche Brücke zur Bestimmung des Ohmschen Widerstands R_4 (R_1 bekannt) per Variation von R_2 und R_3 bis $J_1=J_3$!



a) Bestimmen Sie die Widerstandsmatrix $\underline{R}$, so dass $\underline{U}=\underline{R}\cdot\underline{J}$, mithilfe der Maschenregel und den drei gekennzeichneten Maschen !

b) Bestimmen Sie die Inverse $\underline{R}^{-1}$ per GJV oder mittels Cramer-Regel !

c) Wie hängt R_4 von den übrigen Widerständen im Fall $J_1=J_3$ ab ? Wie groß sind R_4, $J_1=J_3$ für $R_1=10\,\Omega$, $R_2=2R_1$, $R_3=3R_1$, $R_i=\frac{1}{2}\,\Omega$ und $U_2=\frac{9}{2}\,V$?

Aufgaben (zu Matrizengleichungen, zur Wiederholung)

1. Lösen Sie folgende Matrizengleichungen nach $\underline{X}$ auf.

a) $\underline{A}\cdot\underline{X} + 2\cdot\underline{B} = 3\,(\underline{X} + \underline{C})$
b) $2\,\underline{A}\cdot\underline{X} + 3\underline{B} = 4\,(\underline{X} - \underline{C})$
c) $\frac{3}{2}\,\underline{A}\cdot\underline{X} - 2\underline{B} = \frac{1}{2}\,(\underline{X} - \underline{C})$
d) $(\underline{A}\cdot\underline{X}^T)^T - \underline{X}\cdot\underline{B} - 3\underline{X} = \underline{1}$
e) $2\underline{A}\cdot\underline{X} + \underline{B}\cdot\underline{X} - 3\underline{C} = 2\,(\underline{X} - \underline{C}) + 3\underline{B}$
f) $(\underline{X}\cdot\underline{B})\cdot(\underline{A}^{-1}\cdot\underline{X}\cdot\underline{B})^{-1} = \underline{1}$
g) $\underline{X}\cdot\underline{A}\cdot\underline{B} - \underline{A} - \underline{X}\cdot\underline{C} = \underline{M}$
h) $\underline{A}\cdot\underline{X}\cdot\underline{B} = \underline{C}$
i) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\underline{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
j) $\underline{X}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. Bestimmen Sie die Matrix $\underline{X}$ so, dass mit den gegebenen Matrizen $\underline{A}$ und $\underline{B}$ gilt:

$\underline{A}\cdot\underline{X} + \underline{B} = \underline{A}$

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Bestimmen Sie die Lösungsmatrix $\underline{X}$ aus folgender Aussageform:

$$\underline{X}\cdot\underline{B} + 2\underline{X} = \underline{B} \qquad \text{mit} \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ -3 & -8 & -6 \end{pmatrix}$$

4. Lösen Sie die folgenden Matrizengleichungen nach $\underline{X}$ auf:

a) $\underline{A}^T\cdot\underline{X} + \frac{3}{2}\underline{X} = \frac{1}{2}\,(\underline{X} + \underline{B})$
b) $3\,\underline{X} - (\underline{A} + \underline{B})^2\cdot\underline{X} = 2\,\underline{C} - \underline{C}^T\cdot\underline{X}$

Berechnen Sie die Lösungen für $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\underline{B} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\underline{C} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

5. Gegeben ist die Matrix $\underline{A}_t = \begin{pmatrix} 2 & t+2 & 2 \\ -3 & 1 & t-1 \\ t & -1 & -2 \end{pmatrix}$ $t \in \mathbb{R}$

Zeigen Sie durch Umformung der Matrizengleichung $3\,\underline{A}_1^{-1}\cdot\underline{X} = \underline{A}_1^{-1} - \underline{A}_1\cdot\underline{X}$
dass gilt: $\underline{X} = (3\cdot\underline{1}_3 + \underline{A}_1^2)^{-1}$
und berechnen Sie diese Matrix $\underline{X}$.

Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist $\underline{A}_t$ regulär?

6. Gegeben sind die Matrizen

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \ \underline{B} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \ \text{und} \ \underline{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Rechnen Sie nach: $\underline{A}\cdot\underline{B} = \underline{A}\cdot\underline{C}$!
Warum kann man daraus nicht auf $\underline{B} = \underline{C}$ schließen?
(natürlich ist hier $\underline{B} \neq \underline{C}$!)
b) Verändern Sie $\underline{A}$ geringfügig, so dass sie regulär ist und prüfen Sie: $\underline{A}\cdot\underline{B} = \underline{A}\cdot\underline{C}$
c) Beschreiben Sie, wann eine Matrix $\underline{X}$ regulär ist!
d) Stimmt $(\underline{A}+\underline{B})^2 = (\underline{B}+\underline{A})^2$? Stimmt $(\underline{A}+\underline{B})^2 = \underline{A}^2 + 2\underline{A}\cdot\underline{B} + \underline{B}^2$?
e) Prüfen Sie nach, ob $(\underline{A}^{-1})^T = (\underline{A}^T)^{-1}$ für jede reguläre Matrix $\underline{A}$ stimmt!

A33 Bestimmen Sie $\det(\underline{A})$, $\det(\underline{B})$, $\det(-2\underline{A})$, $\det(\underline{A}+\underline{B})$, $\det(\underline{A}^T)$, $\det(\underline{A}^{-1})$, $\det(\underline{A}\cdot\underline{B})$ für die Matrizen

a) $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\underline{B} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $\underline{B} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 8 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, $\underline{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & -4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$!

A34 a) Wie ändert sich die Determinante einer Matrix, wenn man eine Zeile (Spalte) durch Addition eines (eventuell negativen) Vielfachen einer anderen Zeile (Spalte) verändert ?
Berechnen Sie mithilfe der Antwort $\det(\underline{A})$ in A33 c) erneut !

b) Wie verändert Vertauschen zweier Zeilen (Spalten) einer Matrix deren Determinantenwert ?
Berechnen Sie mithilfe der Antwort $\det(\underline{B})$ in A33 b) erneut !

c) Die Cramer-Regel gilt sogar für beliebige eindeutig lösbare LGS mit n Gleichungen für n Unbekannte ($n \in \mathbb{N}$).
Wie kann man damit die Inverse einer regulären Matrix mit n Zeilen und n Spalten gewinnen ?

d) Lösen Sie die LGS $\underline{A}\cdot\underline{x} = \underline{c}$ und $\underline{B}\cdot\underline{x} = \underline{c}$ für beliebige Inhomogenität $\underline{c}$ und mit den Matrizen $\underline{A}$, $\underline{B}$ aus A33 c)

i) mithilfe von c) ! ii) via GJV !

Mit welchem Verfahren gelangen Sie schneller zum Ziel ?

A35 Bestimmen Sie die folgenden Determinanten möglichst geschickt :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & a & 2a \\ 1 & b & 2b \\ 1 & c & 2c \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & a \\ 2 & a & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 1 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \cos(\alpha) & 0 & -\sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & 8 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ b & 1 & a & 0 \\ 0 & b & 1 & a \\ 0 & 0 & b & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^2 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & a & a & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} (2-x) & 0 & 4 \\ 2 & (6-x) & 3 \\ 4 & 0 & (2-x) \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 3 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 4 & a \\ a & a & a & a & 5 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & a & b \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad !$$

A36 Formulieren Sie den Entwicklungssatz von Laplace in eigenen Worten !
Überprüfen Sie ihn durch (wenn nötig) 6fache Berechnung von

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 11 \\ 13 & 17 & 19 \end{pmatrix} \quad !$$

A37 Beschreiben Sie die LT $\underline{f} \subseteq \mathbb{R}^{2\times 1} \times \mathbb{R}^{2\times 1}$ anschaulich, wenn sie die darstellende Matrix $\underline{M}$ = ...

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ ... hat !

A38 Sind f und g zwei Funktionen, so definiert

$(f \circ g)(x) := f(g(x))$ eine Verkettung beider Funktionen.

Seien nun f und g LTen mit den darstellenden Matrizen

$$\underline{M}_f = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{M}_g = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Geben Sie damit Funktionsgleichungen für $f \circ g$ und $g \circ f$ an!
Sind auch die Verkettungen LTen ?
Interpretieren Sie alle genannten Funktionen geometrisch !

A39 Bestimmen Sie eine möglichst einfache Funktionsgleichung (in Matrizenform) für eine gleichförmige Drehbewegung um eine Gerade g im dreidimensionalen Raum mit dem Stützvektor $\vec{a}$ und der Orientierung $\vec{\omega}_0$ = ...

a) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(Hinweis: Vergleichen Sie dazu Kap. 1.2.3 c) !) !

Wie müssen $\vec{a}$ und $\vec{\omega}_0$ gewählt werden, damit $\vec{y} := \vec{p}(t)$ linear von $\vec{x} := \vec{p}(0)$ abhängt ?

Interpretieren Sie geometrisch !

A40 Für eine LT $f \subseteq \mathbb{R}^{3\times 1} \times \mathbb{R}^{3\times 1}$ gilt $f(\underline{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 \quad - 2x_3 \\ x_1 - 2x_2 \end{pmatrix}$.

a) Wie lautet die darstellende Matrix $\underline{M}$?

b) Wie lauten die Bilder $f(\underline{e}_i)$ der kanonischen Einheitsvektoren ?

c) Welcher Vektor $\vec{u}$ geht dabei in $f(\vec{u}) = 2\vec{u}$ über ?

A41 Gegeben sind die Ebenen $E_1: x_3 = 0$ und $E_2: x_1 - x_3 = 0$.

a) Beschreiben Sie die Spiegelung f_i an E_i ($i \in \{1;2\}$) durch eine geeignete Funktionsgleichung in Matrizenform !

b) Bestimmen Sie die darstellenden Matrizen $\underline{M}_{12}$ von $f_1 \circ f_2$ und $\underline{M}_{21}$ von $f_2 \circ f_1$!

c) Beschreiben Sie die Funktionen $f_1 \circ f_2$ und $f_2 \circ f_1$ geometrisch mithilfe ausreichend vieler Daten !

A42 Mit Hilfe der Matrix $\underline{D} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ kann eine lineare Transformation f erklärt werden: $\underline{y} = \underline{D} \cdot \underline{x}$.

a) Ermitteln Sie zu den Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ die Bildvektoren! Berechnen Sie jeweils $|\vec{u}|, |f(\vec{u})|, |\vec{v}|, |f(\vec{v})|$ sowie die Winkelweiten der Winkel, die durch die Originalvektoren bzw. durch die Bildvektoren gebildet werden! Was fällt auf?

b) Bilden Sie den beliebigen Vektor $\vec{w}$ ab, vergleichen Sie $|\vec{w}|$ und $|f(\vec{w})|$!

c) Berechnen Sie das Spatprodukt $(f(\vec{e}_1) \times f(\vec{e}_2)) \cdot f(\vec{e}_3)$! Beschreiben Sie nun die LT f geometrisch!

A43 a) Lösen Sie das LGS:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= c_1 \\ 3x_1 + 7x_2 + 2x_3 + x_4 &= c_2 \\ x_1 - 2x_3 - 3x_4 &= c_3 \\ 5x_1 + 9x_2 + 4x_3 &= c_4 \end{aligned}$$

für alle $\underline{c} \in \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ -3 \\ 13 \end{pmatrix} \right\}$!

b) Gegeben ist das LGS:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 4 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 &= -1 \\ -2x_1 + 3x_2 + 7x_4 &= 3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 &= 2 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 2tx_4 &= 1 \end{aligned}$$

(i) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist das LGS eindeutig lösbar?
(ii) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist die Lösungsmenge des LGS leer?
(iii) Für welche $t \in \mathbb{R}$ besitzt das LGS eine von einem frei wählbaren Parameter abhängige Lösung? Wie lautet sie? Legen Sie den Parameter so fest, dass eine Lösung mit $x_1 = 1$ auftritt! Wie lautet dann $\underline{x}$?

A44 Gegeben sind die Matrizen $\underline{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \underline{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \underline{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie die Produkte $\underline{B} \cdot \underline{C}, \underline{C} \cdot \underline{B}$ und $\underline{C} \cdot \underline{C}$!

b) Berechnen Sie die Inverse $\underline{A}^{-1}$ zur Matrix $\underline{A}$!

c) Lösen Sie die Matrizengleichungen $\underline{A} \cdot \underline{X} + \underline{B} = \underline{C}, \underline{X} \cdot \underline{A} = \frac{1}{3} \underline{C} \cdot \underline{C}$!

<u>Hinweis</u>: Falls b) nicht gelöst werden kann, verwenden Sie in c)

$$\underline{A}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

d) Kann man $a \in \mathbb{R}$ so wählen, dass die Matrix $\underline{D} = a\begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{3} & 2 \\ 2 & \sqrt{3} & -3 \\ -2\sqrt{3} & 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$ eine Drehung darstellt?

L33: a) 1; 10; 4; -2; 1; 1; 10 b) 19; -26; -152; -108; 19; 1/19; -494 c) -63; -8; -1008; 84; -63; $-\frac{1}{63}$; 504

L34: a) nicht b) ·(-1) c) vgl. Vorl.

d) $\underline{A}^{-1} = -\frac{1}{63}\begin{pmatrix} -14 & -21 & 42 & -7 \\ 15 & -27 & -9 & 3 \\ 1 & 15 & -30 & -4 \\ -18 & -18 & 36 & 9 \end{pmatrix}, \underline{B}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 10 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

L35: 2; 0; $(b-a)(c-a)(c-b)$; $(2+a)(3-a)$; 0; 1; 0; $(ab)^2 - 3ab + 1$; $(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$; $1 - 3a^2$; $-(x+2)(x-6)^2$; $120 - 50a^2$; 1

L36: 24

Zusatzaufgaben zur Wiederholung

Z1 Durch $f(\underline{x}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & -1 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \underline{x}$

ist eine lineare Transformation $f \subseteq \mathbb{R}^{3\times 1} \times \mathbb{R}^{3\times 1}$

gegeben.

a) Zeigen Sie, dass f eine Drehung ist !

b) Lösen Sie die Matrizengleichung $f(\underline{x}) = \underline{x}$!

c) Ermitteln Sie Orientierung $\underline{\alpha}_0$ und Drehwinkel α ($\alpha \in [0;\pi]$) dieser Drehung !

Z2 Lösen Sie a) $2\underline{A}\cdot\underline{X} + 3\underline{B} = 4(\underline{X} - \underline{C})$ b) $(\underline{A}\cdot\underline{X}^T)^T - \underline{X}\cdot\underline{B} - 3\underline{X} = \underline{1}$

c) $\underline{A}\cdot\underline{X}\cdot\underline{B} = \underline{C}$ d) $(\underline{X}\cdot\underline{B})\cdot(\underline{A}^{-1}\cdot\underline{X}\cdot\underline{B})^{-1} = \underline{1}_2$

nach $\underline{X}$ auf, sofern dies möglich ist !

Geben Sie die notwendigen Voraussetzungen an !

Z3 Lösen Sie die Matrizengleichung

a) $\underline{A}^T\cdot\underline{X} + \frac{3}{2}\underline{X} = \frac{1}{2}(\underline{X} + \underline{B})$ b) $3\underline{X} - (\underline{A} + \underline{B})^2\cdot\underline{X} = 2\underline{C} - \underline{C}^T\cdot\underline{X}$

für $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\underline{B} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ und $\underline{C} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$!

Z4 Bestimmen Sie $N_0(f)$ nur mithilfe des Horner Schemas mindestens näherungsweise !

a) $f(x) = 4x^3 - 7{,}3x^2 - 1{,}55x + 0{,}3$

b) $f(x) = 8x^3 - \frac{7}{5}x^2 - \frac{7}{20}x + \frac{1}{20}$

c) $f(x) = x^5 + 3x^4 + 2x^3 + x + 1$

Hinweis zu c) : Hier hat f genau zwei verschiedene reelle Nullstellen, eine davon liegt im Intervall $]-2;-1{,}5[$!

A45 Skizzieren Sie f qualitativ für $f(x) = \ldots$

a) x^0 b) $c \cdot x^0$ c) $-4+2x$ d) $4-2x$ e) x^3 f) x^{-3}

g) $(x^4)^{\frac{1}{3}}$ h) $\frac{3}{x}$ i) x^2-1 j) $(x^2-1)^{-1}$ k) $-6+11x-6x^2+x^3$

l)* $-1+x-5x^2+2x^3+3x^4$ m) $\frac{x^2+2x-8}{x^2-3x+2}$ n) $\frac{1+1{,}5x-0{,}5x^3}{2+3x+x^2}$

o) $\frac{k \cdot (r+x)}{x}$ mit $k>0$ und $r>0$ p) $\frac{5}{x^2+1}$

q) $\frac{8x}{x^2+4}$ r) $\frac{x^2+2x+1}{x^2-1}$ s) $\frac{x^2+2x-1}{x^2-1}$ t) $\frac{x^3-6x^2+12x-8}{x^2-4}$

A46 Bestimmen Sie mithilfe des Horner Schemas alle Nullstellen von f sowie $f'(a)$ an der kleinsten Nullstelle a ! Faktorisieren Sie $f(x)$ und skizzieren Sie f qualitativ !

a) $f(x) = x^3-4x^2+3x+2$ b) $f(x) = x^4+4x^3-40x^2-32x+256$

c) f ist ganzrational möglichst niedrigen Grades mit den (Stütz-) Punkten $P_0(-5|15552)$, $P_1(-2|54)$, $P_2(0|2)$, $P_3(1|0)$, $P_4(2|54)$, $P_5(4|4050)$ und $P_6(8|261954)$.

Hinweis zu c) : Ermitteln Sie erst den Funktionsterm mithilfe des Ansatzes

$$f(x) = c_0 + c_1 \cdot (x-x_1) + c_2 \cdot (x-x_1) \cdot (x-x_2) + \cdots$$

mit geeigneten Stellen x_i (den Stützstellen !) !

A47 a) Ermitteln Sie eine ganzrationale Funktion f möglichst niedrigen Grades, welche $P_0(-5|864)$, $P_1(-2|0)$, $P_2(0|-6)$, $P_3(1|0)$ und $P_4(2|-4)$ enthält !
Ermitteln Sie $\mathcal{N}_0(f)$ nebst qualitativer Skizze !

b) $f : y = x^{-1}$ soll für $x \in [2{,}5; 3{,}2]$ quadratisch interpoliert werden, und zwar mithilfe der Stützpunkte $P_0(2{,}5 | f(2{,}5))$, $P_1(25/9 | f(25/9))$ und $P_2(3{,}2 | f(3{,}2))$.
Bestimmen Sie die quadratische Interpolationsfunktion q durch ihren Term $q(x)$! Zeichnen Sie f und q !
Wie groß ist der relative Fehler des Näherungswertes $q(2{,}9)$ relativ zum wahren Wert $f(2{,}9)$?

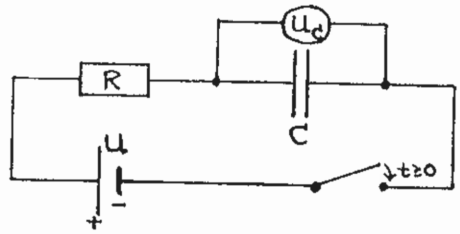
c) $f : y = \ln(1+x^2)$ soll im (x-) Intervall $[1; 2{,}5]$ durch eine ganzrationale Funktion g dritten Grades mit den Stützpunkten $P_0(1|0{,}69)$, $P_1(1{,}25|0{,}94)$, $P_2(2|1{,}61)$, $P_3(2{,}5|1{,}98)$ angenähert werden.
Ermitteln Sie $g(x)$, die Näherungswerte $g(1{,}1)$, $g(1{,}62)$ und ihre relativen Fehler (relativ zu den „richtigen" Werten $f(1{,}1)$, $f(1{,}62)$) in % bis auf zwei gültige Ziffern !

A48 Skizzieren Sie f mit $f(x) = S + C \cdot e^{-kx}$ für $k > 0$ qualitativ!

Welche Bedeutung haben die reellen Parameter C, S, k ?

Ermitteln Sie durch Ableiten eine Differentialgleichung, der f genügt!

A49 Gegeben ist das unten stehende Schaltbild.



Hier wird nach Einschalten einer Gleichspannung $U > 0\,V$ die Spannung U_C eines anfangs $(t=0)$ ungeladenen Kondensators mit der konstanten Kapazität C abgegriffen und (ideal) gemessen.

a) Ermitteln Sie mithilfe der Maschenregel eine Differentialgleichung für die Kondensatorspannung U_C in Abhängigkeit von der Zeit $t \geq 0$ ms nach Einschalten der Gleichspannungsquelle!

Hinweis: $U_C = \frac{Q}{C}$, $U_R = R \cdot I$ und $I = \frac{dQ}{dt} = \dot{Q}$

b) Skizzieren Sie den Verlauf von U_C für $C > 0\,\mu F$ qualitativ in Abhängigkeit von der Zeit $t \geq 0$ ms !

c) Lösen Sie nun die Differentialgleichung unter a) mithilfe der Substitution $f := U - U_C$!

d) Zeichnen Sie U_C quantitativ für $R \cdot C = 1$ ms und $U = 2V$! Nach wie vielen vollen Millisekunden (nach Einschalten) ist $U_C \geq 99\,\% \cdot U$?

A50 Bestimmen Sie die Werte der reellen Parameter a, b, c, so dass f die genannten Eigenschaften hat! Skizze ?

a) $f(x) = a \cdot \exp\left(\frac{b}{x}\right)$ mit $\lim_{x \to +\infty} (f(x)) = 0{,}1$ und $P\left(\frac{2500}{\ln(10)} | 1\right) \in f$!

b) $f(x) = a \cdot e^{-bx} + 2$ mit $P_1(0|10) \in f$ und $P_2(5|3) \in f$!

c) $f(x) = a \cdot \exp(-bx^2)$ mit $P_1\left(-\sqrt{2} \,|\, \frac{1}{e\sqrt{2\pi}}\right) \in f$, $f'(\sqrt{2}) = -\frac{1}{e \cdot \sqrt{\pi}}$!

d) $f(x) = \dfrac{c}{1 + \left(\frac{c}{a} - 1\right) \cdot e^{-bx}}$ mit $P_1(0|0{,}6) \in f$, $P_2(6|3) \in f$,

so dass $f(x)$ für immer größere x-Werte dem Wert 6 entgegen strebt!

Weitere Aufgaben Exp, Log mit Anwendungen

1. Bestimme die Lösungen exakt und dann per Taschenrechner auf fünf Nachkommastellen gerundet! (Probe ?)

a) $3^x = 5$ b) $2^{x+1} = 15$ c) $e^x = 1$ d) $10^x \leq 3{,}2$

e) $5^x = 625^2$ f) $2^x < 1$ g) $2^x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ h) $(\sqrt{5})^x = 25$

i) $5^{2x} \cdot 6 = 3^x$ j) $10^{x+x^2} = 3$ k) $2 \cdot 3^{x+1} = 54$

2. Löse durch eine geeignete Substitution

a) $3 \cdot 2^{2x} - 18 \cdot 2^x = 48$ b) $4^{2x} - 24 \cdot 4^x = -128$

c) $8^{8x} = 16 \cdot 64^{2x}$ d) $25^{2x} - 10 \cdot 5^{2x} - 14375 = 0$

3. Löse die folgenden logarithmischen Gleichungen:

a) $4 \cdot \lg(x) = \lg(16)$ b) $0{,}5 + 2 \cdot \lg(x) = \lg(13)$

c) $3 \cdot \lg(x) - 5 \cdot \lg(x) = \lg(16)$ d) $-\lg(x) + 4 \lg(7) = 18$

e) $3 \cdot \log_4(5) = \lg(x)$ f) $4 \log_e(6) - 3 \log_2(8) = -\lg(x)$

4. Ein Kapital von 120 000 € wird mit Zinseszinsen zu 6 % angelegt.

a) Durch welche Exponentialfunktion f wird der Kapitalwert f(x) nach x Jahren (Laufzeit) beschrieben?

b) Auf welchen Betrag ist das Kapital nach 10 Jahren angewachsen?

c) Wann sind die 120 000 € Grundkapital auf ≥ 1 000 000 € angewachsen?

5. Ein Getränk mit der Temperatur 5 °C wird aus dem Kühlschrank genommen und der Raumtemperatur 20 °C ausgesetzt.

a) Welcher Änderung ist die Temperatur des Getränks ausgesetzt?

b) Nach 10 min bei Raumtemperatur beträgt die Temperatur des Getränks 10 °C. Bestimmen Sie damit einen Funktionsterm der Getränktemperatur!

c) Wann beträgt die Getränktemperatur ≥ 90 % der

Z5 Mithilfe des Horner Schemas erhält man bekanntlich die Entwicklung einer ganzrationalen Funktion g um eine Stelle a mit dem Funktionsterm

$$g(x) = c_0 + (x-a)\cdot\Big(c_1 + (x-a)\cdot\big(c_2 + (x-a)\cdot(c_3 + (x-a)\cdots)\big)\Big)$$

a) Welche Bedeutung haben die Konstanten c_0, c_1, c_2, c_3 $(, c_i)$ für die Funktion g ?

b) Eine ganzrationale Funktion g vom Grad 3 hat an der Stelle 3 einen Wendepunkt $W(3|4)$ mit der Wendetangentensteigung 5, und g geht durch den Punkt $P(6|-3)$ (d.h. $P(6|-3) \in g$).
Finden Sie (möglichst effektiv) einen Funktionsterm $g(x)$!

c) Über die natürliche Exponentialfunktion exp mit $\exp(x) := e^x$ wissen Sie (!?) an der Stelle $\ln(2)$:

$$\exp(\ln(2)) = \exp'(\ln(2)) = \exp''(\ln(2)) = \exp'''(\ln(2)) = 2 .$$

Finden Sie nun mithilfe des Horner Schemas eine ganzrationale Funktion g möglichst niedrigen Grades, für die ebenfalls gilt :

$$g(\ln(2)) = g'(\ln(2)) = g''(\ln(2)) = g'''(\ln(2)) = 2 \quad !$$

Berechnen Sie damit $g(0{,}7)$ und den relativen Fehler

$$\frac{g(0{,}7)}{\exp(0{,}7)} - 1$$ in % auf 2 gültige Ziffern gerundet!

Lösungen (zu TEL – Ma 1, Kessler)

(L1) a) $\frac{61}{24}$ b) $\frac{22}{9}$ c) $\frac{52}{45}$ d) $-\frac{11}{34}$ e) ist schon einfach, $\frac{a^2+b^2}{ab}$ benötigt mehr!

f) dto., $\frac{2a}{a^2-b^2}$ g) 0 h) $-\frac{x}{60\cdot(x+2)}$ (für $x \in \mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$) i) $\frac{2}{a+b}$, $0 \neq b \neq \mp a$

j) $\frac{2\cdot(u+2v)^2}{u+v}$ k) $\sqrt{x}-\sqrt{2}$ l) 2 m) $\frac{ab^2}{c^3}$ n) $\sqrt{\sqrt{5}-2}$ o) $r^s\cdot\ln(b)$

p) -3 q) 3 r) $\sqrt{5}$ s) e

(L2) a) $\{2;6\}$ b) $\{-4,5;2,5\}$ c) $\{4\}$ d) $\{5;8\}$ e) $\{\}$ f) $\{0,4;0,8\}$ g) $\{-1,5\}$

h) $\{-1,4;-0,8\}$ i) $\{\}$ j) $\{-5;-1;1;5\}$ k) $\{-3;3\}$ l) $\{-\frac{3}{2};-\frac{4}{3};\frac{4}{3};\frac{3}{2}\}$

m) $\{0;1;5\}$ n) $\{-6;0;2\}$ o) $\{-\frac{1+\sqrt{3}}{2};\frac{\sqrt{3}-1}{2};1\}$ p) $\{-4;-2;2;3\}$

(L3) a) $\mathbb{R}\setminus[-12;0]$ b) $]0;2,4[$ c) $\mathbb{R}\setminus[2;8]$ d) $\{\}$ wg. $x^2+2x+2=1+(x+1)^2$

e) $\mathbb{R}\setminus[-2;2]$ f) $]-3;5[\setminus\{0\}$ g) $[0;9[$ h) $\mathbb{R}\setminus[0;\ln(3)]$

i) $]-\infty;-4[\,\cup\,]-2;-1[\,\cup\,]2;+\infty[$ (aus $T(x)=\frac{(x-2)(x+2)}{(x+4)(x+1)}>0$, $T(0)=-1$)

(L4) a) Ann.: $\boxed{\sqrt{2}=\frac{z}{n}}$ vollständig gekürzt $\Rightarrow z^2=2n^2 \Rightarrow \underline{z\sim 2}$
$\Rightarrow z^2\sim 4 \Rightarrow n^2\sim 2 \Rightarrow \underline{n\sim 2}$ ↯

(hier bezieht sich das Proportionalitätszeichen auf natürliche Vielfache von 2, d.h.: $n\sim 2$ bedeutet: n ist ein natürliches Vielfaches von 2 !)

$\Rightarrow$ Ann. ist falsch $\Rightarrow \sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$

Bem.: $\sqrt{2} = 1+\frac{1}{2}-\frac{1\cdot1}{2\cdot4}+\frac{1\cdot1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}-\frac{1\cdot1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8}+-\cdots \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$!

$$(1+x)^p = \sum_{i=0}^{\infty}\binom{p}{i}\cdot x^i \quad \text{mit} \quad \binom{p}{i} = \frac{p\cdot(p-1)\cdot\ldots\cdot(p-(i-1))}{i\cdot(i-1)\cdot\ldots\cdot 1}$$

(allgemeiner Binomialkoeffizient)

b) $R\in R \Rightarrow M=R\notin M=R \Rightarrow R\notin R$ ↯
$R\notin R \Rightarrow R=M\in R \Rightarrow R\in R$ ↯, also nein !
Demnach ist R keine Menge !

c) $u=2\cdot(a+b)$ bei $A=a\cdot b=$ konst. $\Rightarrow u=2\cdot(a+\frac{A}{a})$

bzw. $u=4\cdot\frac{1}{2}\cdot(a+\frac{A}{a})$. Ist nun o.B.d.A $a\le\sqrt{A}\le b$, dann ist $u/4$ der arithmetische Mittelwert der beiden Seitenlängen offenbar $\ge\sqrt{A}$ (anschaulich klar !?), rechnerisch bewiesen:

$\frac{1}{2}\cdot(a+\frac{A}{a})\ge\sqrt{A} \Leftrightarrow a^2+A\ge 2a\sqrt{A} \Leftrightarrow (a-\sqrt{A})^2\ge 0$ ✓

Gleichheit besteht nur für $a=\sqrt{A} \Rightarrow b=\frac{A}{a}=\sqrt{A}=a$!
Antwort: Quadrat ! (Alternative: $u=f(x)$ bei $x=a$, Ableitung(en)!)

d) LGS: $x+y+z=17 \wedge x=\frac{1}{2}\cdot G \wedge y=\frac{1}{3}\cdot G \wedge z=\frac{1}{9}\cdot G$
liefert G(rundwert) = 18 und dann erst $x=9\wedge y=6\wedge z=2$

Antwort: 1. Sohn bekommt 9 Kamele,
2. Sohn bekommt 6 Kamele,
Tochter bekommt 2 Kamele !

α

(L5) $R_1 = \{(p_i|s_i) | 4 \geq i \in \mathbb{N}^+\} \cup \{(p_5|s_4)\}$ („x studiert y") ist Funktion mit $\mathbb{D}_{R_1} = X$ und $\mathbb{W}_{R_1} = Y$ und

$R_1^{-1} = \{(s_1|p_1); (s_2|p_2); (s_3|p_3); \underline{(s_4|p_4); (s_4|p_5)}\}$ („x wird von y studiert") mit $\mathbb{D}_{R_1^{-1}} = Y$ und $\mathbb{W}_{R_1^{-1}} = X$ ist keine Funktion

Dabei gilt offenbar grundsätzlich $\mathbb{D}_{R^{-1}} = \mathbb{W}_R$ und $\mathbb{W}_{R^{-1}} = \mathbb{D}_R$!

$R_2 = \{(p_1|\ell_1); (p_1|\ell_2); (p_2|\ell_3); (p_2|\ell_4); (p_3|\ell_5); (p_4|\ell_2); (p_4|\ell_6); (p_5|\ell_7); (p_5|\ell_8)\}$ („x liest y") ist keine Funktion mit
$R_2^{-1} = \{(\ell_1|p_1); \underline{(\ell_2|p_1); (\ell_2|p_4)}; (\ell_3|p_2); (\ell_4|p_2); (\ell_5|p_3); (\ell_6|p_4); (\ell_7|p_5); (\ell_8|p_5)\}$ („x wird von y gelesen") ist keine Funktion mit
$\mathbb{D}_{R_2} = \mathbb{W}_{R_2^{-1}} = X$ und $\mathbb{W}_{R_2} = \mathbb{D}_{R_2^{-1}} = Z$!

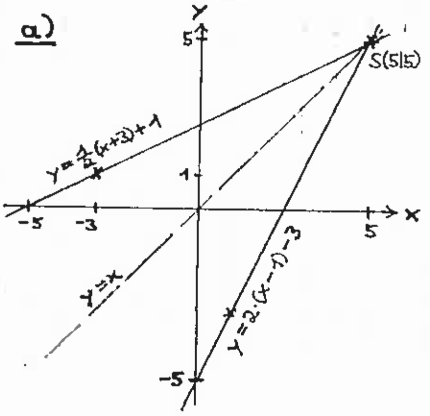
$R_3 = \{(s_1|\ell_1), (s_1|\ell_2); (s_2|\ell_3); (s_2|\ell_4); (s_3|\ell_5); (s_4|\ell_2); (s_4|\ell_6); (s_4|\ell_7); (s_4|\ell_8)\}$ („x wird vom y-Leser studiert") ist keine Funktion mit
$R_3^{-1} = \{(\ell_1|s_1); \underline{(\ell_2|s_1); (\ell_2|s_4)}; (\ell_3|s_2); (\ell_4|s_2); (\ell_5|s_3); (\ell_6|s_4); (\ell_7|s_4); (\ell_8|s_4)\}$ („x wird von y-Studi gelesen") ist keine Funktion mit
$\mathbb{D}_{R_3} = \mathbb{W}_{R_3^{-1}} = Y$ und $\mathbb{W}_{R_3} = \mathbb{D}_{R_3^{-1}} = Z$.

Dabei gibt es noch drei „triviale" Relationen, und zwar die Identitäten

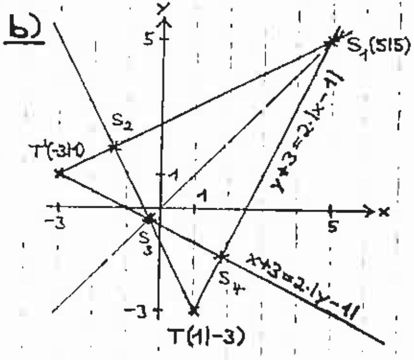
$$\mathbb{1}_X = id_X = \{(p_i|p_i) | 5 \geq i \in \mathbb{N}^+\} = id_X^{-1} \neq X^2 \quad (!)$$
$$\mathbb{1}_Y = id_Y = \{(s_i|s_i) | 4 \geq i \in \mathbb{N}^+\} = id_Y^{-1} \neq Y^2$$
$$\mathbb{1}_Z = id_Z = \{(\ell_i|\ell_i) | 8 \geq i \in \mathbb{N}^+\} = id_Z^{-1} \neq Z^2$$

mit $\mathbb{D}_{id_X} = X = \mathbb{W}_{id_X} \wedge \mathbb{D}_{id_Y} = \mathbb{W}_{id_Y} \wedge \mathbb{D}_{id_Z} = \mathbb{W}_{id_Z}$!

(L6) a)



b)

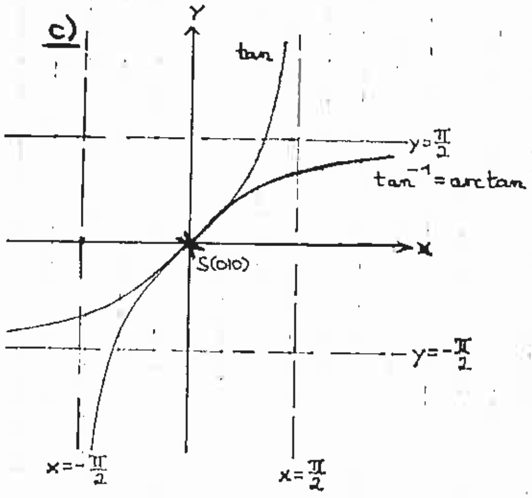


Einsetzen ergibt $x+3=4\cdot||x-1|-2|$ und nach Fallunterscheidung $x \in \{-\frac{7}{5}; -\frac{1}{3}; \frac{9}{5}; 5\}$

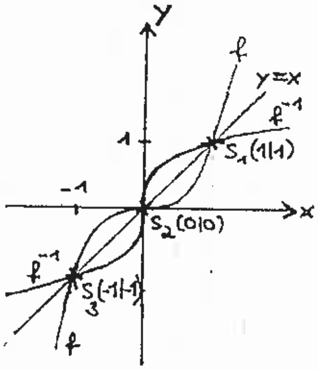
$\Rightarrow f \cap f^{-1} = \{S_i | 4 \geq i \in \mathbb{N}\}$

mit $S_2(-\frac{7}{5}|\frac{9}{5}), S_3(-\frac{1}{3}|-\frac{1}{3})$ und $S_4(\frac{9}{5}|-\frac{7}{5})$!

c)



d)



$f: y = x^3$

$f^{-1}: y = \sqrt[3]{|x|} \cdot sgn(x)$

bei

$$sgn(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x<0 \\ 0 & \text{für } x=0 \\ 1 & \text{für } x>0 \end{cases}$$

(sgn wie Signum (Vorzeichen))

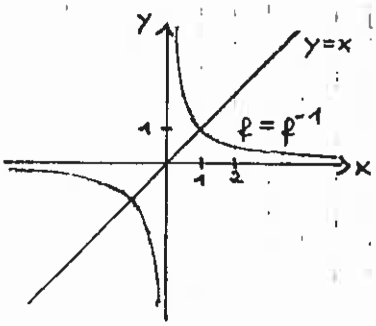
$f \cap f^{-1} = \{S_1; S_2; S_3\}$ vgl. Skizze(!)

folgt einfach aus: $y = x^3 \wedge x = y^3$
$\Leftrightarrow y = x^3 \wedge x = x^9 \Leftrightarrow y = x^3 \wedge x\cdot(x^8-1) = 0$
$\Leftrightarrow (x|y) \in \{S_1(1|1), S_2(0|0), S_3(-1|1)\}$!

e) $f(x)=\frac{1}{x}=y \quad | \, x \leftrightarrow y$

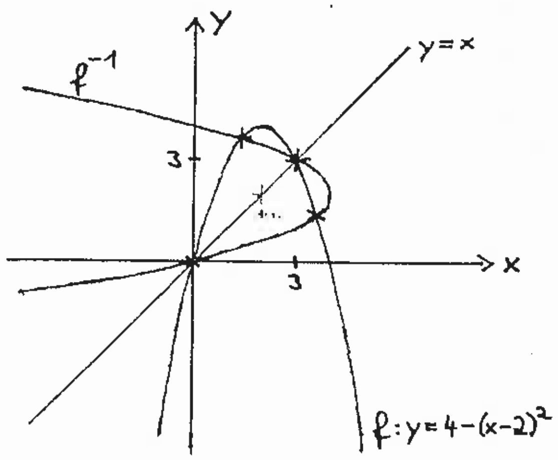
$\frac{1}{y}=x \quad | \, (\ )^{-1}$

$f^{-1}: y=\frac{1}{x}=f^{-1}(x)$



f ist symmetrisch zu $O(0|0)$
<u>und</u> zur 1. Wh.: $y=x$
$\Rightarrow f=f^{-1}$
$\Rightarrow \underline{\underline{f \cap f^{-1}=f}}$

f)



$f: y=4-(x-2)^2 \ \wedge \ f^{-1}: x=4-(y-2)^2$

Einsetzen liefert eine Gleichung zur Bestimmung der Stellen:

$$x = 4-(4-(x-2)^2-2)^2$$

oder der Werte: $y=4-(4-(y-2)^2-2)$

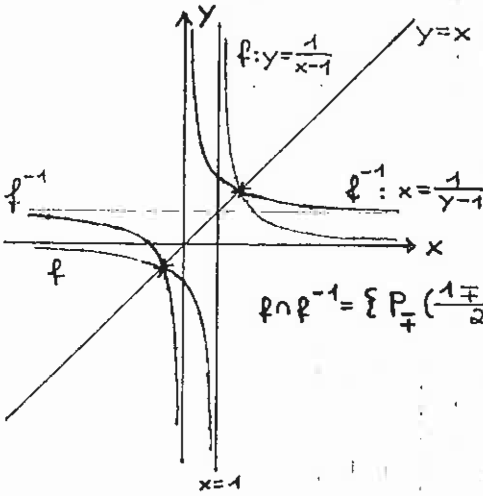
Substitution: $u=x-2$ ergibt

$$u = 2-(2-u^2)^2$$

$$\Leftrightarrow 0=u^4-4u^2+u+2 \overset{!}{=} (u+2)(u-1)\cdot(u^2-u-1)$$
$$=(u+2)\cdot(u-1)\cdot\left(u-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\cdot\left(u-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$\Rightarrow u \in \left\{-2; \frac{1-\sqrt{5}}{2}; 1; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\} \Rightarrow f \cap f^{-1} = \left\{O(0|0); P(3|3); Q_{\mp}\left(\frac{5\mp\sqrt{5}}{2} \middle| \frac{5\pm\sqrt{5}}{2}\right)\right\}$!

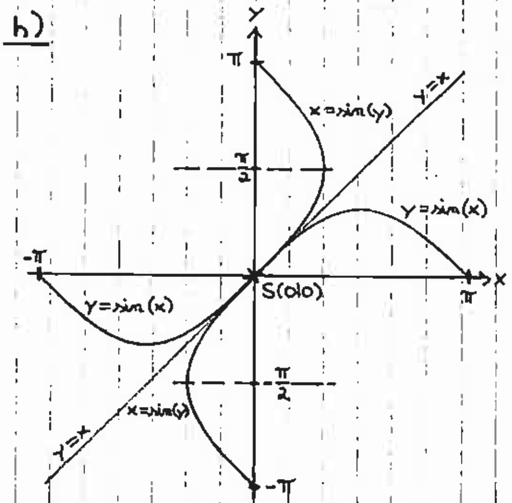
g)



$f^{-1}: x=\frac{1}{y-1} \quad (\Leftrightarrow y=1+\frac{1}{x})$
vgl. e)!

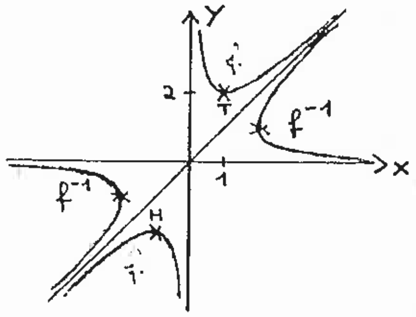
$f \cap f^{-1} = \left\{P_{\mp}\left(\frac{1\mp\sqrt{5}}{2} \middle| \frac{1\mp\sqrt{5}}{2}\right)\right\}$

h)



Der Abschnitt der Umkehrrelation $\sin^{-1}$ im Streifen $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ ist die „Taschenrechnerversion", auch arcsin genannt!

i)



$y=x$ ist schiefe Asymptote von $f: y=x+x^{-1}$
(also für $x \to \pm\infty$)

Wegen $f(x) > x$ für $x>0$
$< x$ für $x<0$
ist schon klar, dass $f \cap f^{-1} = \{\}$!

wegen $f(x) = \frac{1}{2}\cdot(x+\frac{1}{x})\cdot 2$
$\geq 1\cdot 2 = 2$
für $x>0$!

Bemerkenswert ist, dass man in Analogie zu 4c) auch ohne Anwendung der Differentialrechnung folgern kann, dass f in $T(1|2)$ einen lokalen Tiefpunkt und in $H(-1|-2)$ einen lokalen Hochpunkt hat!

(L7) <u>a)</u> $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}10\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix}-8\\-6\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{M_aM_b} = (\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})\cdot\frac{1}{2} = \begin{pmatrix}-5\\-1\end{pmatrix}$,
$\overrightarrow{M_bM_c} = \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{M_cM_a} = \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ mit $|\overrightarrow{M_cM_a}| = 5 = \frac{1}{2}\cdot|\overrightarrow{CA}|$,
$|\overrightarrow{M_bM_c}| = \sqrt{5} = \frac{1}{2}\cdot|\overrightarrow{BC}|$ und $|\overrightarrow{M_aM_b}| = \sqrt{26} = \frac{1}{2}\cdot|\overrightarrow{AB}|$.

Zentrische Streckung mit Zentrum $S(4|\frac{2}{3})$, Streckfaktor $-\frac{1}{2}$
ergibt aus ΔABC das Dreieck $M_aM_bM_c$! S ist Schwerpunkt !

<u>b)</u> $\vec{s} = \frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$ ist arithmetisches Mittel von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, hier $\vec{s} = \begin{pmatrix}4\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$!

(L8) <u>a)</u> $\vec{x} = \begin{pmatrix}34\\-14\\20\end{pmatrix}$, $|\vec{x}| = 2\cdot\sqrt{438} \approx 41{,}86$; $\vec{y} = \begin{pmatrix}18\\-48\\1\end{pmatrix}$, $|\vec{y}| = \sqrt{2629} \approx 51{,}27$,
$\vec{z} = \begin{pmatrix}22\\9\\6\end{pmatrix}$, $|\vec{z}| = \sqrt{601} \approx 24{,}52$

<u>b)</u> $\vec{a}\cdot s_1 + \vec{b}\cdot s_2 + \vec{c}\cdot s_3 = \vec{o} \iff$

$$\begin{aligned} -2s_1 \qquad\quad + 6s_3 &= 0 \quad (1)\\ 3s_1 - s_2 - s_3 &= 0 \quad (2)\\ s_1 + 4s_2 + 2s_3 &= 0 \quad (3)\end{aligned}$$

Aus (1) : $s_1 = 3s_3$ in (2) ergibt : $s_2 = 8s_3$.
Beides in (3) ergibt $37s_3 = 0 \iff s_3 = 0 \implies s_1 = s_2 = 0$
$\implies \{\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}\} \subseteq \mathbb{R}^{3\times1}$ und linear unabhängig.
Da mit drei Elementen, muss $\{\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}\}$ Basis von $\mathbb{R}^{3\times1}$,
genauer $(\mathbb{R}^{3\times1}, +, \cdot)$ sein ! <u>Ja</u> !

<u>c)</u> analog zu b). Nur statt $\vec{o}$ nun $\vec{x} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$!
Es ergibt sich:

$$s_1 = 3s_3 - \frac{1}{2}x_1 \ \wedge\ s_2 = 8s_3 - \frac{3}{2}x_1 - x_2 \ \wedge\ s_3 = \frac{1}{37}\cdot(x_3 + 4x_2 + \frac{13}{2}x_1)$$

und demnach $\vec{e}_1 = \frac{1}{37}\vec{a} - \frac{7}{74}\vec{b} + \frac{13}{74}\vec{c}$; $\vec{e}_2 = \frac{12}{37}\vec{a} - \frac{5}{37}\vec{b} + \frac{4}{37}\vec{c}$

und $\vec{e}_3 = \frac{3}{37}\vec{a} + \frac{8}{37}\vec{b} + \frac{1}{37}\vec{c}$!

<u>d)</u> $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \iff \vec{d} = \vec{c} - \vec{b} + \vec{a} = \begin{pmatrix}4\\3\\-1\end{pmatrix} \implies$ <u>D(4|3|-1)</u> $(= \vec{d}^{\,T})$

Dann ist ABCD ein im Gegenuhrzeigersinn nummeriertes Parallelogramm !

(L9) a) Menge aller kubischen Polynome ist hier $\{\sum_{i=0}^{3} a_i x^i \mid a_i \in \mathbb{R}\}$.
$1\cdot s_1 + x\cdot s_2 + x^2\cdot s_3 + x^3\cdot s_4 = 0$

führt mithilfe der ersten drei Ableitungen sofort zu $(x=0)$
$s_4 = 0 \implies s_3 = 0 \implies s_2 = 0 \implies s_1 = 0 \implies$ fertig !

b) Hier genügt offenbar schon die lineare Unabhängigkeit :
$1\cdot s_1 + (x-1)\cdot s_2 + (x-1)\cdot(x-2)\cdot s_3 + (x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)\cdot s_4 = 0$

führt für $x = 1$ zu $s_1 = 0$
$x = 2$ zu $s_2 = 0$
$x = 3$ zu $s_3 = 0$
$x = 4$ zu $s_4 = 0$ $\implies$ <u>Ja</u> !

c) ... mit der Basis <u>aus b)</u> und durch Einsetzen ergibt sich
in dieser Reihenfolge : $s_1 = 0$; $s_2 = 17$; $s_3 = 21$; $s_4 = 4$
$\implies f(x) = (x-1)\cdot(17 + 21\cdot(x-2) + 4\cdot(x-2)\cdot(x-3))$ mit
$N_0(f) = \{-\frac{1+\sqrt{17}}{8} ; \frac{\sqrt{17}-1}{8} ; 1\}$

(L10) a) $\vec{AB} = \binom{5}{1}, \vec{BC} = \binom{1}{7}, \vec{CD} = -\vec{AB}, \vec{DA} = -\vec{BC}, \{\vec{AB}; \vec{BC}\}$ ist l.u.

$\Rightarrow$ Das Viereck ABCD ist ein Parallelogramm

mit $\alpha = \arccos\left(\frac{\vec{AB} \bullet \vec{AD}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AD}|}\right) = \arccos\left(\frac{1{,}2}{\sqrt{13}}\right) \approx 70{,}56° = \gamma$

$\beta = \delta = 180° - \alpha \approx 109{,}44°$

$A_p = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AD}| |\sin(\alpha)| = \underline{\underline{34}}$ (FE) !

b) $\vec{AB} = \binom{10}{2}, \vec{AC} = \binom{8}{6} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{4{,}6}{\sqrt{26}}\right) \approx 25{,}56°$

und mit $\vec{BC} = \binom{-2}{4} \Rightarrow \beta = \arccos\left(\frac{\vec{BA} \bullet \vec{BC}}{|\vec{BA}| \cdot |\vec{BC}|}\right) = \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{130}}\right) \approx 74{,}74°$

$\Rightarrow \gamma = 180° - \alpha - \beta \approx 79{,}70°$; $A_D = \frac{1}{2} A_p = \underline{\underline{22}}$ (FE) !

c) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{BC} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = \arccos(0) = 90°$;

$\beta = \arccos\left(\sqrt{\frac{13}{17}}\right) \approx 29{,}02°$ und $\gamma = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{17}}\right) \approx 60{,}98°$

$\Rightarrow A_D = \frac{1}{2} \cdot |\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{13} \cdot 2 = \underline{\underline{\sqrt{13}}}$ (FE) !

d) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{BC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{CD} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = -\vec{AB}, \vec{DA} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = -\vec{BC}$

$\alpha = \gamma = \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{290}}\right) \approx 79{,}85°$ und $\beta = \delta \approx 100{,}15°$;

$A_p = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AD}| \cdot |\sin(\alpha)| = \sqrt{29} \cdot 2 \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{1 - \frac{9}{290}} = \underline{\underline{2 \cdot \sqrt{281}}}$ (FE) !

(L11) a) $\vec{a} = \binom{0{,}6}{0{,}8} \cdot 5$ mit $|\vec{a}| = 5$ und $\alpha = \arccos(0{,}6) \approx 0{,}9273$ $(\hat{\approx} 53{,}13°)$

b) $\vec{b} = \binom{-1/\sqrt{5}}{2/\sqrt{5}} \cdot \sqrt{5}$ mit $|\vec{b}| = \sqrt{5}$ und $\beta = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \approx 2{,}0344$ $(\hat{\approx} 116{,}6°)$

c) $\vec{c} = \binom{1/2}{-\sqrt{3}/2} \cdot 2\sqrt{3}$ mit $|\vec{c}| = 2\sqrt{3}$ und $\gamma = -\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$ $(\hat{=} -60°)$

d) $\vec{d} = \binom{-1-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}}$ mit $|\vec{d}| = \sqrt{5 + 2\sqrt{2}}$ und $\delta = -\arccos\left(-\frac{1+\sqrt{2}}{|\vec{d}|}\right) \approx -2{,}6117$
$\approx -149{,}64°$!

(L12) a) $\vec{F_1} = \binom{\cos(45°)}{\sin(45°)} \cdot 4\,N = \binom{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} N$; $\vec{F_2} = \binom{-1/2}{\sqrt{3}/2} \cdot 3\,N$; $\vec{F_3} = \binom{\sqrt{3}}{-1} N$

b) $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} \approx \binom{3{,}0605}{4{,}4265} N$ c), d) $|\vec{F}| \approx 5{,}3815\,N$ und
$\arg(\vec{F}) \approx 0{,}9659$ $(\hat{\approx} 55{,}34°)$!

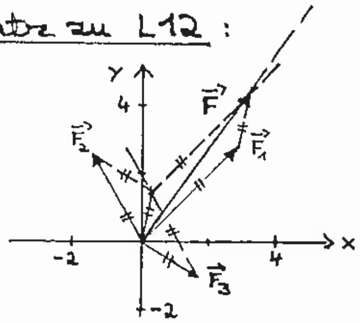
(L13) a) Ansatz: $\vec{a}_{\parallel} = \vec{b} \cdot s$ mit $\vec{a} = \vec{a}_{\parallel} + \vec{a}_{\perp}$ $| \vec{b} \bullet$
ergibt s gemäß der Behauptung !

b) In 10 a), d) beträgt der Flächeninhalt gemäß dem Term

$F = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AC} - \vec{AB} \cdot \frac{\vec{AB} \bullet \vec{AC}}{\vec{AB} \bullet \vec{AB}}| = |\vec{AC} \cdot (\vec{AB} \bullet \vec{AB}) - \vec{AB} \cdot (\vec{AB} \bullet \vec{AC})| / |\vec{AB}|$

und in 10 b), c) die Hälfte davon !

Zusatz zu L12 :



c) z.B. erst $\vec{F_2} + \vec{F_3}$, dann $\vec{F_1} + (\vec{F_2} + \vec{F_3}) = \vec{F}$

per Parallelogrammkonstruktion

$\Rightarrow |\vec{F}| \approx \underline{\underline{5{,}4\,N}}$ und

$\arg(\vec{F}) \approx \underline{\underline{55°}}$

ⓁⒶ **(L14)** a) $\underset{\substack{1\\0}}{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}} \times \underset{\substack{0\\1}}{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \wedge \underset{\substack{0\\0}}{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}} \times \underset{\substack{1\\0}}{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \wedge \underset{\substack{0\\1}}{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}} \times \underset{\substack{0\\0}}{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ ✓

b) $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix}u_2v_3-u_3v_2\\u_3v_1-u_1v_3\\u_1v_2-u_2v_1\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}v_2u_3-v_3u_2\\v_3u_1-v_1u_3\\v_1u_2-v_2u_1\end{pmatrix} = -\vec{v} \times \vec{u}$ ✓

$\wedge \quad \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w} \cdot s = \begin{pmatrix}u_2v_3-u_3v_2+(u_2w_3-u_3w_2)\cdot s\\ \vdots \\ \end{pmatrix} \overset{\cdots}{=} \vec{u} \times (\vec{v}+\vec{w}\cdot s)$ ✓

c) $\vec{u} \times \vec{u} \overset{b)}{=} -\vec{u} \times \vec{u} \quad \Rightarrow \quad \vec{u} \times \vec{u} = \vec{o}$ ✓ und

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = (u_2v_3-u_3v_2)^2 + (u_3v_1-u_1v_3)^2 + (u_1v_2-u_2v_1)^2$$

$$= u_1^2 \cdot (v_2^2+v_3^2) + u_2^2 \cdot (v_1^2+v_3^2) + u_3^2 \cdot (v_1^2+v_2^2)$$

$$-2 \cdot (u_1v_1u_2v_2 + u_1v_1u_3v_3 + u_2v_2u_3v_3)$$

$$= (u_1^2+u_2^2+u_3^2) \cdot (v_1^2+v_2^2+v_3^2)$$

$$-((u_1v_1)^2+(u_2v_2)^2+(u_3v_3)^2+2\cdot(u_1v_1u_2v_2+u_1v_1u_3v_3+u_2v_2u_3v_3))$$

$$= |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$$ ✓

d) $|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) \overset{c)}{=} |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$

$$\overset{\text{Kosinussatz}}{=} |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 - (|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\varphi))^2$$

$\sqrt{}$ $\quad = |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 \cdot (1-\cos^2(\varphi)) = (|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin(\varphi))^2$

$\Rightarrow |\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot |\sin(\varphi)| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin(\varphi)$

bei $0 \leq \varphi \leq \pi$ ✓

(L15) a) $\left[\underset{\substack{1\\3}}{\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}} \times \underset{\substack{2\\-1}}{\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}}\right] \cdot \begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-1\\-7\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix} = 3\cdot4 - 1\cdot1 - 7\cdot2 = -3 < 0$

$\Rightarrow$ Linkssystem !

b) Spatprodukt $= 8 > 0 \Rightarrow$ Rechtssystem !

c) ONB und Rechtssystem ($\rightsquigarrow$ Zylinderkoordinaten !) !

d) $r > 3 \quad \Rightarrow$ Rechtssystem

$r = 0 \quad \Rightarrow$ Komplanarität

$r < 3 \quad \Rightarrow$ Linkssystem

($\vec{a} \cdot \vec{b}_r = 2r-1 = 0 \Leftrightarrow r = 1/2$; $\vec{a} \cdot \vec{c} = 5 \neq 0$;

$\vec{b}_r \cdot \vec{c} = r-4 = 0 \Leftrightarrow r = 4$)

e) $\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\-1\end{pmatrix} \cdot s_1 + \begin{pmatrix}-1\\1\\3\\1\end{pmatrix} \cdot s_2 + \begin{pmatrix}2\\-2\\0\\1\end{pmatrix} \cdot s_3 + \begin{pmatrix}0\\1\\7\\3\end{pmatrix} \cdot s_4 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow s_1 = s_3 \wedge s_2 = 3s_3$

$\wedge\ s_4 = -s_3$

z.B. $s_3 = 1$ ergibt $\begin{pmatrix}0\\1\\7\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-2\\-1\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}-1\\1\\3\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\-2\\0\\1\end{pmatrix}$

... nicht linear unabhängig !

(L16) a) $O = \frac{1}{2} \cdot (|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| + |\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}| + |\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}|)$

$= \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{1662} + \sqrt{6234} + \sqrt{1572} + \sqrt{6036}) \approx 118{,}53$ (FE)

und $V = \frac{1}{6} \cdot |(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}| = \frac{1}{6} \cdot \left|\begin{pmatrix}37\\2\\-17\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}6\\1\\10\end{pmatrix}\right| = 9$ (VE)

b) $O = \frac{\sqrt{29} + \sqrt{274} + 3\cdot\sqrt{70} + \sqrt{69}}{2} \approx 27{,}67$ (FE) ; $V = 3{,}1\overline{6}$ (VE)

c) $O = 2\pi^2\sqrt{3}$ FE $\approx 34{,}19$ FE und $V = \frac{\pi^3}{3} \approx 10{,}34$ VE

(L17) <u>a)</u> $\vec{c} = \begin{pmatrix} -\cos(\lambda)\sin(\beta) \\ -\sin(\lambda)\sin(\beta) \\ \cos(\beta) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(\lambda)\cos(\beta) \\ \sin(\lambda)\sin(\beta) \\ \sin(\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\lambda) \\ \cos(\lambda) \\ 0 \end{pmatrix}$

Anm.: $\lambda \in]-180^\circ; 180^\circ]$ ist die geographische Länge
$\beta \in [-90^\circ; 90^\circ]$ ist die geographische Breite
$\lambda = 0^\circ \triangleq$ London - Greenwich !
($\sim$> Kugelkoordinaten, räumliche Polarkoordinaten !)

<u>b)</u> $1 \cdot 1 \cdot \cos(\beta - \alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta) \\ \sin(\beta) \\ 0 \end{pmatrix} = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$ ✓

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \sin(\beta - \alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(\beta) \\ \sin(\beta) \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_3 \cdot (\cos(\alpha)\sin(\beta) - \sin(\alpha)\cos(\beta))$ ✓

<u>c)</u>* $s_1 \cdot \cos(x) + s_2 \cdot \sin(x) = A \cdot \sin(x - \varphi)$ ist für $s_1 = 0$
mit $A = |s_2|$, $\varphi \in \{0; \pi\}$
schon klar. Es sei nun $s_1 \neq 0$. Setze

$$A := \sqrt{s_1^2 + s_2^2} > 0$$

Dann ist $s_1 \cdot \cos(x) + s_2 \cdot \sin(x) = A \cdot \left(\frac{s_1}{A} \cdot \cos(x) + \frac{s_2}{A} \cdot \sin(x) \right)$

mit $\left|\frac{s_1}{A}\right|, \left|\frac{s_2}{A}\right| \in [0; 1]$ <u>und</u> $\left(\frac{s_1}{A}\right)^2 + \left(\frac{s_2}{A}\right)^2 = 1$,

und damit gibt es einen Winkel $\varphi \in]-\pi; \pi]$, so dass
$\sin(-\varphi) = s_1 / A \quad \wedge \quad \cos(-\varphi) = s_2 / A$

$$\underset{b)}{\overset{AT}{\Longrightarrow}} \quad s_1 \cdot \cos(x) + s_2 \cdot \sin(x) = A \cdot \sin(x - \varphi) \quad ✓$$

$$\left(= A \cdot \cos\left(x - \varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

(L18) $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = (u_2 v_3 - u_3 v_2) w_1 + (u_3 v_1 - u_1 v_3) w_2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1) w_3$
und
$(\vec{w} \times \vec{u}) \cdot \vec{v} = (w_2 u_3 - w_3 u_2) v_1 + (w_3 u_1 - w_1 u_3) v_2 + (w_1 u_2 - w_2 u_1) v_3$
sind
nach Ausmultiplikation ersichtlich äquivalent !
Anm.: Demnach ist auch $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$!

(L19) $g: \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \times \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right] = \vec{o}$ und $h: \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \vec{o}$

mit $\vec{r}_g \times \vec{r}_h = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \neq \vec{o}$ und $\vec{p}_h - \vec{p}_g = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\Longrightarrow d(g,h) \overset{V}{=} \frac{|(\vec{r}_g \times \vec{r}_h) \cdot (\vec{p}_h - \vec{p}_g)|}{|\vec{r}_g \times \vec{r}_h|} = \frac{33}{\sqrt{59}} \approx 4{,}30 \text{ (LE)}$$

$\Longrightarrow$ g und h sind windschief !

$g: \vec{x} = \vec{p}_g + \vec{r} \cdot s \quad \wedge \quad E: \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{p}_E) = 0$

Einsetzen der PF von g in die NF von E ergibt die Bestimmungsgleichung $\vec{n} \cdot \vec{r} \cdot s = \vec{n} \cdot (\vec{p}_E - \vec{p}_g)$ ... ist nur für $\vec{n} \cdot \vec{r} \neq 0$ eindeutig nach s aufzulösen.

Also: $\vec{n} \cdot \vec{r} \neq 0 \iff g \cap E$ hat genau ein Element !

$$d(M,g) = \frac{|\vec{r} \times (\vec{m} - \vec{p}_g)|}{|\vec{r}|} \begin{cases} > r_K & \Longrightarrow g \text{ ist Passante} \\ = r_K & \Longrightarrow g \text{ ist Tangente} \\ < r_K & \Longrightarrow g \text{ ist Sekante} \end{cases}$$

der Kugel $\mathcal{K}$ mit dem Mittelpunkt M, $\vec{m} = \overrightarrow{OM}$ und dem Radius r_K !

(L20) **a)** $E_1 : \begin{pmatrix} \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 8$ und $E_2 : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 12 \Rightarrow \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix}$

$\overset{V}{\Longrightarrow} E_1 \cap E_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot s \quad \wedge \quad s \in \mathbb{R} \; ; \; \sigma = \frac{\pi}{3}$

b) $E_3 : \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 0 \Rightarrow \vec{n}_1 \times \vec{n}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix} = 7 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\overset{V}{\Longrightarrow} E_1 \cap E_3 : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{8}{7}\right) \right] = 0 \; ; \; \sigma = \frac{\pi}{3}$

c) $E_2 \cap E_3 = \emptyset$; da beide Gleichungen einander widersprechen ! $\Rightarrow E_2 \parallel E_3$

$d(E_2, E_3) = d(P_2(4|4|0), E_3) = 12/\sqrt{14} \approx 3{,}21$ (LE)

d) $E_1 \cap E_2 \cap E_3 = E_1 \cap (E_2 \cap E_3) = E_1 \cap \emptyset = \emptyset$!

(L21) **a)** $\vec{p}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{8}{7} + \begin{pmatrix} 13 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \frac{\cos(100\pi t/s)}{7} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \frac{\sqrt{14} \cdot \sin(100\pi t/s)}{7}$

b) $\vec{p}(0{,}02\,s) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \vec{p}$; $\vec{p}(59{,}95\,s) = \begin{pmatrix} -5 \\ 18 \\ 27 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{7}$ ($\omega t = 5395\,\pi$!)

und $\vec{p}(999{,}995\,s) = \begin{pmatrix} 8 \\ 16 - 3\sqrt{14} \\ 24 + 2\sqrt{14} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{7}$ ($\omega t = 100000\,\pi - \frac{\pi}{2}$!)

c) $\vec{v}(t) = \dot{\vec{p}}(t) = \left[\begin{pmatrix} -13 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{100\pi \cdot \sin(100\pi t/s)}{7} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \frac{100\pi\sqrt{14} \cdot \cos(100\pi t/s)}{7} \right] \frac{cm}{s}$;

$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \left[\begin{pmatrix} -13 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{10000\pi^2 \cos(100\pi t/s)}{7} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{10000\pi^2\sqrt{14} \cdot \sin(100\pi t/s)}{7} \right] \frac{cm}{s^2}$

mit $|\vec{v}(t)| = \frac{100\pi\sqrt{182}}{7} \frac{cm}{s}$ und $|\vec{a}(t)| = \frac{10000\pi^2 \cdot \sqrt{182}}{7} \frac{cm}{s^2}$

unabhängig vom Zeitpunkt t !

d) Mit $\vec{\omega}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{14}}$; $\vec{v}_0(t) = \begin{pmatrix} -13 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{\sin(100\pi t/s)}{\sqrt{182}} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \frac{\cos(100\pi t/s)}{\sqrt{13}}$

und $\vec{a}_0(t) = \vec{a}(t) \cdot |\vec{a}(t)|^{-1} = \begin{pmatrix} -13 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{\cos(100\pi t/s)}{\sqrt{182}} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \frac{\sin(100\pi t/s)}{\sqrt{13}}$

erhält man tatsächlich $(\vec{\omega}_0 \times \vec{v}_0(t)) \cdot \vec{a}_0(t) = +1$
und wegen $|\vec{\omega}_0| = |\vec{v}_0(t)| = |\vec{a}_0(t)| = 1$

$\overset{V}{\Longrightarrow} \{ \vec{\omega}_0 ; \vec{v}_0(t) ; \vec{a}_0(t) \}$ ist Rechtssystem und ONB, also orthonormales Rechtssystem !

(L22) **a)** $\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = 13$ ✓ (Rechtssystem !) **b)** $\vec{x} = \begin{pmatrix} 21 \\ 45 \\ 28 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{13}$ (Cramer !)

c) $y = 2x^2 - 3x + 4$ (nach Ansatz : $y = a + b(x+1) + c(x+1)(x-3)$!)

d) $y = 7x - 10x^3 + 3x^5$

(L23) **a)** $(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \cdot \vec{a}_3 = -4 \neq 0$ (Linkssystem)

b) $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} ; \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{11} ; \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 2$ **c)** $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{11}} ; \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{22}} ; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$

(L24) **a)** $\vec{s}\,' = \vec{s} - \vec{n} \cdot \frac{\vec{n} \cdot \vec{s}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \cdot 2$

b) Mit $r = \frac{c_0 \cdot t}{\sqrt{6}}$ wird der Anfangsstrahl $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot r \; ; \; r \leq 1$;

erst ($r = 1$!) an $E_{13} : x_2 = 0$ reflektiert $\Rightarrow g' : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot (r-1)$

dann an $E_{12} : x_3 = 0$ $(r = \frac{3}{2}) \Rightarrow g'' : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot (r - \frac{3}{2})$ und an E_{23}

$\overset{r \geq 2}{\Longrightarrow} \underline{\underline{g''' : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot (r-2)}}$ mit $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{s}\,''' = \vec{s} - \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i \cdot (\vec{e}_i \cdot \vec{s}) \cdot 2 = -\vec{s} = -\left(-\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$!

einfallend
$\xrightarrow{\vec{s}}$

$\xleftarrow{\vec{s}\,'''}$
ausfallend
(immer ∥ $\vec{s}$!)

(L25) $\underline{A}\cdot\underline{B}=\begin{pmatrix}-9&22\\7&8\\22&18\end{pmatrix}$; $\underline{B}\cdot\underline{A}$ n.d.; $(\underline{A}\cdot\underline{B})\cdot\underline{C}=\begin{pmatrix}40&44&57\\-6&16&31\\-26&36&76\end{pmatrix}=\underline{A}\cdot(\underline{B}\cdot\underline{C})$;

$\underline{A}^2-\underline{B}\cdot\underline{C}=\begin{pmatrix}6&7&10\\2&-9&3\\50&14&18\end{pmatrix}$; $\underline{C}\cdot\underline{B}-2\underline{1}_2=\begin{pmatrix}5&-2\\8&14\end{pmatrix}$; $(\underline{A}\cdot\underline{B})^T=\begin{pmatrix}-9&7&22\\22&8&18\end{pmatrix}=\underline{B}^T\underline{A}^T$;

$\underline{A}^T\cdot\underline{B}^T$ n.d.; $\underline{A}\cdot(\underline{B}+\underline{C}^T)=\begin{pmatrix}-12&35\\9&16\\15&37\end{pmatrix}$; $(\underline{C}\cdot\underline{A}+\underline{B}^T)^T=\begin{pmatrix}1&22\\-12&7\\8&22\end{pmatrix}=\underline{B}+\underline{A}^T\underline{C}^T$;

und aus $\underline{A}\cdot\underline{X}=\underline{1}_3 \Leftrightarrow \underline{X}=\underline{A}^{-1}\cdot\underline{1}_3=(\underline{A}^{-1}\cdot\underline{e}_1\,|\,\underline{A}^{-1}\cdot\underline{e}_2\,|\,\underline{A}^{-1}\underline{e}_3)$

per Cramer Regel $\underline{A}^{-1}\cdot\underline{e}_1=\frac{1}{56}\begin{pmatrix}7\\12\\-6\end{pmatrix}$; $\underline{A}^{-1}\cdot\underline{e}_2=\frac{1}{56}\begin{pmatrix}-21\\4\\26\end{pmatrix}$;

$\underline{A}^{-1}\cdot\underline{e}_3=\frac{1}{56}\begin{pmatrix}7\\-4\\2\end{pmatrix} \Rightarrow \underline{A}^{-1}=\frac{1}{56}\begin{pmatrix}7&-21&7\\12&4&-4\\-6&26&2\end{pmatrix}$!

(L26) … geht effektiv per Falk Schema

a)

$$\begin{array}{cc|cc|cc|cc|c}
 & & 0 & a & 0 & a & 0 & a & \dots\\
 & & a & 0 & a & 0 & a & 0 & \\
\hline
0 & a & a^2 & 0 & 0 & a^3 & a^4 & 0 & \dots\\
a & 0 & 0 & a^2 & a^3 & 0 & 0 & a^4 &
\end{array}
\qquad
\underline{A}^n=\begin{cases}a^n\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} & \text{für gerade } n\\ a^n\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} & \text{für ungerade } n\end{cases}$$

b)

$$\begin{array}{cc|cc|cc|cc|c}
 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots\\
 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \\
\hline
1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 4 & 8 & 8 & \dots\\
1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 4 & 8 & 8 &
\end{array}
\qquad
\underline{A}^n=2^{n-1}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{array}{cc|cc|cc|cc|c}
 & & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & \dots\\
 & & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 & \\
\hline
1 & 2 & 1 & 8 & 1 & 26 & 1 & 90 & \dots\\
0 & 3 & 0 & 9 & 0 & 27 & 0 & 3^4 &
\end{array}
\qquad
\underline{A}^n=\begin{pmatrix}1&(3^n-1)\\0&3^n\end{pmatrix}$$

(L27) **a)** $5\underline{A}-4\underline{B}=\begin{pmatrix}(5-4a)&-(5+4b)&(10-4c)\\6&-5&-3\\15&-14&10\end{pmatrix}\overset{!}{=}\begin{pmatrix}1&-2&4\\ \cdot&\cdot&\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix} \Leftrightarrow a=1\wedge b=-\frac{3}{4}\wedge c=\frac{3}{2}$

b) $\underline{A}\cdot\underline{B}=\begin{pmatrix}(a-1)&(b+2)&(c-2)\\(2a-1)&(2b+1)&(2c-2)\\(3a-2)&(3b+2)&(3c-4)\end{pmatrix}\overset{!}{=}\begin{pmatrix}1&-2&4\\ \cdot&\cdot&\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix} \Leftrightarrow a=2\wedge b=-4\wedge c=6$

c) $\underline{B}\cdot\underline{A}=\begin{pmatrix}(a+2b+3c)&-(a+b+2c)&(2a+b+2c)\\7&-5&6\\2&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2&4\\ \cdot&\cdot&\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix} \Leftrightarrow a=2\wedge b=-2\wedge c=1$

(L28) **a)** $\underline{A}^{-1}=\frac{1}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}}\begin{pmatrix}a_{22}&-a_{12}\\-a_{21}&a_{11}\end{pmatrix}$ nur für $\det(\underline{A})=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}\neq 0$

b) $(R_1+R_2)\cdot J_1+R_2\cdot J_2-U_1=0$ (Maschenstromverfahren)

$R_2\cdot J_1+R_2\cdot J_2-U_2=0$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}(R_1+R_2)&R_2\\R_2&R_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}J_1\\J_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}U_1\\U_2\end{pmatrix}$ mit $\underline{J}=\begin{pmatrix}J_1\\J_2\end{pmatrix}$, $\underline{U}=\begin{pmatrix}U_1\\U_2\end{pmatrix}$ und

der Widerstandsmatrix $\underline{R}=R_2\begin{pmatrix}(1+R_1/R_2)&1\\1&1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Leitwertmatrix $\underline{R}^{-1}=\frac{1}{R_1}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&(1+R_1/R_2)\end{pmatrix}$, z.B. für

$R_1=R_2=100\,\Omega$ und $U_1=2\,V$ sowie $U_2=1{,}5\,V$

$\Rightarrow \underline{J}=\underline{R}^{-1}\cdot\underline{U}=\frac{1}{100\,\Omega}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2V\\1{,}5V\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\10\end{pmatrix}mA$ bzw.

$J_1=5\,mA=0{,}005\,A$; $J_2=10\,mA \Rightarrow J_{R_1}=J_1+J_2=\underline{\underline{15\,mA}}$!

L29 a)

x_1	x_2	b_1	b_2
1	0	1	-1
0	1	-1	2

und für $\underline{b} = \begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \underline{x} = \begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$

b)

x_1	x_2	b_1	b_2
1	2	1/2	0
0	0	-1/2	1/3

nur lösbar für $2b_2 = 3b_1 \quad | \; b_1 = 3 \wedge b_2 = 1$

$2 = 9$ ↯

$\mathbb{L} = \{\}$ (parallele Geraden !)

c)

x_1	x_2	b_1	b_2
1	2	1	0
0	0	-3	1

nur lösbar für $b_2 = 3b_1 \quad | \; b_1 = 1 \wedge b_2 = 3$

$3 = 3$ ✓

(beide Geraden sind gleich) $\boxed{x_2 = \frac{1-x_1}{2}}$

L30 a) $\underline{A}^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}2 & 11 & -6\\-1 & -16 & 10\\-2 & 3 & -1\end{pmatrix}$, $\underline{x} = \underline{A}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}10\\1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$

b) $\underline{A}^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}-5 & -1 & 10\\5 & 1 & -4\\4 & 2 & -8\end{pmatrix}$, $\underline{x} = \underline{A}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}15\\33\\12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\10\\5\end{pmatrix}$

c)

x_1	x_2	x_3	b_1	b_2
1	0	2/3	1/3	1/3
0	1	-10/3	1/3	-2/3

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix} + \frac{2x_3}{3}\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \quad \underline{x} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\1 & -2 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-2\\10\\3\end{pmatrix} \qquad (s := \frac{x_3}{3} \in \mathbb{R})$

$\mathbb{L}$ ist stets eine solche Gerade, und für $b_1 = 1 \wedge b_2 = 2$

$\Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix}-2\\10\\3\end{pmatrix} \times \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right] = \vec{o}}$

d) $\underline{A}^{-1} = \frac{1}{18000}\begin{pmatrix}236 & 40 & 110\\50 & 100 & 50\\115 & 50 & 250\end{pmatrix} \Rightarrow \underline{x} = \underline{A}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}300\\150\\120\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\2\\4\end{pmatrix}$

e) $\underline{A}^{-1} = \frac{1}{52}\begin{pmatrix}-14 & 20 & 12 & 22\\17 & -28 & 4 & 3\\-5 & -4 & 8 & -7\\18 & 4 & -8 & -6\end{pmatrix} \Rightarrow \underline{x} = \underline{A}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{26}\begin{pmatrix}-4\\3\\-7\\20\end{pmatrix}$

L31 a) vgl. L28 b) ! b) $\mathbb{L}_c = \{\underline{x} = \begin{pmatrix}0\\5c/2\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}4\\1\\-2\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}5\\0\\0\\1\end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \wedge s \in \mathbb{R}\}$

c) $\mathbb{L} = \{s\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R}\}$ für $\lambda = 0{,}5$; $\mathbb{L} = \{s\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R}\}$ für $\lambda = 0{,}6$;

$\mathbb{L} = \{s\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R}\}$ für $\lambda = 1$ (Eigenwerte und Eigenräume !)

$\mathbb{L} = \{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\}$ bzw. $\{(0|0|0)\}$ sonst !

d) $\mathbb{L}_{a=2} = \{\}$, $\mathbb{L}_{a=-2} = \{\begin{pmatrix}1/19\\-4/19\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-48\\2\\0\\19\end{pmatrix}\cdot s \mid s \in \mathbb{R}\}$, $\mathbb{L}_{|a| \neq 2} = \{\frac{1}{19a-38}\begin{pmatrix}a+46\\6-4a\\0\\-19\end{pmatrix}\}$

L32 a) $\underline{R} = \begin{pmatrix}(R_1+R_2+R_i) & -R_2 & -R_i\\-R_2 & (R_2+R_3) & -R_3\\-R_i & -R_3 & (R_3+R_4+R_i)\end{pmatrix}$

b) schneller per Cramer Regel mit $\underline{R}^{-1} = (\underline{R}^{-1}\cdot\vec{e}_1 \; \underline{R}^{-1}\cdot\vec{e}_2 \; \underline{R}^{-1}\cdot\vec{e}_3)$,

$|\underline{R}| = \det(\underline{R}) \overset{\dots}{=} R_1R_2(R_3+R_4+R_i) + R_3R_4(R_1+R_2+R_i) + R_i(R_1R_3+R_2R_4) > 0\,\Omega^3$

$(= 23125\,\Omega^3)$

$$\underline{R}^{-1} = \frac{1}{|\underline{R}|}\begin{pmatrix}R_2(R_3+R_4+R_i)+R_3(R_4+R_i) & R_2(R_3+R_4+R_i)+R_3R_i & R_2R_3+R_i(R_2+R_3)\\R_2(R_3+R_4+R_i)+R_3R_i & (R_1+R_2+R_i)(R_3+R_4)+(R_1+R_2)R_i & (R_1+R_2+R_i)R_3+R_iR_2\\R_2R_3+R_i(R_2+R_3) & (R_1+R_2+R_i)R_3+R_iR_2 & (R_1+R_2+R_i)R_3+(R_1+R_i)R_2\end{pmatrix}$$

c) $\underline{I} = \underline{R}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}0\\u_2\\0\end{pmatrix} \wedge I_1 = I_3 \Rightarrow R_4 = \frac{R_1R_3}{R_2} = \underline{\underline{15\,\Omega}} \wedge I_1 = I_3 = \underline{\underline{0{,}18\text{ A}}}$

(Anm.: Dabei ist $I_{R_i} = I_1 - I_3 = 0$ A (am Ampèremeter)

Lösungen zu den „Aufgaben (zu Matrizengleichungen, ...)"

zu 1. **a)** $\underline{X}=(\underline{A}-3\underline{1})^{-1}\cdot(3\underline{C}-2\underline{B})$ **b)** $\underline{X}=\frac{1}{2}(2\underline{1}-\underline{A})^{T^{-1}}\cdot(3\underline{B}+4\underline{C})$

c) $\underline{X}=(3\underline{A}-\underline{1})^{-1}(4\underline{B}-\underline{C})$ **d)** $\underline{X}=(\underline{A}^T-\underline{B}-3\underline{1})^{-1}$

e) $\underline{X}=(2\underline{A}+\underline{B}-2\underline{1})^{-1}\cdot(\underline{C}+3\underline{B})$ **f)** $\Leftrightarrow \underline{A}=\underline{1}$

g) $\underline{X}=(\underline{A}+\underline{M})\cdot(\underline{A}\cdot\underline{B}-\underline{C})^{-1}$ **h)** $\underline{X}=\underline{A}^{-1}\underline{C}\cdot\underline{B}^{-1}$

i) $\underline{X}=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&1\\0&1&2\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}\underset{!\text{direkt}!}{\overset{\text{GJV}}{=}}\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2&-1&1\\0&2&-2\\2&1&3\end{pmatrix}$ **j)** $\overset{T}{\Leftrightarrow}\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&1\\0&1&2\end{pmatrix}\cdot\underline{X}^T=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

liefert $\underline{X}^T=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3&1&2\\-2&2&0\\1&-1&2\end{pmatrix}$

und damit $\underline{X}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3&-2&1\\1&2&-1\\2&0&2\end{pmatrix}$ oder („Transfer") **direkt**

(Falkschema !)

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc}
 & & & 1 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 & -2/4 & 0 & 0 & 1\\
 & & & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\
 & & & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\
\hline
2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\
1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\
0 & 1 & 2 & 4 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 & -2/4 & 3/4 & -2/4 & 1/4\\
1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1/4 & 1/4 & 2/4 & 1/4 & 2/4 & -1/4\\
1 & 1 & 1 & 2 & -1 & 1 & 2/4 & 2/4 & 0 & 2/4 & 0 & 2/4
\end{array}\Leftrightarrow \underline{X}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3&-2&1\\1&2&-1\\2&0&2\end{pmatrix}$$

Anfangsschema Endschema

(Multiplikation von rechts bewirkt elementare Spaltenumformung!)

zu 2. $\underline{A}\underline{X}+\underline{B}=\underline{A}\Leftrightarrow\underline{X}+\underline{A}^{-1}\cdot\underline{B}=\underline{1}\Leftrightarrow\underline{X}=\underline{1}-\underline{A}^{-1}\cdot\underline{B}$

und Bestimmung von $\underline{A}^{-1}\underset{\text{GJV}}{\overset{\cdots}{=}}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&-1&2\\-1&1&0\end{pmatrix}$ liefert $\underline{X}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-3&2&-1\\1&0&1\\-1&-2&1\end{pmatrix}$,

oder GJV mit $\underline{A}\cdot\underline{X}=\underline{A}-\underline{B}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-2&-1&1\\0&-1&1\end{pmatrix}$ (direkt und speziell !)

$\underline{X}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-3&2&-1\\1&0&1\\-1&-2&1\end{pmatrix}$ ohne $\underline{A}^{-1}$!

$(Z_2-Z_1 \wedge Z_1-Z_3 ; Z_1+\frac{1}{2}Z_2 \wedge Z_2\cdot\frac{1}{2} \wedge Z_3-\frac{1}{2}\cdot Z_2 ; Z_2\leftrightarrow Z_3$!)

zu 3. $\underline{X}\cdot\underline{B}+2\underline{X}=\underline{B}\Leftrightarrow\underline{X}\cdot\begin{pmatrix}1&3&2\\2&5&3\\-3&-8&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&3&2\\2&3&3\\-3&-8&-6\end{pmatrix}\underset{\text{vgl. 1.}}{\overset{\text{GJV}}{\Longleftrightarrow}}\underline{X}=\begin{pmatrix}9&-8&-2\\-2&5&2\\-2&-2&-1\end{pmatrix}$

(direkt von rechts : $\underline{X}=\underline{B}\cdot\begin{pmatrix}1&-3&-2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&-8&-2\\-2&5&2\\-2&-2&-1\end{pmatrix}$)

zu 4. **a)** $\underline{X}=\frac{1}{2}(\underline{A}^T+\underline{1})^{-1}\cdot\underline{B}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}2&-1\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3&2\\1&-2\end{pmatrix}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-7&6\\1&-2\end{pmatrix}$

b) $\underline{X}=2(3\underline{1}-(\underline{A}+\underline{B})^2+\underline{C}^T)^{-1}\cdot\underline{C}=2\begin{pmatrix}-4&1\\5&0\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}3&2\\-1&4\end{pmatrix}=\frac{2}{5}\begin{pmatrix}-1&4\\11&26\end{pmatrix}$

zu 5. $3\underline{A}_1^{-1}\cdot\underline{X}=\underline{A}_1^{-1}-\underline{A}_1\underline{X}\Leftrightarrow 3\underline{X}=\underline{1}_3-\underline{A}_1^2\cdot\underline{X}\Leftrightarrow(3\underline{1}_3+\underline{A}_1^2)\cdot\underline{X}=\underline{1}_3$

$\Leftrightarrow\underline{X}=(3\underline{1}_3+\underline{A}_1^2)^{-1}=\begin{pmatrix}0&7&0\\-9&-5&-6\\3&4&9\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{21}\begin{pmatrix}-1&-3&-2\\3&0&0\\-1&1&3\end{pmatrix}$

GJV oder
Cramer Regel $\Big\}\rightarrow \underline{A}_t$ ist regulär für alle $t\in\mathbb{R}\setminus\{-2;3\}$!

zu 6. **a)** $\underline{A}\cdot\underline{B}=\begin{pmatrix}-3&-3&0&1\\1&15&0&-5\\-3&15&0&-5\end{pmatrix}=\underline{A}\cdot\underline{C}$, $\underline{A}$ ist nicht regulär ! **b)** $\underline{A}=\begin{pmatrix}1&3&2\\2&1&-3\\4&-3&-1\end{pmatrix}\Rightarrow\underline{A}\cdot\underline{B}\neq\underline{A}\cdot\underline{C}$

c) Falls sie quadratisch und per GJV auf $\underline{1}$ zu bringen ist !

d) $(\underline{A}+\underline{B})^2=(\underline{B}+\underline{A})^2\neq\underline{A}^2+2\underline{A}\cdot\underline{B}+\underline{B}^2$ wg. i.a. $\underline{A}\cdot\underline{B}\neq\underline{B}\cdot\underline{A}$!

e) $A^T\cdot(\underline{A}^{-1})^T=(\underline{A}^{-1}\cdot\underline{A})^T=\underline{1}^T=\underline{1}\Rightarrow$ Beh. !

L38 $(f\circ g)(\underline{x}) = \begin{pmatrix} 3\cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 3\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \underline{x}$

(erst Streckung der 1. Komponente, dann Drehung um $O(0|0)$, Drehwinkel α)

$(g\circ f)(\underline{x}) = \begin{pmatrix} 3\cos(\alpha) & -3\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \underline{x}$

(erst Drehung, dann Streckung der 1. Komponente des gedrehten (Vektor-) Systems!)

L39 a) $\vec{y} = \begin{pmatrix} (1-\cos(\omega t)) & \sin(\omega t) & 0 \\ -\sin(\omega t) & (1-\cos(\omega t)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{a} + \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) & 0 \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$

... nur für $\vec{a} \sim \vec{\omega}_0$ linear (bzw. $g = x_3$-Achse)!

b) $\vec{y} = \begin{pmatrix} (1-\cos(\omega t)) & 0 & -\sin(\omega t) \\ 0 & 0 & 0 \\ \sin(\omega t) & 0 & (1-\cos(\omega t)) \end{pmatrix} \cdot \vec{a} + \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & 0 & \sin(\omega t) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\omega t) & 0 & \cos(\omega t) \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$

... nur für $\vec{a} \sim \vec{\omega}_0$ linear (bzw. $g = x_2$-Achse)!

c) $\vec{y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-\cos(\omega t)) & \sin(\omega t) \\ 0 & -\sin(\omega t) & (1-\cos(\omega t)) \end{pmatrix} \cdot \vec{a} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ 0 & \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$

... nur für $\vec{a} \sim \vec{\omega}_0$ linear (bzw. $g = x_1$-Achse)!

generell nur für $\vec{a} \sim \vec{\omega}_0$ linear, d.h. wenn g eine Ursprungsgerade ist!

⟶ Dann erkennt man $\vec{\omega}_0$ auch anhand der Bedingung $\underline{M} \cdot \vec{\omega}_0 = \vec{\omega}_0$ bzw. $(\underline{M} - \underline{1}_3) \cdot \vec{\omega}_0 = \vec{o}$!

L42 a) Die LT: $\underline{y} = \underline{D} \cdot \underline{x}$ verändert Längen und Winkel nicht, da sie sogar eine LOT ist!

b) $|\vec{w}| = |f(\vec{w})|$

c) $\left.\begin{array}{l} \det(\underline{D}) \overset{!}{=} (f(\vec{e}_1) \times f(\vec{e}_2)) \bullet f(\vec{e}_3) = +1 \\ \text{und } \underline{D}^{-1} = \underline{D}^T \end{array}\right\}$ $\underline{D}$ stellt eine Drehung dar

... und zwar um $\vec{e}_3 = \vec{\omega}_0$, Drehwinkel $\frac{\pi}{4}$ (bzw. 45°)!

L43 a) $\underline{x} = \frac{1}{26} \begin{pmatrix} 14 & -4 & 24 & 0 \\ -8 & 6 & -10 & 0 \\ 7 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \underline{c} + \frac{1}{26} \begin{pmatrix} 48 \\ -20 \\ -15 \\ 26 \end{pmatrix} \cdot x_4$, falls $c_1 + c_2 + c_3 - c_4 = 0$ wahr ist!

b) (i) $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ (ii) für kein $t \in \mathbb{R}$ (iii) für $t = 1$ mit

$\underline{x} = (1|-3|0|2)^T \Longleftarrow s = -2 \overset{x_1 = 1}{\Longleftarrow} \underline{x} = (3|3|2|0)^T + (1|3|1|-1)^T \cdot s \,;\, s \in \mathbb{R}$

L44 a) $\underline{B} \cdot \underline{C} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $\underline{C} \cdot \underline{B} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\underline{C} \cdot \underline{C} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\underline{X} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$, $\underline{X} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

d) $\underline{D}^T \cdot \underline{D} = \underline{D} \cdot \underline{D}^T \overset{!}{=} 1_2 \Rightarrow a = \mp \frac{1}{4}$ und mit $|\underline{D}| = 1 \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{4}}$!

—— Losungen der „Zusatzaufgaben zur Wiederholung"

LZ1 a) $\underline{M}^T \cdot \underline{M} \overset{\dots}{=} \underline{1}_3$ und $\det(\underline{M}) \overset{\dots}{=} 1 \Rightarrow f$ ist Drehung !

b) $f(\underline{x}) = \underline{x} \Leftrightarrow (\underline{M} - \underline{1}_3)\cdot \underline{x} = \vec{o} \overset{\dots}{\Leftrightarrow} \underline{\underline{\underline{x} \sim \begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 \\ 1 \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix}}}$

c) Wähle $\underline{u}$ mit $\underline{u} \bullet \begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 \\ 1 \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix} = 0$, z.B.

$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \overset{\dots}{\Rightarrow} f(\underline{u}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2}-4 \\ 3\sqrt{2}+1 \\ \sqrt{2}+1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \underline{u} \times f(\underline{u}) = -\frac{5}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 \\ 1 \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix}$ (hier reicht schon die erste Koordinate im Vergleich mit „b)" !!)

$\Rightarrow \underline{\underline{\underline{\alpha}_0 = -\begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 \\ 1 \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{7}}}}$ und (vgl.: $\underline{\alpha}_0 = \vec{\omega}_0$!)

$\alpha \overset{!}{=} \arccos\left(\frac{\vec{u} \bullet f(\vec{u})}{|\vec{u}| \cdot |f(\vec{u})|}\right) = \underline{\underline{\arccos(-\frac{3}{4})}} \approx \underline{\underline{2{,}4188584}}$

$(138{,}59°)$

LZ2 a) $\underline{X} = -(2\underline{A} - 4\underline{1})^{-1} \cdot (3\underline{B} + 4\underline{C})$

b) $\underline{X} = (\underline{A}^T - \underline{B} - 3\underline{1})^{-1}$

c) $\underline{X} = \underline{A}^{-1} \cdot \underline{C} \cdot \underline{B}^{-1}$

d) $\underline{X} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $\det(\underline{X}) \neq 0$, falls

$\underline{A} = \underline{1}_2 \wedge \underline{B} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \wedge \det(\underline{B}) \neq 0$ wahr ist,

sonst keine Lösung !

LZ3 a) $\underline{X} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -7 & 6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ b) $\underline{X} = \frac{2}{5}\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 11 & 26 \end{pmatrix}$

LZ4 a) $\mathcal{N}_0(f) = \{-\frac{3}{10}; \frac{1}{8}; 2\}$

b) $\mathcal{N}_0(f) = \{-\frac{1}{5}; \frac{1}{8}; \frac{1}{4}\}$

c) $\mathcal{N}_0(f) = \{-1; \approx 1{,}84\}$ (−1 ist doppelte Nullstelle, $f(-1) = f'(-1) = 0$)

Hier wurde per HS berechnet:

$$f(x) = \underbrace{(x^3 + x^2 - x + 1)}_{g(x)} \cdot (x+1)^2$$

mit $g(-1{,}5) \overset{\dots}{=} 1{,}375 > 0$

$g(-2) \overset{\dots}{=} -1 < 0$

wähle $a = -1{,}8 \Longrightarrow g(x) = (x^2 - 0{,}8x + 0{,}44)\cdot(x+1{,}8) + 0{,}208$

$\approx 5{,}12 \cdot (x+1{,}8) + 0{,}208$

in der Nähe der Stelle −1,8 („lineare Näherung" !)

Lösung von $0 = 5{,}12 \cdot (x+1{,}8) + 0{,}208$ ergibt $x \approx 1{,}84$

(An welches Verfahren erinnert Sie dies ?), $\mathcal{N}_0(f) = \{-1; \approx 1{,}84\}$

Lösungen zur S. 38 (NTV für $N_0(f)$ für $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 1$)

$$x_1 = a \quad \wedge \quad x_{n+1} = k(x_n) \quad \text{bei} \quad k(x) = \frac{x \cdot f'(x) - f(x)}{f'(x)}$$

mit $f'(x) = 12x^2 - 12x = 12x \cdot (x-1)$

$$\Rightarrow \quad k(x) = \frac{x \cdot (12x^2 - 12x) - (4x^3 - 6x^2 + 1)}{12x \cdot (x-1)} = \frac{8x^3 - 6x^2 - 1}{12x^2 - 12x} = \frac{1}{12} \cdot \frac{8x^3 - 6x^2 - 1}{x^2 - x}$$

$$= \frac{1}{12} \cdot \frac{(x^2 - x) \cdot (8x + 2) + 2x - 1}{x \cdot (x-1)} = \frac{8x+2}{12} + \frac{2x-1}{12 \cdot x \cdot (x-1)}$$

$$= \frac{4x+1}{6} + \frac{2x-1}{12x \cdot (x-1)}$$ oder besser

$$= \frac{2x^2 \cdot (4x-3) - 1}{12x \cdot (x-1)}$$ Damit gerechnet

1. Fall:

$x_1 = -0,5$

$x_2 = -0,3\overline{8} = -\frac{7}{18}$ // $\quad (0,3\overline{8} \cdot 100 - 38 = 0,\overline{8} = 0,\overline{8} \cdot 10 - 8 = \frac{8}{9})$

$x_3 = -0,366878306 \left(= -\frac{3467}{9450}\right)$

$x_4 = -0,36602666$

$x_5 = -0,366025403$

$x_6 = \underline{\underline{-0,366025403}}$ steht

x_2 via HS:

$$\begin{array}{cccl} 4 & -6 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & -2 \\ 4 & -8 & 4 & \boxed{-1} = f(-0,5) \\ 0 & -2 & 5 & \\ 4 & -10 & \boxed{9} = f'(-0,5) & \end{array}$$

$$\Rightarrow x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{-1}{9} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{9} = \underline{\underline{-\frac{7}{18}}} \; !$$

Bem.: auffällig ist (2)

$$12 \cdot x_\infty^{(1)} (x_\infty^{(1)} - 1) = 6$$

$$\Leftrightarrow (x_\infty^{(1)})^2 - x_\infty^{(1)} - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x_\infty^{(1)} = \frac{1}{2} (\mp) \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}} = \underline{\underline{\frac{1-\sqrt{3}}{2}}} \quad (\overset{TR}{=} \text{s.o.!})$$

Kontrolle per HS:

$$\begin{array}{cccl} 4 & -6 & 0 & 1 \\ 0 & 2-2\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} & -1 \\ 4 & -4-2\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} & \boxed{0} = f\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) \end{array}$$

NR: $-(2+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})$
$= -(-1-\sqrt{3}) = 1+\sqrt{3}$

2. Fall:

$x_1 = 0,5$

$x_2 = \underline{\underline{0,5}} = x_\infty^{(2)}$

HS

$$\begin{array}{cccl} 4 & -6 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \\ 4 & -4 & -2 & \boxed{0} = f(0,5) \\ 0 & 2 & -1 & \\ 4 & -2 & \boxed{-3} = f'(0,5) & \end{array}$$

3. Fall:

$x_1 = 1,5 = \frac{3}{2}$

$x_2 = \frac{1,5 \cdot 9 - 1}{9} = \frac{12,5}{9} = \frac{125}{90} = \underline{\underline{\frac{25}{18}}}$

$$\begin{array}{cccl} 4 & -6 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & \boxed{1} = f(1,5) \\ 0 & 6 & 9 & \\ 4 & 6 & \boxed{9} = f'(1,5) & \end{array}$$

$x_3 = 1,366878307$

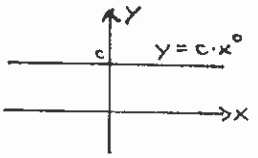
$x_4 = 1,3660266661$

$x_5 = 1,366025404$

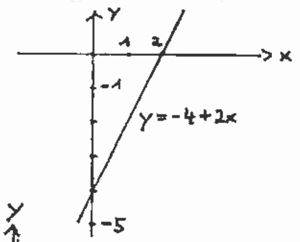
$x_6 = \underline{\underline{1,366025404}}$ steht ! $\quad \Rightarrow x_\infty^{(3)} + x_\infty^{(1)} = 1$

$$\overset{\text{s.o.}}{\Longrightarrow} x_\infty^{(3)} \overset{!}{=} 1 - x_\infty^{(1)} = \underline{\underline{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}}$$

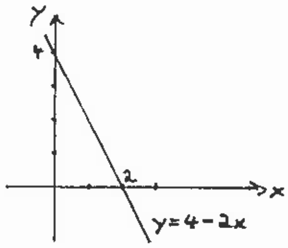
(L 45) a), b)



c)



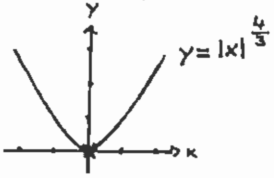
d)



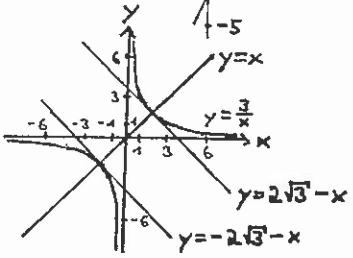
e) vgl. S. 35 („n = 3") !

f) Kehrbruchfunktion zu e) !

g)

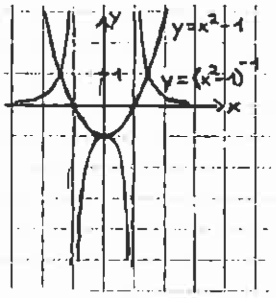


h)

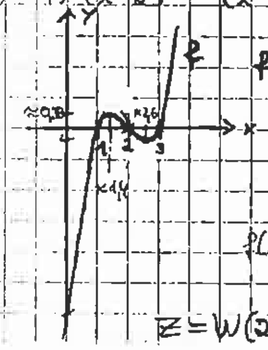


Frage: Wie sieht $y = -\frac{3}{x}$ aus ?

i), j)



k) $f(x) = x^3-6x^2+11x-6 = (x-1)(x^2-5x+6)$
$= (x-1)\cdot(x-2)(x-3)$
$= (x-2+1)(x-2)(x-2-1)$
$= ((x-2)^2-1)\cdot(x-2) = (x-2)^3-(x-2)$



$f'(x)=3((x-2)^2-\frac{1}{3})$

$x_H = 2-\frac{1}{\sqrt{3}}$

$x_T = 2+\frac{1}{\sqrt{3}}$

$f(x_H) = \frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$
$\approx 0,4$

$Z \mathrel{\hat{=}} W(2|0)$

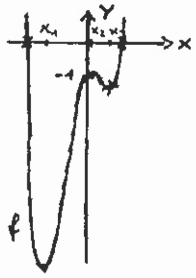
l)* $f(x) = 3x^4+2x^3-5x^2+x-1$; $a=1$
$\quad 0 \quad 3 \quad 5 \quad 0 \quad 1$
$3 \quad 5 \quad 0 \quad 1 \quad \boxed{0} = f(1)$

$\Rightarrow f(x) = (x-1)\cdot g(x)$ mit $g(x) = 3x^3+5x^2+1$
(vgl. S. 38 !)

$N_0(f) = \{-1{,}77\ldots ; 1\}$ und
$f'(x) = 12x^3+6x^2-10x+1$! NTV liefert 3 Lösungen von $f'(x)=0$
(Extremstellen lokaler Art!)

$N_0(f') = \{-1{,}231578908 ; 0{,}108616156 ; 0{,}622962751\}$

Probe mit $f''(x) = 36x^2+12x-10$ liefert lokal
$T_1(-1{,}23\ldots|\approx-6{,}65)$, $H(\approx 0{,}11|\approx-0{,}95)$, $T_2(0{,}62\ldots|-1{,}38\ldots)$



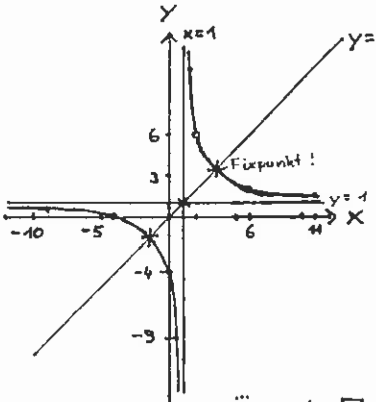
(Anm.: NTV zur Bestimmung von $N_0(f')$ benötigt

$$k(x) = \frac{x\cdot f''(x)-f'(x)}{f''(x)} = \frac{6x^2\cdot(4x+1)-1}{12x\cdot(3x+1)-10}$$

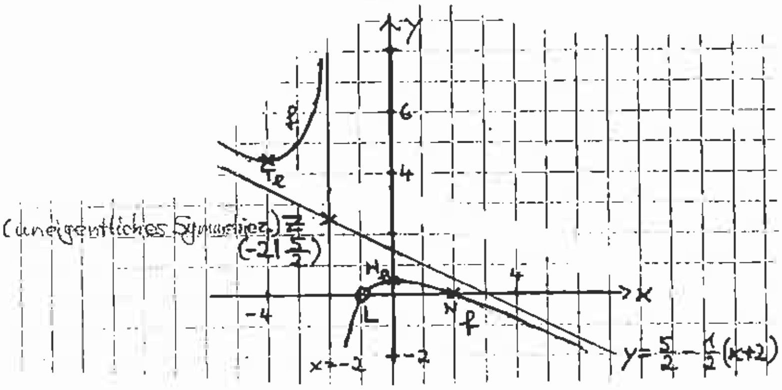
Starte mit $x_1 = -1{,}2 \overset{\cdots}{\Longrightarrow} x_\infty = -1{,}231578908$
HS mit $a = x_\infty$ liefert $f'(x) = (x-x_\infty)\cdot h(x)$, h ist quadratisch
$\xrightarrow[\text{„Mitternacht“}]{}$ weitere f'-Nullstellen , s.o.!)

m) $f(x) = 1+\frac{5}{x-1}$ mit $L(2|6)$

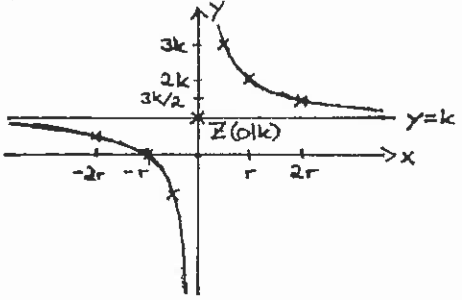
n) $f(x) = \frac{3}{2}-\frac{1}{2}x-\frac{2}{x+2}$ mit $L(-1|0)$ und $N(2|0)$, $T_e(-4|\frac{9}{2})$ und $H_e(0|\frac{1}{2})$



Fixpunkte via $f(x)=x \overset{\cdots}{\Leftrightarrow} x = 1\mp\sqrt{5}$
und $f'(1\mp\sqrt{5}) = -1$. $F(1\mp\sqrt{5}|1\mp\sqrt{5})$!
1. Winkelhalbierende $y=x$
ist „Symmetriegerade“
$Z(1|1)$ „Symmetriepunkt“
(Warum „…“ ?)

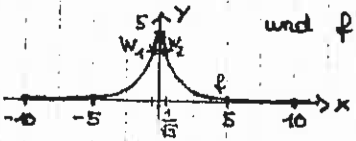


o) $f(x) = k+k\cdot\frac{r}{x}$ mit den Asymptoten $x=0$ und $y=k$

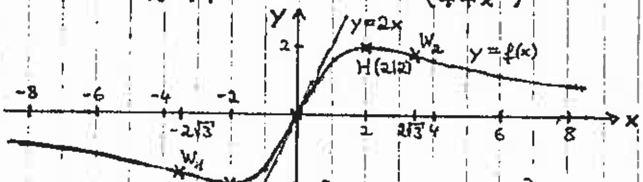


p) $f(x) = \frac{5}{x^2+1}$ mit $f'(x) = -\frac{10x}{(x^2+1)^2}$

und $f''(x) = 10 \cdot \frac{3x^2-1}{(x^2+1)^3}$



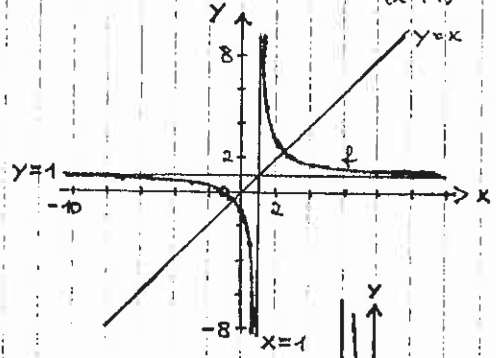
q) $f(x) = \frac{8x}{x^2+4} \Rightarrow f'(x) = 8 \cdot \frac{4-x^2}{(4+x^2)^2}$



$f''(x) = 16x \cdot \frac{x^2-12}{(x^2+4)^3}$

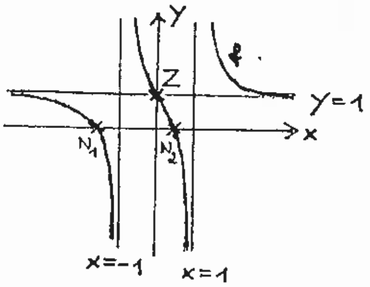
r) $f(x) = \frac{(x+1)^2}{(x+1)\cdot(x-1)} = \frac{x+1}{x-1} = \frac{2+x-1}{x-1} = \frac{2}{x-1} + 1$

$f'(x) = -\frac{2}{(x-1)^2}$



s) $f(x) = 1 + \frac{2x}{x^2-1} = 1 + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$

mit $Z(0|1)$, $N_1(-1-\sqrt{2}|0)$, $N_2(-1+\sqrt{2}|0)$



t) $f(x) = x - 6 + \frac{16}{x+2}$

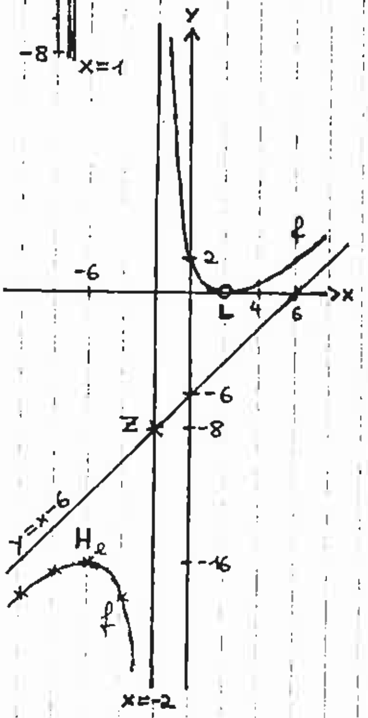
$\Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{16}{(x+2)^2}$

mit $Z(-2|-8)$, $L(2|0)$

und $H_e(-6|-16)$, f ohne Nullstellen

und wegen $f''(x) = \frac{32}{(x+2)^3}$

auch ohne Wendepunkte !

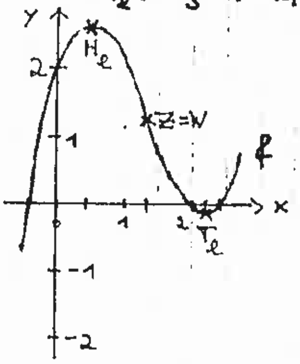


L46 a) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 2 = (x-(1-\sqrt{2}))\cdot(x-2)\cdot(x-1-\sqrt{2})$

$f'(x) = 3x^2 - 8x + 3 = 3\cdot[(x-\frac{4}{3})^2 - \frac{7}{9}]$

$= 3\cdot(x - \underbrace{\frac{4-\sqrt{7}}{3}}_{\approx 0,45})(x - \underbrace{\frac{4+\sqrt{7}}{3}}_{\approx 2,21525})$

$\Rightarrow H_e(\frac{4-\sqrt{7}}{3}|\approx 2,63)$ und $T_e(\frac{4+\sqrt{7}}{3}|\approx -0,11)$

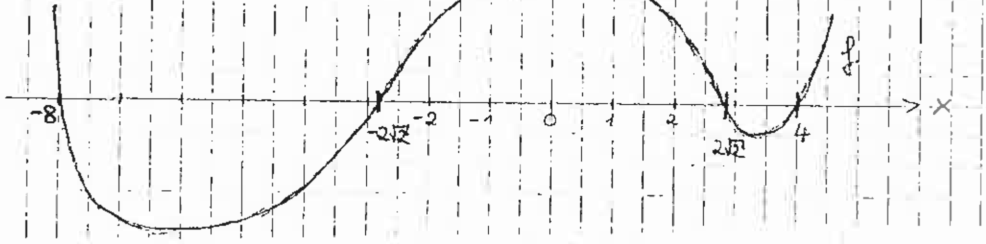


$f''(x) = 6x - 8 = 6\cdot(x - \frac{4}{3})$

$\Rightarrow W(\frac{4}{3}|\frac{34}{27})$, $f'(1-\sqrt{2}) = ?$

1	-4	3	2
0	$1-\sqrt{2}$	$-1+2\sqrt{2}$	-2
1	$-3-\sqrt{2}$	$2\cdot(1+\sqrt{2})$	$0 = f(1-\sqrt{2})$
0	$1-\sqrt{2}$	2	
1	$-2\cdot(1+\sqrt{2})$	$\underline{\underline{2\cdot(2+\sqrt{2})}} = f'(1-\sqrt{2})$	

b) $f(x) = (x+8)(x+2\sqrt{2})(x-2\sqrt{2})(x-4)$ und $f'(-8) = -672$



c) NIV - Ansatz : (... nach Einsetzen von $P_3(1|0)$, $P_2(0|2)$ ...)

$f(x) = (x-1)(-2 + c_1 x + c_2 x(x-2) + c_3 x(x^2-4) + c_4 x(x^2-4)(x-4) + c_5 x(x^2-4)(x-4)(x+5))$

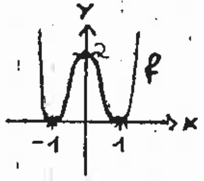
$P_4(2|54)$: $1 \cdot (-2 + 2c_1) = 54 \Leftrightarrow c_1 = 28$

$P_1(-2|54)$: $-3 \cdot (-2 - 2 \cdot 28 + 8c_2) = 54 \Leftrightarrow c_2 = 5$

$P_5(4|4050)$: $3 \cdot (-2 + 4 \cdot 28 + 8 \cdot 5 + 48c_3) = 4050 \Leftrightarrow c_3 = 25$

$P_0(-5|15552)$: $-6 \cdot (-2 - 5 \cdot 28 + 35 \cdot 5 - 105 \cdot 25 + 945c_4) = 15552 \Leftrightarrow c_4 = 0$

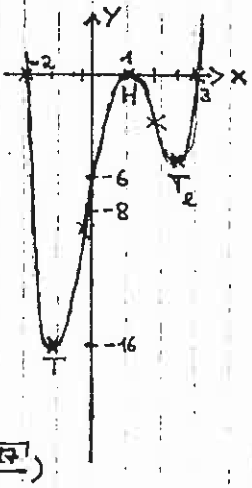
$P_6(8|261954)$: $7 \cdot (-2 + 8 \cdot 28 + 48 \cdot 5 + 480 \cdot 25 + 24960c_5) = 261954 \Leftrightarrow c_5 = 1$



$$\begin{aligned}
\Rightarrow f(x) &= (x-1) \cdot (-2 + 28x + 5x(x-2) + 25x(x^2-4) + x(x^2-4)(x-4)(x+5)) \\
&= (x-1) \cdot (-2 - 2x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5) = (x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2-2x-2) \\
&= (x-1) \cdot (x-1) \cdot (x^4+2x^3+3x^2+4x+2) \\
&= (x-1)^2 (x+1) \cdot (x^3+x^2+2x+2) = (x-1)^2 \cdot (x+1) \cdot (x+1) \cdot (x^2+2) \\
&= (x-1)^2 \cdot (x+1)^2 \cdot (x^2+2) = (x^2-1)^2 (x^2+2) = (x^4-2x^2+1) \cdot (x^2+2) \\
&= x^6 - 3x^2 + 2
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ f symmetrisch zur y-Achse ($f(-x) = f(x)$!) mit globalen Tiefpunkten $T_1(-1|0)$, $T_2(1|0)$ und einem nur lokalen Hochpunkt $H_e(0|2)$. $f'(-1) = \underline{\underline{0}}$!

L47 a) $f(x) = (x+2)(x-1)^2(x-3) = x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6$



$N_0(f) = \underline{\underline{\{-2; 1; 3\}}}$

$f'(x) = 4 \cdot (x - \underbrace{\frac{5-\sqrt{217}}{8}}_{\approx -1,22})(x-1)(x - \underbrace{\frac{5+\sqrt{217}}{8}}_{\approx 2,47})$

$\Rightarrow T_1 (\frac{5-\sqrt{217}}{8} | \approx -16,23)$, $T_2(\frac{5+\sqrt{217}}{8} | \approx -5,12)$

und $H_e(1|0)$

$$\begin{aligned}
f''(x) &= 12x^2 - 18x - 6 = 12 \cdot (x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}) \\
&= 12 \cdot ((x - \frac{3}{4})^2 - \frac{17}{16}) = 12 \cdot (x - \underbrace{\frac{3-\sqrt{17}}{4}}_{\approx -0,28})(x - \underbrace{\frac{3+\sqrt{17}}{4}}_{\approx 1,78})
\end{aligned}$$

b) $q(x) = 1,0725 - 0,3815x + 0,045x^2$
... ist im Intervall $[2,5; 3,2] \subseteq D_q \cap D_f$ kaum von f zu unterscheiden (Zeichnen Sie!)

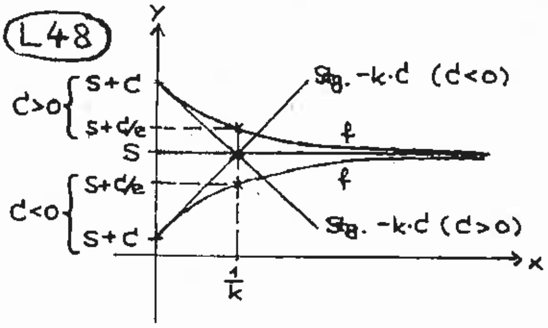
$\frac{q(2,9)}{f(2,9)} - 1 = -0,00066 = -0,66$ ‰

c) $g(x) = -\frac{4}{375} \cdot (x^3 + \frac{23}{4}x^2 - \frac{221}{2}x + \frac{625}{16})$ mit

$\frac{g(1,1)}{f(1,1)} - 1 = \frac{296,796}{375 \cdot \ln(2,21)} - 1 \approx -0,19$ %

$\frac{g(1,62)}{f(1,62)} - 1 = \frac{482,422688}{375 \cdot \ln(3,6244)} - 1 \approx -0,095\% = -0,95$ ‰

L48



$f'(0) = -k\cdot c = \frac{-c}{1/k}$ (vgl. Steigungsdreieck!)

$f(x) = S + c\cdot\exp(-kx)$

$\Rightarrow f'(x) = -k\cdot c\cdot\exp(-kx)$

im Vergleich : $f'(x) = -k\cdot(f(x)-S)$
$= k\cdot(S-f(x))$, also

mit der Differentialgleichung : $\boxed{f'(x) = k\cdot(S-f(x))}$

! beschränkte Änderung !

L49 $\underline{a)}$ Maschenregel für $t \geq 0\,ms$: $U - R\cdot I - \frac{Q}{C} = 0\,V$

$\Leftrightarrow R\cdot I + \frac{Q}{C} = U > 0\,V$ (konstant)

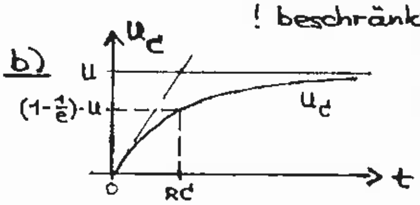
mit $U_C = \frac{Q}{C}$ und $I = \frac{dQ}{dt} = C\cdot\frac{dU_C}{dt} = C\cdot\dot{U}_C$

$\Leftrightarrow RC\cdot\dot{U}_C + U_C = U \Leftrightarrow \boxed{\dot{U}_C = \frac{1}{R\cdot C}\cdot(U-U_C)}$

genauer : $\underline{\underline{\dot{U}_C(t) = \frac{1}{R\cdot C}\cdot(U-U_C(t))}}$ für $t \geq 0\,ms$

! beschränkte Änderung !

$\underline{b)}$



$\underline{c)}$ $f = U - U_C \Rightarrow \dot{f}(t) = -\dot{U}_C(t)$
$= -\frac{1}{RC}\cdot f(t)$

$\Rightarrow f(t) = f(0)\cdot\exp(-\frac{t}{RC})$

$\Leftrightarrow \boxed{U_C(t) = U\cdot(1-\exp(-\frac{t}{R\cdot C}))}$

$\underline{d)}$ Hier ist $\underline{R\cdot C = 1\,ms}$ und $\underline{U = 2V}$ (vgl. Skizze in b)!)

$U_C \geq 99\%\cdot U \Leftrightarrow \exp(\frac{t}{RC}) \geq 100 \Leftrightarrow t \geq RC\cdot\ln(100)$

hier : $t \geq 4{,}60517\ldots\ ms \Rightarrow$ Antwort : nach $\underline{\underline{5\,ms}}$!

L50 $\underline{a)}$ $f(x) = \underline{\underline{0{,}1}}\cdot\exp(\frac{b}{x})$ mit $0{,}1\cdot\exp(\frac{b\cdot\ln(10)}{2500}) = 1 \Leftrightarrow \underline{\underline{b = 2500}}$

$\Rightarrow \underline{\underline{f(x) = \frac{1}{10}\cdot\exp(\frac{2500}{x})}}$

$\underline{b)}$ $f(x) = \underline{\underline{8}}\,e^{-bx}+2$ mit $8e^{-5b}+2 = 3 \Leftrightarrow e^{5b} = 8 \Leftrightarrow \underline{\underline{b = \frac{\ln(8)}{5}}}$

$\Rightarrow f(x) = (\frac{1}{8})^{\frac{x}{5}-1}+2$

$\underline{c)}$ $a\cdot\exp(-2b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\exp(-1)$ und $-2ab\sqrt{2}\cdot\exp(-2b) = -\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\cdot\exp(-1)$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{a = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}}} \wedge \underline{\underline{b = \frac{1}{2}}}$, also $\underline{\underline{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\exp(-\frac{x^2}{2})}}$

$\underline{d)}$ $\frac{ac}{a+(c-a)} = \frac{3}{5}$ und $\frac{ac}{a+(c-a)\cdot e^{-6b}} = 3 \Leftrightarrow \underline{\underline{a = \frac{3}{5}}} \wedge \underline{\underline{b = \frac{\ln(9)}{6}}} \wedge \underline{\underline{c = 6}}$

$\wedge\ c = 6\ (x \to \infty)$

$\Rightarrow \underline{\underline{f(x) = \frac{6}{1+(\frac{1}{9})^{\frac{x}{6}-1}}}}$

L $\boxed{1.}$ a) $x = \frac{lg(5)}{lg(3)} \approx 1,46497$ b) $x = \frac{lg(15)}{lg(2)} - 1 \approx 2,90689$

c) $x = 0$ d) $x \leq lg(3,2) \approx 0,50514\ (9978)$ e) $x = 8$ f) $x < 0$

g) $x = -\frac{1}{2} = -0,50000$ h) $x = 4$ i) $-\frac{lg(6)}{2lg(5) - lg(3)} \approx -0,84506$

j) $x = -\frac{1}{2} \mp \sqrt{\frac{1}{4} + lg(3)} \approx \begin{cases} -1,35271 \\ 0,35271 \end{cases}$ k) $x = 2$

L $\boxed{2.}$ a) $x = 3$ b) $x = \frac{3}{2} \vee x = 2$ c) $x = \frac{1}{3}$ d) $x = \frac{3}{2}$

L $\boxed{3.}$ a) $x = 2$ b) $x = \sqrt{10}^{\,lg(13) - 0,5} \approx 2,02755$ c) $x = 10^{lg(\frac{1}{4})} = \frac{1}{4}$

d) $2401 \cdot 10^{-18} = 2,401 \cdot 10^{-15}$ e) $x = 125^{\frac{1}{lg(4)}} \approx 3040,12991$

f) $x = 10^{9 - 4\,ln(6)} \approx 68,07100$

L $\boxed{4.}$ a) $f(x) = 1,06^x \cdot 120000$ b) 214901,72 €

c) $x \geq \frac{ln(25/3)}{ln(1,06)} \Rightarrow 36a + 4m + 19d + 12h + 32\,min + 24\,s$

real 37 Jahre

L $\boxed{5.}$ Vorbemerkung zu exponentieller Veränderung

in M 10 : $B(t+1) - B(t) = k \cdot B(t)$ ($k>0$: Wachstum, $k<0$: Zerfall)
in M 13 : $\dot{B}(t) = k \cdot B(t)$ (stetiges Modell, anderes k !)

Hier a) Beschränkt exponentielles Wachstum :
$T(t+1) - T(t) = k \cdot (S - T(t))$ mit $T(0) = 5$ und $S = 20$

b) Substitution : $B := S - T \overset{\dots}{\Longrightarrow} T(t) = 20 - (\frac{2}{3})^{t/10} \cdot 15$ c) $t \geq 49,69\ldots \Rightarrow$ 50min!

L Z5 a) $c_i = \frac{1}{i!} \cdot g^{(i)}(a)$ sind die Koeffizienten der Taylorentwicklung von g um $A(a|g(a))$!

b) Ansatz (nach Taylor) : $g(x) = 4 + 5 \cdot (x-3) + c_3 \cdot (x-3)^3$
mit $g(6) = -3 \Leftrightarrow c_3 = -\frac{22}{27}$
$\Rightarrow g(x) = 4 + 5 \cdot (x-3) - \frac{22}{27} \cdot (x-3)^3$

c) $g(x) = 2 + 2 \cdot (x - ln(2)) + (x - ln(2))^2 + \frac{1}{3} \cdot (x - ln(2))^3$
$\Rightarrow g(0,7) = 2,013752707$ (= TR-Wertanzeige für $e^{0,7}$)
$\frac{g(0,7)}{e^{0,7}} - 1 \approx -9,5 \cdot 10^{-11}$ ($ln(2) = 0,693147\ldots \approx 0,7$!)
$\approx -0,0000000095\,\%$ (CASIO fx-82 solar)

B.

BERUFSAKADEMIE
STUTTGART
University of Cooperative Education

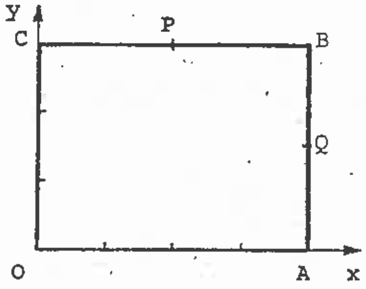
Ingenieurmathematik I für E-Techniker
Übungsaufgaben zur Vektorrechnung und Vektoralgebra

Dipl.-Math M.Baum
E-Mail: micbaum@de.ibm.com

B1 bis B60

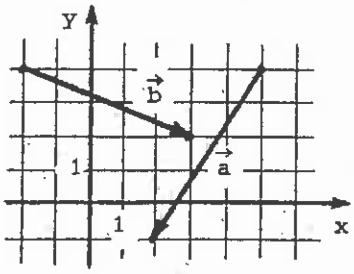
B. AUFGABEN

5.1. Aufgaben zur Vektoralgebra (Abschnitt 3)



B 1.) Im skizzierten Rechteck OABC mit A(4/0) und C(0/3) sei P der Mittelpunkt von BC und Q der Mittelpunkt von AB.

Wie lautet die Komponentendarstellung der Vektoren $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{QP}$?



B 2.) Ermitteln Sie die Koordinatendarstellung der skizzierten Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

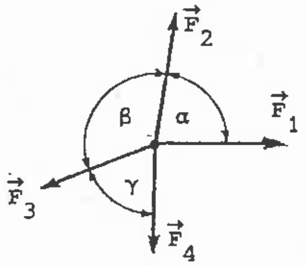
B 3.) Ein Vektor $\vec{r}$ mit $|\vec{r}| = 7$ und dem Anfangspunkt A(2 / 1 / -1) hat die Koordinaten $r_x = 2$ und $r_y = -3$. Bestimmen Sie die fehlende Koordinate r_z des Vektors und die Koordinaten seines Endpunkts.

„transponiert"

$(\vec{p}^T := \vec{p} = \overrightarrow{OP})$

B 4.) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = (2 \mid 3 \mid 0)^T$, $\vec{b} = (3 \mid 4 \mid 0)^T$, $\vec{c} = (3 \mid -1 \mid 0)^T$. Bestimmen Sie zeichnerisch und rechnerisch

a) $\vec{a} - \vec{c}$; b) $\vec{c} - \vec{a}$; c) $\vec{b} - \vec{a} - \vec{c}$.

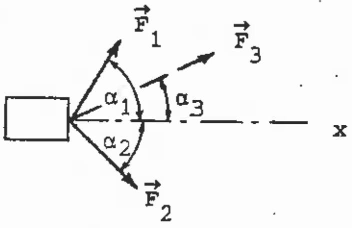


B 5.) An einem Verteilermast greifen vier Kräfte an, die in einer Ebene liegen. Ermitteln Sie zeichnerisch und rechnerisch Betrag und Richtung der Resultierenden $\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$.

Gegeben: $|\vec{F}_1| = 380\,N$, $|\vec{F}_2| = 400\,N$, $|\vec{F}_3| = 300\,N$, $|\vec{F}_4| = 440\,N$

$\alpha = 80^\circ$, $\beta = 120^\circ$, $\gamma = 70^\circ$.

B 6.) Ein Wagen wird an drei Seilen gezogen. Wie groß müssen $|\vec{F}_3|$ und α_3 sein, damit am Wagen eine Kraft von 1 000 N in x-Richtung wirkt ?



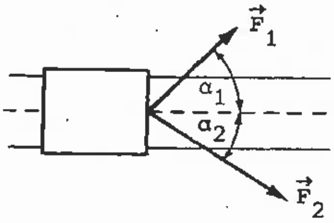
Gegeben: $|\vec{F}_1| = 700$ N , $|\vec{F}_2| = 600$ N , $\alpha_1 = 60^\circ$, $\alpha_2 = (-)\ 45^\circ$.

Lösung zeichnerisch und rechnerisch !

B 7.) Ein Schienenfahrzeug wird gemäß Skizze gezogen mit

$|\vec{F}_1| = 200$ N , $|\vec{F}_2| = 400$ N ,

$\alpha_1 = 45^\circ$, $\alpha_2 = (-)\ 30^\circ$



Ermitteln Sie die resultierende Kraft $\vec{F}_R$ und ihre Richtung gegen die Schienen

a) zeichnerisch

b) durch trigonometrische Berechnung

c) durch Rechnung in einem geeigneten Koordinatensystem.

B 8.) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = (-2 \mid 3 \mid 1)^T$, $\vec{b} = (2 \mid -3 \mid -1)^T$.

a) Berechnen Sie den Vektor $\vec{c}$ so, daß gilt: $2\vec{a} - 3\vec{c} = 4\vec{b}$.

b) Bestimmen Sie die Einsvektoren in Richtung von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

B 9.) Zum Vektor $\vec{a}$ soll ein Vielfaches des Vektors $\vec{b}$ addiert werden, so daß die Summe von $\vec{a}$ und $\lambda\vec{b}$ auf $\vec{c}$ senkrecht steht. Wie muß man λ wählen ?

Geben Sie zunächst die allgemeine Lösung an und berechnen Sie λ anschließend für die speziellen Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

B 10.) Gegeben ist der Vektor $\vec{a} = (1 \mid 2 \mid 0)^T$. Bestimmen Sie alle Vektoren $\vec{v}$, für die gilt

$$\vec{a} \bullet \vec{v} = 0 .$$

B 11.) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = (2 | 1)^T$ und $\vec{b} = (1 | 2)^T$.

a) Bestimmen Sie die Vektoren $\vec{a} + \vec{b}$ und $\vec{a} - \vec{b}$, sowie die zugehörigen Einsvektoren.

b) Wie groß sind die Winkel $\varphi_1 = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{i})$; $\varphi_2 = \sphericalangle(\vec{b}; \vec{j})$ und $\varphi_3 = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$?

c) Bestimmen Sie den Vektor $\vec{c}$ mit: $|\vec{c}| = 3$, $c_y > 0$, $\vec{c} \perp \vec{a}$.

Hint: $\vec{i} = \vec{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = (1|0|0)^T$, $\vec{j} = \vec{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{k} = \vec{e}_3$!

B 12.) Im Punkt A greifen drei Kräfte an:

$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix}4\\3\\5\end{pmatrix} N; \quad \vec{F}_2 = \begin{pmatrix}-2\\-2\\-1\end{pmatrix} N; \quad \vec{F}_3 = \begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} N.$$

a) Berechnen Sie die Koordinatendarstellung der resultierenden Kraft $\vec{F}_R$, sowie deren Betrag.

b) Wie groß sind die Winkel $\varphi_i = \sphericalangle(\vec{F}_R, \vec{F}_i)$, $i = 1,2,3$?

B 13.) Der Ortsvektor des Punktes P bildet mit der x-Achse einen Winkel von 45° und mit der y-Achse einen Winkel von 60°; sein Betrag ist 6; P liegt im Halbraum $z < 0$. Bestimmen Sie die Koordinaten von P.

B 14.) Gegeben sind die Vektoren

$\vec{a} = (2|-3|-1)^T$, $\vec{b} = (-3|5|-2)^T$, $\vec{c} = (1|2|0)^T$, $\vec{d} = (2|-1|0)^T$.

Berechnen Sie die (Parallel-) Komponenten

$\vec{a}_b$, $\vec{b}_a$, $\vec{c}_d$, $\vec{d}_c$.

„Bez $\vec{b}$“

B 15.) Gegeben sind drei aufeinanderfolgende Eckpunkte des Parallelogramms ABCD mit A(-3/2/0), B(3/-3/1), C(5/0/2).

Gesucht wird:

a) der vierte Eckpunkt D,

b) Länge und Richtung der beiden Diagonalen AC und BD,

c) der Winkel zwischen AC und BD.

B 16.) Ein Spat (Parallelflach) wird aufgespannt von den drei Vektoren $\vec a$, $\vec b$, $\vec c$ mit gemeinsamem Anfangspunkt O und mit
$|\vec a| = 3$, $|\vec b| = 5$, $|\vec c| = 2$; $\sphericalangle(\vec a,\vec b) = 120^\circ$, $\sphericalangle(\vec b,\vec c) = 60^\circ$, $\sphericalangle(\vec c,\vec a) = 120^\circ$.

Bestimmen Sie folgende Größen:

a) die Längen der Flächendiagonalen im Parallelogramm $(\vec a,\vec b)$;
b) die Länge der von O ausgehenden Raumdiagonalen $\vec d$;
c) die Winkel zwischen $\vec d$ und den Kantenvektoren $\vec a$, $\vec b$, $\vec c$;
d) die Projektionen d_a, d_b, d_c von $\vec d$ auf $\vec a$, $\vec b$, $\vec c$.

B 17.) a) Welchen Winkel φ bilden die (sich in einer Ecke schneidenden) Flächendiagonalen zweier aneinander grenzender Würfelflächen?

b) Unter welchem Winkel ψ schneiden sich die Raumdiagonalen eines Würfels?

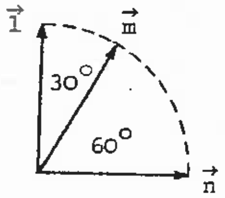
B 18.) Bestimmen Sie alle Vektoren $\vec x$ in der x,y-Ebene, welche die Gleichung erfüllen

$$\vec a \cdot \vec x = b \quad \text{mit} \quad \vec a = (1 | 2 | 0)^T \text{ und } b = 5 . \; = |\vec b|$$

Veranschaulichen Sie das Ergebnis in einer Skizze; wählen Sie dazu den Koordinatenursprung als Anfangspunkt der Vektoren. Verallgemeinerung?

B 19.) Drei Einsvektoren $\vec l$, $\vec m$, $\vec n$ liegen in einer Ebene mit

$\sphericalangle(\vec l,\vec m) = 30^\circ$, $\sphericalangle(\vec m,\vec n) = 60^\circ$.



Zeichnen Sie den Vektor $\vec a = \vec l + 2\vec m - 3\vec n$ und berechnen Sie den Winkel zwischen $\vec a$ und $\vec l$.

B 20.) Berechnen Sie folgende Ausdrücke: $(\vec i = \vec e_1, \vec j = \vec e_2, \vec k = \vec e_3)$

a) $\vec i \times (\vec j + \vec k) - \vec j \times (\vec i + \vec k) + (\vec i + \vec j - \vec k) \times \vec k$

b) $\vec i \times [\vec j \times (\vec k \times \vec i) + (\vec j \times \vec k) \times \vec i + (\vec j \times \vec i) \times (\vec j \times \vec k)]$

B 21.) Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke:

a) $(2\vec{a}+\vec{b}) \times (\vec{a}+2\vec{b})$

b) $(\vec{a}+\vec{b}) \cdot [(\vec{a}+\vec{c}) \times \vec{b}]$

c) $(\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}) \cdot [(\vec{a}-\vec{b}) \times (\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})]$

B 22.) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit

$$|\vec{a}| = 2, \quad |\vec{b}| = 5, \quad \sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = 45^\circ$$

a) Welchen Winkel schließen die Vektoren $\vec{u}=\vec{a}-2\vec{b}$ und $\vec{v}=3\vec{a}+2\vec{b}$ ein ?

b) Wie groß ist der Flächeninhalt des von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aufgespannten Dreiecks ?

B 23.) $\vec{m}$ und $\vec{n}$ sind Einsvektoren mit $\sphericalangle(\vec{m},\vec{n}) = 30^\circ$.

a) Bestimmen Sie die Länge der Diagonalen des Parallelogramms, das von den Vektoren $\vec{a}=2\vec{m}+\vec{n}$ und $\vec{b}=\vec{m}-2\vec{n}$ aufgespannt wird.

b) Welchen Winkel bilden die Diagonalen miteinander ?

c) Wie groß ist der Flächeninhalt dieses Parallelogramms ?

B 24.) Welchen Wert hat der folgende Ausdruck: $(\vec{a}\cdot\vec{b})^2 + (\vec{a}\times\vec{b})^2 = ?$

B 25.) Was folgt für die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aus folgenden Aussagen ?

a) $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}$ <u>und</u> $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

b) $|\vec{a}\times\vec{b}| = \vec{a}\cdot\vec{b} \qquad (\vec{a}\neq\vec{0},\ \vec{b}\neq\vec{0})$

c) $(\vec{a}\cdot\vec{b})^2 = \vec{a}^2\,\vec{b}^2 \qquad (\vec{a}\neq\vec{0},\ \vec{b}\neq\vec{0})$

B 26.) Bringen Sie folgende Ausdrücke auf die einfachste Form:

a) $(3\vec{a}+5\vec{b}-2\vec{c}) \cdot (\vec{a}-2\vec{b}-4\vec{c})$

b) $(3\vec{a}+5\vec{b}-2\vec{c}) \times (\vec{a}-2\vec{b}-4\vec{c})$

B 27.) Zerlegen Sie den Vektor $\vec{a}$ in Komponenten parallel und normal zu $\vec{b}$:

a) $\vec{a} = (-2 \mid -1 \mid 2)^T$, $\vec{b} = (-5 \mid 3 \mid 4)^T$

b) $\vec{a} = (7 \mid -2 \mid 2)^T$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$ mit A(1/0/1), B(2/1/-1)

B 28.) Welchen Flächeninhalt hat das Parallelogramm, dessen Diagonalen durch die Vektoren $\vec{d}_1 = (3 \mid 1 \mid -2)^T$ und $\vec{d}_2 = (1 \mid -3 \mid 4)^T$ gegeben sind?

B 29.) Bestimmen Sie die Normalen-Einsvektoren der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebenen:

a) $\vec{a} = (3 \mid 2 \mid 5)^T$, $\vec{b} = (0 \mid 3 \mid -1)^T$

b) $\vec{a} = (2 \mid -1 \mid 0)^T$, $\vec{b} = (1 \mid 4 \mid -3)^T$

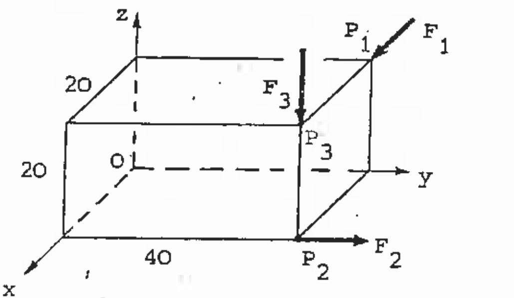
B 30.) Gegeben sind die Punkte A(1/-1/2), B(2/1/3), C(4/0/1). Unter der Wirkung der konstanten Kraft $\vec{F} = (1 \mid 1 \mid 1)^T$N bewegt sich ein Massenpunkt m von A nach B. Wie groß ist die dabei verrichtete Arbeit [Krafteinheit 1 N, Längeneinheit 1 m],

a) falls sich m auf kürzestem Weg von A nach B bewegt?

b) falls sich m von A nach B längs der Strecken AC und CB bewegt?

B 31.) An einem Quader wirken drei zu den Koordinatenachsen parallele Kräfte.

a) Bestimmen Sie die Koordinatendarstellung der resultierenden Kraft $\vec{F}_R$ und des resultierenden Moments $\vec{M}_O$ bezogen auf den Ursprung.



Maße in cm

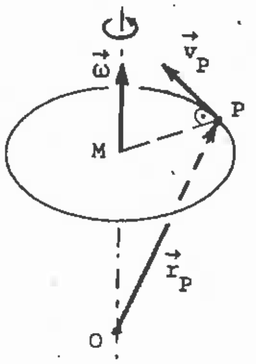
$|\vec{F}_1| = 100\,\text{N}$, $|\vec{F}_2| = 150\,\text{N}$, $|\vec{F}_3| = 120\,\text{N}$

b) Wie groß sind Betrag und Richtungswinkel von $\vec{F}_R$?

$$\varphi_i = \arccos\left(\frac{\vec{e}_i \cdot \vec{F}_R}{|\vec{F}_R|}\right)$$

(Winkel mit den Achsen!)

B 32.) Ein starrer Körper dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω um eine durch O gehende Drehachse; P sei ein Punkt mit Ortsvektor $\vec{r}_P$. Führt man den Winkelgeschwindigkeits-Vektor $\vec{\omega}$ in Richtung der Drehachse (Rechtsschraube) ein, so erhält man die Momentangeschwindigkeit des Punktes P (Tangentialgeschwindigkeit) in der Form



$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{r}_P$$

a) Gegeben sind die Vektoren $\vec{\omega} = (0 \mid 0 \mid 1)^T [\frac{1}{sec}]$ und $\vec{r}_P = (3 \mid 4 \mid 2)^T [m]$. Wie groß ist $\vec{v}_P$? Welche Richtung hat $\vec{v}_P$?

b) Bei Drehung um die z-Achse mit $\omega_z > 0$ hat der Punkt Q $(1 / 2 / 1)$ [m] die Tangentialgeschwindigkeit $\vec{v}_Q$ mit $|\vec{v}_Q| = v = 5 \frac{m}{sec}$. Ermitteln Sie ω_z und die Koordinatendarstellung von $\vec{v}_Q$.

B 33.) Gegeben ist das Dreieck ΔABC mit A(1/0/1), B(-1/1/0) und C(1/1/1).

a) Berechnen Sie Seitenlängen und Winkel des Dreiecks.

b) Wie groß ist die Dreiecksfläche ?

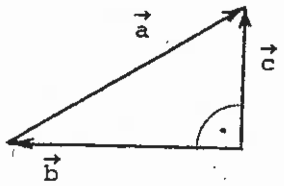
B 34.) Gegeben: A(-1/0/2), B(1/1/-3), C(0/3/2), D(2/-1/4). Berechnen Sie das Volumen des Tetraeders ABCD, sowie die Flächeninhalte der Dreiecke, die das Tetraeder begrenzen.

B 35.) Ein Tetraeder wird von den Vektoren $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ aufgespannt, wobei die drei Vektoren in Richtung der Winkelhalbierenden zwischen den (positiven) Koordinatenachsen zeigen und die Länge 2 haben. Wie groß ist das Volumen des Tetraeders ?

B 36.) Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}-1\\-10\\3\end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix}p\\4\\-2\end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix}q\\r\\s\end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie p , q , r , s so, daß sich das skizzierte Vektordreieck bilden läßt.



B 37.) Spannen die folgenden Vektoren den $\mathbb{R}^3$ auf ?

a) $\vec{a}_1 = (2 \mid 1 \mid 3)^T, \quad \vec{a}_2 = (1 \mid 0 \mid -2)^T, \quad \vec{a}_3 = (3 \mid 1 \mid 1)^T;$

b) $\vec{b}_1 = (1 \mid 2 \mid 0)^T, \quad \vec{b}_2 = (1 \mid 2 \mid -2)^T, \quad \vec{b}_3 = (0 \mid 1 \mid 2)^T.$

B 38.) Untersuchen Sie die folgenden Vektoren jeweils auf lineare Abhängigkeit. Ermitteln Sie gegebenenfalls eine lineare Beziehung zwischen den Vektoren.

a) $\vec{a}_1 = (2 \mid -1 \mid 3)^T, \quad \vec{a}_2 = (1 \mid 2 \mid 3)^T$

b) $\vec{b}_1 = (2 \mid -4 \mid -6)^T, \quad \vec{b}_2 = (-3 \mid 6 \mid 9)^T$

c) $\vec{c}_1 = (1 \mid -2 \mid -3)^T, \quad \vec{c}_2 = (-1 \mid 1 \mid 2)^T, \quad \vec{c}_3 = (-1 \mid -1 \mid 0)^T$

d) $\vec{d}_1 = (2 \mid -1 \mid -3)^T, \quad \vec{d}_2 = (1 \mid 2 \mid 3)^T, \quad \vec{d}_3 = (1 \mid 0 \mid -1)^T$

B 39.) Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{a} = (-1 \mid 3 \mid 2)^T, \quad \vec{b} = (2 \mid -3 \mid -4)^T, \quad \vec{c} = (-3 \mid 12 \mid 6)^T$$

a) Zeigen Sie, daß die Vektoren komplanar sind.

b) Zerlegen Sie $\vec{c}$ in Komponenten nach $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

B 40.) Gegeben sind die Vektoren $\vec{u} = (-1 \mid 1 \mid 3)^T$, $\vec{v} = (2 \mid -1 \mid -1)^T$.

a) Wie muß man k wählen, damit der Vektor $\vec{w} = (4 \mid -1 \mid k)^T$ in Komponenten nach $\vec{u}$ und $\vec{v}$ zerlegt werden kann ?

b) Wie lautet die Komponentenzerlegung ?

B 41.) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ seien beliebige Vektoren. Zeigen Sie, daß folgende Vektoren linear abhängig sind:

$$\vec{v}_1 = \vec{b} + \vec{c} - 2\vec{a} \,, \quad \vec{v}_2 = \vec{c} + \vec{a} - 2\vec{b} \,, \quad \vec{v}_3 = \vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c} \,.$$

B 42.) Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -11 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a) Untersuchen Sie $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ auf lineare Abhängigkeit.

b) Stellen Sie $\vec{d}$ dar als Linearkombination von $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

B 43.) Gegeben sind die Vektoren

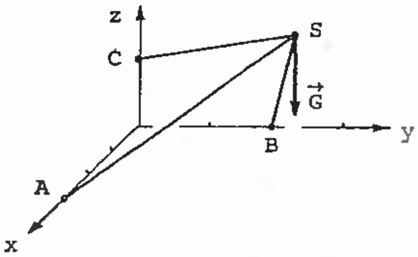
$$\vec{a} = (1 \mid 1 \mid 2)^T, \quad \vec{b} = (0 \mid 1 \mid -1)^T, \quad \vec{c} = (1 \mid 0 \mid 1)^T$$

a) Zeigen Sie, daß $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ linear unabhängig sind.

b) Zerlegen Sie $\vec{v} = (1 \mid 0 \mid -1)^T$ in Komponenten nach $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$.

B 44.) Am skizzierten Gerüst aus drei gelenkig gelagerten Stäben hängt eine Last vom Gewicht $G = 19$ kN .

Ermitteln Sie die Stabkräfte, d.h. zerlegen Sie den Vektor $\vec{G} = (0 \mid 0 \mid -G)^T$ in die Richtungen $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$. Welche Stäbe sind Druckstäbe (Zugstäbe) ?



A(3/0/0) , B(0/2/0) ,
C(0/0/1) , S(2/3/2)

B 45.) Gegeben sind die Punkte

A(1/2/4) , B(2/-1/3) , C(6/3/-5) , D(-7/4/-1)

a) Liegen die Punkte A , B , C auf einer Geraden ?

b) Liegen die Punkte A , B , C , D in einer Ebene ?

BERUFSAKADEMIE
STUTTGART
University of Cooperative Education

Ingenieurmathematik I für E-Techniker
Übungsaufgaben zur Analytischen Geometrie

Dipl.-Math M.Baum
E-Mail: micbaum@de.ibm.com

5.2. Aufgaben zur Analytischen Geometrie (Abschnitt 4)

B 46.) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = (3 ; 4)^T$, $\vec{b} = (1 ; -2)^T$. Bestimmen Sie in einem kartesischen $0xy$ - Koordinatensystem den Schnittpunkt P der Geraden $g_1 : \vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{b}$ mit der x-Achse und geben Sie eine Gleichung an für die Gerade g_2, die durch P geht und auf g_1 senkrecht steht.

B 47.) Die Gerade g geht durch P (1 /-3/ 2) und ist parallel zu einem Vektor $\vec{a}$, dessen Richtung durch die Richtungscosinus $\cos\alpha = \cos\beta = \frac{1}{3}\sqrt{3}$, $\cos\gamma > 0$ bestimmt ist. In welchen Punkten durchstößt g die Koordinatenebenen ?

B 48.) Gegeben sind die Punkte

$P_1(-1 / 3 / 7)$, $P_2(-5 / 4 / 3)$, $P_3(6 / -5 / -4)$.

a) Geben Sie für die Geraden P_1P_2, P_2P_3, P_3P_1 jeweils eine Gleichung in Parameterform an.

b) Welche Winkel besitzt das Dreick $\Delta P_1P_2P_3$?

B 49.) Zeigen Sie, daß sich die Geraden g und h schneiden; welche Koordinaten hat der Schnittpunkt ? Wie groß ist der Winkel zwischen g und h ?

a) g_1: Ursprungsgerade durch P (2 / -2 / 2)
h_1: $\{ x = 2z - 1 , \quad y = -2z + 1 \}$

b) g_2: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = z$
h_2: $\{ x = z + 1 , \quad y = 4 - z \}$

B 50.) Gegeben sind die Punkte $P_1(-1 / 5 / 4)$, $P_2(4 / 3 / 2)$.

a) Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden P_1P_2.
b) Welche Koordinaten hat der Durchstoßpunkt P_3 durch die x,y-Ebene ?
c) Liegt der Punkt $P_4(4 / 1 / 2)$ auf der Geraden P_1P_2 ?

B 51.) Gegeben sind die vier Punkte

$P_1(-3/5/-2)$, $P_2(-1/3/0)$, $P_3(3/0/2)$, $P_4(0/3/-1)$.

a) Zeigen Sie, daß die Punkte ein ebenes Viereck bilden.

b) Wie groß ist der Flächeninhalt dieses Vierecks ?

c) Wie lautet eine Gleichung der Ebene, in der alle vier Punkte liegen ? (Parameterdarstellung und implizite Gleichung)

d) Bestimmen sie eine Gleichung der Geraden durch $Q(-8/2/-7)$, die senkrecht steht auf dieser Ebene.

B 52.) Gegeben sind die Ebenen

$$E_1: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + p\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad , \quad E_2: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

a) Zeigen Sie, daß E_1 und E_2 parallel sind.

b) Wie groß ist der Abstand der Ebenen ?

B 53.) Eine Ebene E geht durch $P_o(4 / 2 / 2)$ und wird aufgespannt von den Vektoren $\vec{a} = (3 ; 2 ; -2)^T$ und $\vec{b} = (1 ; 0 ; -1)^T$.

a) Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden g, die senkrecht steht auf E und durch P_o geht.

b) Wie lauten die Koordinaten der Punkte auf g, die von der Ebene E den Abstand $d = 6$ haben ?

c) In welchen Punkten durchsetzt g die Koordinatenebenen ?

d) Welchen Winkel β schließt die Richtung von g mit der y-Achse ein ?

B 54.) Gegeben sind zwei Ebenen jeweils durch drei Punkte:

E_1: $P_1(1/-1/2)$, $P_2(3/0/-1)$, $P_3(-1/2/0)$

E_2: $Q_1(2/0/3)$, $Q_2(0/1/-2)$, $Q_3(6/-2/6)$

a) Ermitteln Sie einen Richtungsvektor der Schnittgeraden von E_1 und E_2, sowie ihren Durchstoßpunkt mit der x,y-Ebene.

b) Wie groß ist der Winkel φ zwischen E_1 und E_2 ?

B 55.) Gegeben ist die Ebene E durch die drei Punkte

$P_1(2/0/4)$, $P_2(-1/3/5)$, $P_3(1/4/2)$.

Ermitteln Sie die Gleichung der Ebene

a) in Parameterform ; b) implizit in Koordinaten .

B 56.) Die Ebene E ist gegeben durch den Punkt P(0/3/1) und den Normalenvektor $\vec{n} = (2 ; 3 ; 1)^T$. Bestimmen Sie den Abstand des Punktes Q(6/5/2) von E, sowie die Koordinaten seines Lotfußpunktes S .

B 57.) Gegeben ist die Pyramide PQRS mit den Ecken P(3/0/0) , Q(0/5/0) , R(0/0/3) , S(0/-2/0). Skizze ! Wie groß ist die Höhe h der Pyramide über der Grundfläche (PQR) ?

B 58.) Eine Pyramide hat die Ecken A(1/0/0), B(0/2/0), C(-1/-1/0), D(0/0/2). Wie groß sind die Winkel zwischen der Grundfläche (ABC) und

a) den Kanten (AD), (BD), (CD) ;
b) den Seitenflächen (ABD), (BCD), (ACD) ?

Skizzieren Sie die Pyramide in einem Koordinatensystem.

B 59.) Gegeben sind die Ortsvektoren $\vec{a} = (2;2;1)^T$, $\vec{b} = (4;3;0)^T$.

a) Ermitteln Sie eine Gleichung für die Winkelhalbierende der beiden Ortsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

b) Geben Sie eine Gleichung der Ebene E an, die durch die Winkelhalbierende geht und senkrecht steht auf der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebene.

B 60.) Gegeben ist die Ebene E: $4x + 2y + z - 16 = 0$. Berechnen Sie:

a) Schnittpunkte P_x, P_y, P_z und Schnittwinkel (Neigungswinkel) $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ mit den Koordinatenachsen ;

b) Schnittwinkel $\beta_{xy}, \beta_{xz}, \beta_{yz}$ mit den Koordinatenebenen ;

c) Abstand des Ursprungs von der Ebene E .

BERUFSAKADEMIE
STUTTGART
University of Cooperative Education

Ingenieurmathematik I für E-Techniker
Lösungen (zu B1 – B60)

Dipl.-Math M.Baum
E-Mail: micbaum@de.ibm.com

5.3. Lösungen

1.) $\overrightarrow{OP} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$; $\overrightarrow{OQ} = 4\vec{i} + 1{,}5\vec{j}$; $\overrightarrow{AC} = -4\vec{i} + 3\vec{j}$; $\overrightarrow{QP} = -2\vec{i} + 1{,}5\vec{j}$

2.) $\vec{a} = (-3;\ -5)^T$, $\vec{b} = (5;\ -2)^T$

3.) 2 Lösungen: $r_z = \pm 6$, Endpunkte $P_1(4/-2/5)$, $P_2(4/-2/-7)$

4.) a) $(-1;\ 4;\ 0)^T$ b) $(1;\ -4;\ 0)^T$ c) $(-2;\ 2;\ 0)^T$

5.) $|\vec{F}_R| = 224$ N, $\sphericalangle(\vec{F}_1, \vec{F}_R) = (-)\ 41{,}6^\circ$ (nach unten)

6.) $|\vec{F}_3| = 289{,}9$ N, $\alpha_3 = (-)\ 38{,}9^\circ$ (nach rechts)

7.) a) Maßstab etwa $m_F = 100$ N/cm : $|\vec{F}_R| \approx 490$ N, $\alpha_R \approx (-)\ 7^\circ$
b) mit Hilfe von Sinus- und Cosinus-Satz: $|\vec{F}_R| = 491{,}3$ N, $\alpha_R = -6{,}85^\circ$
c) x-Achse $\|$ Schienen: $F_{Rx} = 487{,}8$ N, $F_{Ry} = -58{,}6$ N

Bemerkung: Rechnung in Koordinaten einfacher und sicherer! Vor allem dann, wenn mehr als 2 Kräfte zu addieren sind.

8.) a) $\vec{c} = (-4;\ 6;\ 2)^T$ b) $\vec{e}_a = \frac{1}{\sqrt{14}}(-2;\ 3;\ 1)^T$, $\vec{e}_b = -\vec{e}_a$

9.) Bedingung: $(\vec{a} + \lambda\vec{b})\cdot\vec{c} = 0 \Rightarrow \lambda = -\vec{a}\cdot\vec{c}/\vec{b}\cdot\vec{c} = 1$

10.) $\vec{a}\cdot\vec{v} = 0$: $v_x + 2v_y = 0 \Rightarrow \vec{v} = (-2p;\ p;\ q)^T$, $p, q \in \mathbb{R}$ (beliebig)

11.) a) $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$, $\vec{e}_{a+b} = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$; $\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{e}_{a-b} = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$
b) $\varphi_1 = \varphi_2 = 26{,}565^\circ$; $\varphi_3 = 36{,}87^\circ$ ($\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 90^\circ$; Skizze !)
c) $\{\vec{c} \perp \vec{a}:\ c_y = -2c_x;\ |\vec{c}| = 3:\ c_x^2 + c_y^2 = 9;\ c_y > 0\} \Rightarrow \vec{c} = \begin{pmatrix}-3/\sqrt{5}\\6/\sqrt{5}\end{pmatrix}$

12.) $\vec{F} = (3;\ 3;\ 2)^T$ N, $|\vec{F}| = \sqrt{22}$ N ; $\varphi_1 = 20{,}82^\circ$, $\varphi_2 = 174{,}27^\circ$, $\varphi_3 = 69{,}19^\circ$

13.) $P(3\sqrt{2}/3/-3)$

14.) $\vec{a}_b = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-3\\5\\-2\end{pmatrix}$; $\vec{b}_a = -\frac{19}{14}\begin{pmatrix}2\\-3\\-1\end{pmatrix}$; $\vec{c}_d = \vec{d}_c = \vec{0}$, da $\vec{c} \perp \vec{d}$

15.) a) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ seien Ortsvektoren von A, B, C, D; dann folgt (Skizze !)
$\vec{d} = \vec{a} + \vec{c} - \vec{b} \Rightarrow D(-1/5/1)$
b) $\overrightarrow{AC} = (8;\ -2;\ 2)^T$, $|\overrightarrow{AC}| = 6\sqrt{2}$; $\overrightarrow{BD} = (-4;\ 8;\ 0)^T$, $|\overrightarrow{BD}| = 4\sqrt{5}$
c) $\cos\alpha = -2/\sqrt{10}$, $\alpha = 129{,}23^\circ$

16.) a) $|\vec{d}_1| = |\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{(\vec{a}+\vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2} = \sqrt{19}$; $|\vec{d}_2| = |\vec{a}-\vec{b}| = 7$

b) $|\vec{d}| = |\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}| = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

c) $\cos\alpha = -\frac{1}{6\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 95{,}52^\circ$; $\beta = 30^\circ$; $\gamma = 54{,}74^\circ$

d) $d_a = |\vec{d}| \cos\alpha = -\frac{1}{2}$; $d_b = |\vec{d}| \cos\beta = \frac{9}{2}$; $d_c = |\vec{d}| \cos\gamma = 3$

17.) a) $\cos\varphi = \frac{1}{2}$, $\varphi = 60^\circ$ (3 geeignet gewählte Flächendiagonalen bilden ein gleichseitiges Dreieck !)

b) $\cos\psi = \frac{1}{3}$, $\psi = 70{,}5^\circ$

18.) Aus $\vec{a}\cdot\vec{x} = 5$ folgt mit $\vec{a} = (1 ; 2 ; 0)^T$ und $\vec{x} = (x ; y ; 0)^T$: $x + 2y = 5$
Die Endpunkte aller gesuchten Ortsvektoren liegen auf der Geraden mit der Gleichung $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$. [Verallgemeinerung: s. Bsp. 13 S. 29]

19.) $\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{1}) = 0{,}807 \Rightarrow \sphericalangle(\vec{a},\vec{1}) = 36{,}2^\circ$

20.) a) $-2\vec{j} + 2\vec{k}$; b) $-\vec{k}$

21.) a) $3(\vec{a}\times\vec{b})$ b) $\vec{a}\cdot(\vec{c}\times\vec{b}) = -[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]$ c) $3[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]$

22.) a) $\cos\sphericalangle(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$; $\vec{u}\cdot\vec{v} = (\vec{a}-2\vec{b})\cdot(3\vec{a}+2\vec{b}) = 3\vec{a}^2 - 4\vec{a}\cdot\vec{b} - 4\vec{b}^2 = \ldots$

$\cos\sphericalangle(\vec{u},\vec{v}) = -0{,}899 \Rightarrow \sphericalangle(\vec{u},\vec{v}) = 154{,}06^\circ$

b) $A = \frac{1}{2}|\vec{u}\times\vec{v}|$; $\vec{u}\times\vec{v} = (\vec{a}-2\vec{b})\times(3\vec{a}+2\vec{b}) = 2\vec{a}\times\vec{b} - 6\vec{b}\times\vec{a} = 8\,\vec{a}\times\vec{b}$

$\Rightarrow A = 4\,|\vec{a}\times\vec{b}| = 20\sqrt{2}$

23.) a) $|\vec{a}+\vec{b}| = 2{,}19$; $|\vec{a}-\vec{b}| = 3{,}90$

b) $\cos\alpha = \frac{(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})}{|\vec{a}+\vec{b}||\vec{a}-\vec{b}|} = 0{,}811 \Rightarrow \alpha = 35{,}8^\circ$

c) $A = |\vec{a}\times\vec{b}| = |5\vec{n}\times\vec{m}| = \frac{5}{2}$

24.) $|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2$

25.) a) entweder $\vec{a} = \vec{0}$ oder $\vec{b} = \vec{0}$ (oder beide $\vec{0}$)

b) $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = 45^\circ$; c) $\vec{a}$ parallel $\vec{b}$

26.) a) $3\vec{a}^2 - 10\vec{b}^2 + 8\vec{c}^2 - \vec{a}\cdot\vec{b} - 14\vec{a}\cdot\vec{c} - 16\vec{b}\cdot\vec{c}$

b) $-11\,\vec{a}\times\vec{b} - 10\,\vec{a}\times\vec{c} - 24\,\vec{b}\times\vec{c}$

27.) a) $\begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 0{,}9 \\ 1{,}2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ -1{,}9 \\ 0{,}8 \end{pmatrix}$ b) $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 41 \\ -13 \\ 14 \end{pmatrix}$

28.) $A = \frac{1}{2} \, | \vec{d}_1 \times \vec{d}_2 | = 5\sqrt{3}$

29.) a) $\pm \frac{1}{\sqrt{379}} \, (-17\,;\,3\,;\,9)^{T}$ b) $\pm \frac{1}{\sqrt{14}} \, (1\,;\,2\,;\,3)^{T}$

30.) a) $\vec{F}\cdot\vec{s} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \text{ Nm} = 4 \text{ Nm}$

b) $\vec{F}\cdot\vec{s}_1 + \vec{F}\cdot\vec{s}_2 = \left[\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}\right] \text{ Nm} = 4 \text{ Nm}$

Die Arbeit ist wegunabhängig !

31.) a) Mit $\{ \vec{F}_i \,,\ \vec{r}_i = \overrightarrow{OP}_i \ ;\ i = 1,2,3 \}$ ergibt sich

$$\vec{F}_R = \sum_{i=1}^{3} \vec{F}_i = \begin{pmatrix}100\\150\\-120\end{pmatrix} \text{ N} \ ; \qquad \vec{M}_O = \sum_{i=1}^{3} (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) = \begin{pmatrix}-48\\44\\-10\end{pmatrix} \text{ Nm}$$

b) $|\vec{F}_R| = 216{,}56 \text{ N}\ ;\quad \varphi_x = 62{,}50^{\circ},\quad \varphi_y = 46{,}16^{\circ},\quad \varphi_z = 123{,}65^{\circ}$

32.) a) $\vec{v}_P = (-4\,;\,3\,;\,0)^{T} \frac{\text{m}}{\text{sec}}$. $\vec{v}_P$ liegt in einer Ebene senkrecht zur Drehachse, tangential an den Kreis mit Mittelpunkt M auf der Drehachse und Radius $\rho = \overline{MP} = \sqrt{x_P^{\,2} + y_P^{\,2}} = 5 \text{ m}$

b) $|\vec{v}_Q| = |\vec{\omega}|\,|\vec{r}_Q| \sin \sphericalangle(\vec{\omega}, \vec{r}_Q) = \omega_z \sqrt{6}\, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \omega_z \cdot$ (Abstand Q - z-Achse)

$\Rightarrow \quad \omega_z = \sqrt{5}\, \frac{1}{\text{sec}} \ ; \qquad \vec{v}_Q = \vec{\omega} \times \vec{r}_Q = \sqrt{5}\, (-2\,;\,1\,;\,0)^{T} \frac{\text{m}}{\text{sec}}$

33.) a) $\overline{AB} = \sqrt{6}\,,\ \overline{BC} = \sqrt{5}\,,\ \overline{CA} = 1\ ;\ \alpha = 65{,}9^{\circ},\ \beta = 24{,}1^{\circ},\ \gamma = 90^{\circ}$; b) $A = \frac{1}{2}\sqrt{5}$

34.) $V = 10\ ;\ A_{\Delta ABC} = \frac{5}{2}\sqrt{11}\ ,\ A_{\Delta ABD} = \frac{1}{2}\sqrt{395}\ ,\ A_{\Delta ACD} = \sqrt{35}\ ,\ A_{\Delta BCD} = 6\sqrt{5}$

35.) $\overrightarrow{OA} = \sqrt{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ \overrightarrow{OB} = \sqrt{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\ \overrightarrow{OC} = \sqrt{2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\ ;\quad V = \frac{1}{6}\left|[\,\overrightarrow{OA}\,\overrightarrow{OB}\,\overrightarrow{OC}\,]\right| = \frac{2}{3}\sqrt{2}$

36.) $p_{1,2} = (1 \pm \sqrt{105})/2\ ;\quad q_{1,2} = p_{1,2} - 1\ ;\quad r = -6\ ;\quad s = 1$

37.) a) $[\,\vec{a}_1\,\vec{a}_2\,\vec{a}_3\,] = 0$: Vektoren sind komplanar, spannen den $\mathbb{R}^3$ nicht auf ;
b) $[\,\vec{b}_1\,\vec{b}_2\,\vec{b}_3\,] = 2 \neq 0$: nicht komplanar, spannen den $\mathbb{R}^3$ auf .

38.) a) lin. unabh. (nicht parallel) b) lin. abh.: $3\vec{b}_1 + 2\vec{b}_2 = \vec{0}$
c) lin. abh.: $2\vec{c}_1 + 3\vec{c}_2 - \vec{c}_3 = \vec{0}$ d) lin. unabh.

39.) a) $[\,\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\,] = 0$, also komplanar ; b) $\vec{c} = 5\vec{a} + \vec{b}$

40.) a) Bedingung $[\,\vec{u}\,\vec{v}\,\vec{w}\,] = 0 \ \Rightarrow\ k = 3$; b) $\vec{w} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$

41.) <u>1. Mögl.:</u> $[\,\vec{v}_1\,\vec{v}_2\,\vec{v}_3\,] = (\vec{b}+\vec{c}-2\vec{a})\cdot\{(\vec{c}+\vec{a}-2\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c})\} = \ldots = 0$
<u>2. Mögl.:</u> $\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3 = (-2\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\vec{a} + (\lambda_1-2\lambda_2+\lambda_3)\vec{b} + (\lambda_1+\lambda_2-2\lambda_3)\vec{c} = \vec{0}$
Bedingung ist erfüllt für $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$; also linear abh.

42.) a) <u>1. Mögl.:</u> $\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+\nu\vec{c}=\vec{0}$ besitzt nur die triviale Lsg. $\lambda=\mu=\nu=0$;

<u>2. Mögl.:</u> $[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\,] = 85 \neq 0$: $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ nicht komplanar, also lin. unabh.

b) Gl.system $\vec{d}=p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c}$ hat die Lsg. $p=-2, q=1, r=-1$

$\Rightarrow \vec{d} = -2\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$

43.) a) $[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\,] = -2 \neq 0$ b) $\vec{v} = -\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}$

44.) Ansatz: $\vec{G}=\lambda\,\overrightarrow{SA}+\mu\,\overrightarrow{SB}+\nu\,\overrightarrow{SC}$; Lsg.: $\lambda=4,\ \mu=9,\ \nu=-7$; $\lambda,\mu>0$: SA, SB Druckstab, $\nu<0$: SC Zugstab.

Komponenten: $\vec{F}_A = (4;-12;-8)^T$, $\vec{F}_B = (-18;-9;-18)^T$, $\vec{F}_C = (14;21;7)^T$ [kN]

45.) a) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ nicht parallel $\Rightarrow$ A, B, C nicht auf einer Geraden

b) $[\,\overrightarrow{AB}\;\overrightarrow{AC}\;\overrightarrow{AD}\,] = -296 \neq 0 \Rightarrow$ A, B, C, D nicht in einer Ebene

46.) $x_P = a_x - (a_y/b_y)\,b_x = 5$; g_2: $\vec{x} = (5;0)^T + \mu\,(2;1)^T$ bzw. $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$

47.) $g \parallel (1;1;1)$; $P_{xy}(-1/-5/0)$, $P_{yz}(0/-4/1)$, $P_{xz}(4/0/5)$

48.) $\vec{x}_{12} = \begin{pmatrix}-1\\3\\7\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-4\\1\\-4\end{pmatrix}$, $\vec{x}_{23} = \begin{pmatrix}-5\\4\\3\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}11\\-9\\-7\end{pmatrix}$, $\vec{x}_{31} = \begin{pmatrix}6\\-5\\-4\end{pmatrix} + \nu\begin{pmatrix}-7\\8\\11\end{pmatrix}$

$\sphericalangle(P_1P_2P_3) = 74{,}05^\circ$, $\sphericalangle(P_2P_3P_1) = 21{,}17^\circ$, $\sphericalangle(P_3P_1P_2) = 84{,}78^\circ$

49.) a) $S_1(1/-1/1)$; Richtungsvektoren $\vec{a}_1 = (1;-1;1)^T$, $\vec{b}_1 = (2;-2;1)^T$

$\alpha_1 = \sphericalangle(g_1,h_1) = \sphericalangle(\vec{a}_1,\vec{b}_1) = 15{,}79^\circ$

b) $S_2(2/3/1)$; Richtungsvektoren $\vec{a}_2 = (2;3;1)^T$, $\vec{b}_2 = (1;-1;1)^T$; $\alpha_2 = 90^\circ$.

50.) a) $\vec{x} = \overrightarrow{OP}_1 + \lambda\,\overrightarrow{P_1P_2} = (-1;5;4)^T + \lambda\,(5;-2;-2)^T$; b) $P_3(9/1/0)$; c) nein

51.) a) $[\,\overrightarrow{P_1P_2}\;\overrightarrow{P_1P_3}\;\overrightarrow{P_1P_4}\,] = 0$; keine 3 Punkte auf einer Geraden

b) Fläche aufbauen aus zwei Dreiecken: $\Delta P_1P_2P_3$, $\Delta P_1P_3P_4$ (P_1, P_2, P_3, P_4 bilden in dieser Reihenfolge ein Viereck, da: $\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P_3} \uparrow\uparrow \overrightarrow{P_1P_3}\times\overrightarrow{P_1P_4}$)

$A = \frac{5}{2}\sqrt{6}$

c) Parameterdarstellung: z.B. $\vec{x} = \overrightarrow{OP}_1 + \lambda\,\overrightarrow{P_1P_2} + \mu\,\overrightarrow{P_1P_3}$

$\Rightarrow \vec{x} = (-3;5;-2)^T + \lambda\,(2;-2;2)^T + \mu\,(6;-5;4)^T$

Allg. Ebenengleichung (implizit): $(\vec{x}-\vec{x}_1)\cdot\vec{n} = 0 \Rightarrow x + 2y + z - 5 = 0$

d) $\vec{x} = \overrightarrow{OP} + \nu\,\vec{n} = (-8;2;-7)^T + \nu\,(1;2;1)^T$

52.) a) Normalenvektoren: $\vec{n}_1 = (-3;3;3)^T$, $\vec{n}_2 = (1;-1;-1)^T$; $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \Longleftrightarrow E_1 \parallel E_2$

b) E_2 implizit: $x - y - z + 1 = 0$; Abstand $P_0(2/0/4)$ von E_2 = $d = 1/\sqrt{3}$

53.) a) $\vec{x} = \vec{x}_o + \lambda(\vec{a}\times\vec{b}) = (4;2;2)^T + \lambda\,(-2;1;-2)^T$

b) Bedingung: $|\lambda(\vec{a}\times\vec{b})| = 6 \Rightarrow \lambda = \pm 2 \Rightarrow \{(0/4/-2),\ (8/0/6)\}$

c) (0/4/-2), (8/0/6), (2/3/0)

d) $\cos\beta = \frac{1}{3} \Rightarrow \beta = 70{,}53^\circ$

54.) a) Jeder Richtungsvektor der Schnittgeraden ist proportional dem Vektorprodukt aus Normalenvektoren $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ von E_1, E_2: $\vec{a} = (4;-2;-1)^T$.

$$\left.\begin{aligned} E_1:&\quad 7x + 10y + 8z - 13 = 0 \\ E_2:&\quad x + 2y - 2 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \overset{(z=0)}{\Rightarrow} \quad P_{xy}\left(\frac{3}{2} \,/\, \frac{1}{4} \,/\, 0\right)$$

b) $\varphi = \sphericalangle(E_1, E_2) = \sphericalangle(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = 34{,}17^\circ$

55.) a) $\vec{x} = \overrightarrow{OP_1} + \lambda\,\overrightarrow{P_1P_2} + \mu\,\overrightarrow{P_1P_3} = (2;0;4)^T + \lambda(-3;3;1)^T + \mu(-1;4;-2)^T$ (*)

b) 1. Mögl.: λ, μ aus den drei skalaren Gln. (*) eliminieren.

2. Mögl.: Koeffizienten von x,y,z in der Ebenengleichung sind Koordinaten eines Normalenvektors; Absolutglied bestimmen aus Punktprobe.

Erg.: $10x + 7y + 9z - 56 = 0$

56.) a) $(\vec{x} - \vec{x}_P)\cdot\vec{n} = 0 \iff 2x + 3y + z - 10 = 0$

Koordinaten von Q in Hesse-Form eingesetzt: $d = 19/\sqrt{14} = 5{,}078$

b) $S\left(\frac{23}{7} \,/\, \frac{13}{14} \,/\, \frac{9}{14}\right)$

57.) Ebene (PQR): $5x + 3y + 5z - 15 = 0$; $h = 21/\sqrt{59} = 2{,}734$

58.) a) $\sin\alpha_1 = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \alpha_1 = 63{,}43^\circ$

$\sin\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha_2 = 45^\circ$

$\sin\alpha_3 = \frac{2}{\sqrt{6}} \Rightarrow \alpha_3 = 54{,}74^\circ$

b) $\cos\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \Rightarrow \beta_1 = 65{,}91^\circ$

$\cos\beta_2 = \frac{1}{\sqrt{11}} \Rightarrow \beta_2 = 72{,}45^\circ$

$\cos\beta_3 = \frac{1}{\sqrt{21}} \Rightarrow \beta_3 = 77{,}40^\circ$

59.) a) Richtungsvektor: $\vec{w} = \vec{e}_a + \vec{e}_b$; Gl. der W.halb.: $\vec{x} = \lambda\,(22;19;5)^T$

b) E durch O, aufgespannt von $\vec{n} = \vec{a}\times\vec{b}$ und $\vec{w}$: $\vec{x} = \mu(-3;4;-2)^T + \nu(22;19;5)^T$

60.) a) $P_x(4/0/0)$, $P_y(0/8/0)$, $P_z(0/0/16)$

$\sin\alpha_x = \frac{4}{\sqrt{21}} \Rightarrow \alpha_x = 60{,}79^\circ$; $\alpha_y = 25{,}88^\circ$; $\alpha_z = 12{,}60^\circ$

b) $\cos\beta_{xy} = \frac{1}{\sqrt{21}} \Rightarrow \beta_{xy} = 77{,}40^\circ$; $\beta_{yz} = 29{,}21^\circ$; $\beta_{xz} = 64{,}12^\circ$

Beachten Sie: $\alpha_x + \beta_{yz} = 90^\circ$, usw

d) Koordinaten von O in Hesse-Form eingesetzt: $d = 16/\sqrt{21} = 3{,}491$

BERUFSAKADEMIE
STUTTGART
University of Cooperative Education

Ingenieurmathematik I für E-Techniker
Übungsaufgaben
Matrizenrechnung, LGS, Determinanten

Dipl.-Math. M.Baum
E-Mail: micbaum@de.ibm.com

B 61 bis B 110

VI Aufgaben

1 Matrizen 1

B61 **Aufgabe 1** (17.12.2005)

Berechnen Sie die Matrix $\underline{X}$ aus folgender Gleichung

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} - 2\left\{\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \underline{X}\right\} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}$$

B62 **Aufgabe 2**

Ermitteln Sie $\underline{X}$ und $\underline{Y}$ aus folgendem Gleichungssystem

$$3\underline{X} - 2\underline{Y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \qquad 4\underline{X} + \underline{Y} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

B63 **Aufgabe 3**

Bestimmen Sie die Matrix $\underline{A}_{(3,3)}$ mit den Elementen

$$a_{ik} = \left\{\begin{matrix} i-1 & \text{für} & i < k \\ i+1 & \text{für} & i \geq k \end{matrix}\right\}$$

B64 **Aufgabe 4**

Bestimmen Sie die Matrix $\underline{A}_{(4,4)}$, deren Elemente a_{ik} folgende Bedingungen erfüllen:

$$a_{ik} = \left\{\begin{matrix} 1 & \text{für} & i = k \\ 2 & \text{für} & i = k-2 \\ 3 & \text{für} & i = k+2 \\ 4 & \text{sonst} & \end{matrix}\right\}$$

B65 **Aufgabe 5**

Die Elemente einer $(3,3)$-Matrix sind gegeben durch

$$a_{ik} = (i-3)(2k-4) \quad \{\text{ für } i = 1,2,3; \quad k = 1,2,3\}$$

Berechnen Sie $s = \sum_{n=1}^{3} a_{nn}$

B66

Aufgabe 6

Gegeben sind die Matrizen

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} ; \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} ; \quad \underline{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{D} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} ; \quad \underline{M} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie, falls möglich, folgende Matrizenprodukte

a) $\underline{A} \cdot \underline{B}$ b) $\underline{B} \cdot \underline{A}$ c) $\underline{A} \cdot \underline{C}$ d) $\underline{C} \cdot \underline{A}$ e) $\underline{A} \cdot \underline{D}$
f) $\underline{D} \cdot \underline{A}$ g) $\underline{B} \cdot \underline{C}$ h) $\underline{C} \cdot \underline{B}$ i) $\underline{B} \cdot \underline{M}$ k) $\underline{M} \cdot \underline{B}$
l) $\underline{D} \cdot \underline{M}$ m) $\underline{M} \cdot \underline{D}$ n) $\underline{A}^2$ o) $\underline{B}^2$ p) $\underline{C}^2$

B67

Aufgabe 7

Bestätigen Sie die Gültigkeit des Gesetzes $(\underline{A} \cdot \underline{B})^T = \underline{B}^T \cdot \underline{A}^T$ für

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} ; \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

B68

Aufgabe 8

a) Schreiben Sie das Gleichungssystem in Matrizenform

$$\begin{array}{rcrcrcr} 5x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & & & = & 0 \\ & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & -4 \end{array}$$

b) Gegeben sind die Matrizen

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} ; \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Schreiben Sie das Gleichungssystem $\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}$ ausführlich an.

B69

Aufgabe 9

Zeigen Sie: Zwischen den Matrizen (Pauli - Spin-Matrizen)

$$\underline{S}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \quad \underline{S}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{pmatrix} ; \quad \underline{S}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

bestehen die folgenden Beziehungen ($\underline{E}$ ist die Einheitsmatrix; j ist die imaginäre Einheit mit der Eigenschaft $j^2 = -1$)

$$\text{a) } \underline{S}_1 \cdot \underline{S}_2 = j \cdot \underline{S}_3 \text{ ; b) } \underline{S}_2 \cdot \underline{S}_1 = -j \cdot \underline{S}_3 \text{ ; c) } \underline{S}_1^2 = \underline{S}_2^2 = \underline{S}_3^2 = \underline{E}$$

B70

Aufgabe 10

Gegeben sind die Matrizen

$$\underline{C}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 3 & q & 2 & -1 \\ -2 & p & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \end{pmatrix} ; \quad \underline{C}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ -4 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie das Element d_{23} der Matrix $\underline{D} = \underline{C}_1 \cdot \underline{C}_2$

B71

Aufgabe 11

Gegeben sind die Matrizen $\underline{A} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$; $\underline{B} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$

Welcher Bedingung müssen die reellen Parameter p und q genügen, damit gilt

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = \underline{B} \cdot \underline{A} \text{ ?}$$

B72

Aufgabe 12 $\underline{A} = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & -\cos x \end{pmatrix}$; $\underline{A}^4 = ?$

B73

Aufgabe 13 $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \underline{A}^6 = ?$

B74

Aufgabe 14 $\underline{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & z \\ 0 & y & 0 \\ x & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \underline{B}^2 = ?$

B75

Aufgabe 15

Gegeben ist die Matrix $\underline{A} = \begin{pmatrix} -1 & p \\ q & -1 \end{pmatrix}$. Wie muss man die reellen Parameter p, q wählen, damit gilt $\underline{A}^T \cdot \underline{A} = 2\,\underline{E}$?

B76

Aufgabe 16

Für welche Matrix $\underline{B} = (b_{ik})$ gilt

$$\underline{B} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{B} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

( )

B77 **Aufgabe 17**

Wie muss man den Parameter c in der Matrix $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & c \\ c & 1 \end{pmatrix}$ wählen, damit die Gleichung $x^2 - 12xy + y^2 = 72$ durch die Matrixgleichung $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \underline{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 72$ dargestellt wird ?

2 Determinanten

B78 **Aufgabe 18**

Welche Werte von x, y, z erfüllen die Gleichungen ?

( )

$$\text{a)} \quad \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & c-x \end{vmatrix} = 0 \; ; \qquad \text{b)} \quad \begin{vmatrix} y^2 & 4 & 9 \\ y & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{c)} \quad \left| \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix} - z \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 0$$

B79 **Aufgabe 19**

Berechnen Sie die Determinanten

$$\text{a)} \quad \begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix} \qquad \text{b)} \quad \begin{vmatrix} 1 & \log_a b \\ \log_b a & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{c)} \quad \begin{vmatrix} -x & 1 & x \\ 0 & -x & -1 \\ x & 1 & -x \end{vmatrix}$$

( ) B80 **Aufgabe 20**

Berechnen Sie die Determinanten

$$\text{a)} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \\ -3 & 12 & -15 \end{vmatrix} \qquad \text{b)} \quad \begin{vmatrix} 17 & 1 & -3 & 0 \\ -14 & 3 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

B81 **Aufgabe 21**

Berechnen Sie die Determinante $D = \begin{vmatrix} e^x + e^{-x} & e^x - e^{-x} \\ e^x - e^{-x} & e^x + e^{-x} \end{vmatrix}$

B82

Aufgabe 22

Wie muss x gewählt werden, damit folgende Gleichung gilt

$$\begin{vmatrix} \mathrm{e}^{-x} & 1 & -1 \\ 0 & 3\mathrm{e}^{x} & \mathrm{e}^{-x} \\ 0 & \mathrm{e}^{x} & \mathrm{e}^{-2x} \end{vmatrix} = 0\ ?$$

B83

Aufgabe 23

Lösen Sie folgendes Gleichungssystem mit der Cramerschen Regel

$$\begin{aligned} \cos\alpha \cdot x &- \sin\alpha \cdot y = a \\ \sin\alpha \cdot x &+ \cos\alpha \cdot y = b \end{aligned}$$

3 Lineare Gleichungssysteme

B84

Aufgabe 24

Gegeben ist die allgemeine (3, 3)-Matrix

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie $\underline{A} \cdot \underline{x}_i$ für folgende Vektoren

$$\text{a)}\ \underline{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\ ;\ \text{b)}\ \underline{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\ ;\ \text{c)}\ \underline{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Formulieren Sie das Ergebnis in Worten!

B85

Aufgabe 25

Für welche Werte des reellen Parameters p existieren Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 9x - 6y &= p \\ -6x + 4y &= 2 \end{aligned} \quad ?$$

B86

Aufgabe 26

Schneiden sich folgende Geraden in einem Punkt? (Rechnung und Skizze!)

$$\text{a)}\ \begin{aligned} 2x - 3y &= 6 \\ 3x + y &= 9 \\ x + 4y &= 3 \end{aligned} \qquad \text{b)}\ \begin{aligned} 2x - 3y &= 6 \\ x + 2y &= 4 \\ x - 5y &= 5 \end{aligned}$$

B87 **Aufgabe 27**

Wieviele Lösungen haben die Gleichungssysteme?

$$\text{a)}\quad \begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 & - & 4x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array} \qquad \text{b)}\quad \begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 & - & 4x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & 6x_2 & + & 4x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array}$$

$$\text{c)}\quad \begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 & - & 4x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & 8x_2 & - & 3x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array}$$

B88 **Aufgabe 28** (17.12.05)

Gegeben sind die Matrizen

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & p \\ 1 & p & 1 \\ p & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ p \\ p^2 \end{pmatrix}$$

Für welche Werte des reellen Parameters p ist das Gleichungssystem $\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}$ lösbar? Wie lauten jeweils die Lösungen?

B89 **Aufgabe 29** (17.12.05)

Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & & & & & & & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 0 \\ & & & & x_3 & + & x_4 & & & = & 0 \\ & & & & & & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & & & & & & & - & x_5 & = & 0 \end{array}$$

B90 **Aufgabe 30** (17.12.05)

a) Welcher Bedingung müssen p, q, r genügen, damit das lineare Gleichungssystem $\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}$ mit

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

lösbar ist ?

b) Welcher Wert ergibt sich für r, falls man $p = 1$ und $q = 0$ setzt ?

c) Wie lautet die allgemeine Lösung für die speziellen Werte p, q, r aus Teil b) ?

B91

Aufgabe 31

Für welche Werte von p ist $\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{0}$ nichttrivial lösbar?

a) $\underline{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & p \end{pmatrix}$ b) $\underline{A} = \begin{pmatrix} (2-p) & 1 & -\frac{2}{3} \\ 2 & (3-p) & -\frac{4}{3} \\ 3 & 3 & -(1+p) \end{pmatrix}$

Lösung ? Lösung für $p = 2$?

B92

Aufgabe 32 (17.12.05)

Für welche Werte des Parameters a hat das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ 2x + 3y + az &= 3 \\ x + ay + 3z &= 2 \end{aligned}$$

a) keine Lösung, b) unendlich viele Lösungen, c) eine eindeutige Lösung ?

B93

Aufgabe 33

Gegeben sind die linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} 6y_1 - 5y_2 &= 4x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 8 \\ -2y_1 + 3y_2 &= -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 &= y_1 - 2y_2 + \tfrac{3}{4}x_1 + \tfrac{1}{2}x_3 + \tfrac{3}{2} \\ z_2 &= 4y_2 + x_2 - 2 \\ z_3 &= 2y_1 + \tfrac{1}{2}x_1 + 2x_3 - 1 \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass die Gleichungen in Matrixform

$$\underline{A}\,\underline{y} = \underline{B}\,\underline{x} + \underline{a}\,; \quad \underline{z} = \underline{C}\,\underline{y} + \underline{D}\,\underline{x} + \underline{b}$$

geschrieben werden können. Wie lauten die Matrizen $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$, $\underline{D}$ und die Vektoren $\underline{a}$, $\underline{b}$?

b) Bringen Sie die Gleichungssysteme in die Form $\underline{z} = \underline{R}\,\underline{x} + \underline{c}$

c) Für welche x-Werte ergeben sich die z-Werte $z_1 = 1$, $z_2 = 0$, $z_3 = 0$?

4 Matrizen 2

B94 **Aufgabe 34**

Bestimmen Sie die reellen Parameter p, q, r so, dass die Matrizen

$$\underline{M} = \begin{pmatrix} p & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -q \\ r & 0 & r \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{N} = \begin{pmatrix} p & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & r \end{pmatrix}$$

die Gleichung

$$2(\underline{M}^T+\underline{N})-(\underline{N}^T+3\underline{E}) = \underline{0} \qquad (\ \underline{E} \ldots \text{Einheitsmatrix}\ )$$

erfüllen.

B95 **Aufgabe 35**

Berechnen Sie die skalaren Größen r, s, t aus der Matrixgleichung

$$r\ \underline{E}+s\ \underline{A}+t\ \underline{A}^2 = \underline{0}$$

mit $\underline{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\underline{A} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$; $\underline{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

B96 **Aufgabe 36**

a) Berechnen Sie die Matrix $\underline{X}$ aus der Gleichung $\underline{A}\cdot\underline{X} = \underline{B}$ mit

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Berechnen Sie die Matrix $\underline{Y}$ aus der Gleichung $\underline{Y}\cdot\underline{C} = \underline{D}$ mit

$$\underline{C} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{D} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

B97 **Aufgabe 37**

Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 5x + 2y + z &= 4 \\ -x + y + z &= 0 \\ -3x - 2y + 2z &= 7 \end{aligned}$$

a) mit der Cramerschen Regel,

b) mit dem Gauß-Algorithmus,

c) durch Matrix-Inversion mit Hilfe der Adjunkten. (Inversenformel)

Vergleichen Sie den jeweiligen Aufwand!

B98

Aufgabe 38

a) Gegeben sind die linearen Beziehungen (Transformationen)

$$\underline{x} = \underline{A} \cdot \underline{y}; \quad \underline{y} = \underline{B} \cdot \underline{z}.$$

Dabei seien $\underline{A}$ und $\underline{B}$ zwei reguläre (n,n)-Matrizen und $\underline{x}$, $\underline{y}$, $\underline{z}$ $n-$dimensionale Spaltenvektoren. Ermitteln Sie die Matrix $\underline{C}$ der linearen Transformation

$$\underline{z} = \underline{C} \cdot \underline{x}.$$

b) Führen Sie die Berechnung aus Teil a) durch für die Transformationen

$$\begin{array}{rcrcr} y_1 & = & z_1 & - & z_2 \\ y_2 & = & -z_1 & - & z_2 \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcr} x_1 & = & y_1 & + & y_2 \\ x_2 & = & y_1 & & \end{array}$$

B99

Aufgabe 39

a) Es sei $\underline{A} = \text{diag}(a_{ii})$ eine Diagonalmatrix der Ordnung 3 und $\underline{x}$ eine $(3,1)$-Matrix (ein Spaltenvektor) mit den Elementen x_1, x_2, x_3. Berechnen Sie den Ausdruck $\underline{x}^T \cdot \underline{A} \cdot \underline{x}$.

b) Wie kann man den Ausdruck $a_{11}x_1y_1 + a_{22}x_2y_2 + a_{33}x_3y_3$ in Matrixschreibweise darstellen?

B100

Aufgabe 40

Zur Matrix $\underline{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ soll eine Matrix $\underline{A}$ gefunden werden, welche die Bedingung $\underline{A} \cdot \underline{S} = \underline{S} \cdot \underline{A}$ erfüllt.

a) Wieviele Zeilen und Spalten muss die Matrix $\underline{A}$ haben ?

b) Folgende Elemente der Matrix $\underline{A}$ seien gegeben:

$a_{11} = 1, \ a_{22} = 2, \ a_{33} = 3, \ a_{32} = -2, \ a_{23} = -4$

Berechnen Sie die übrigen Elemente von $\underline{A}$ und die Produktmatrix $\underline{P} = \underline{A} \cdot \underline{S}$.

c) Für welche Zahlen λ hat das lineare Gleichungssystem $\underline{P} \cdot \underline{y} = \lambda \, \underline{y}$ nichttriviale Lösungen ? ($\underline{y}$ ist ein Spaltenvektor mit den Elementen y_1, y_2, y_3.)

B101

Aufgabe 41

Ein Lösungsvektor des Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & ?y & + & 2z & = & 3 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 2 \end{array} \qquad \text{ist} \qquad \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie den unleserlichen Koeffizienten.

b) Geben Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems an.

○

B102 **Aufgabe 42**

Untersuchen Sie den Rang der Matrix $\underline{A} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \\ k & -3 & 3 \end{pmatrix}$

in Abhängigkeit vom reellen Parameter k. Was bedeutet das Ergebnis für die Lösbarkeit des Gleichungssystems $\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{0}$?

B103 **Aufgabe 43**

Bestimmen Sie den Rang der beiden Matrizen

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \\ 5 & 1 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (\underline{A}; \underline{b}) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

und diskutieren Sie die Lösbarkeit des Gleichungssystems $\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}$.

○

B104 **Aufgabe 44**

Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrizen

a) $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\underline{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

B105 **Aufgabe 45**

Bestätigen Sie die Gültigkeit der Rechenregel $(\underline{A} \cdot \underline{B})^{-1} = \underline{B}^{-1} \cdot \underline{A}^{-1}$ für die Matrizen

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

B106 **Aufgabe 46**

Ermitteln Sie die inversen Matrizen durch elementare Zeilenumformungen:

○

a) $\underline{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\underline{D} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

5 Anwendungen

B107 **Aufgabe 47**

Gegeben ist die Matrix $\underline{M} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

○

a) Welche Eigenschaft hat die Abbildung $\underline{x}^* = \underline{M} \cdot \underline{x}$?

b) Ermitteln Sie das Bild des Dreiecks mit den Eckpunkten $A(1/1)$; $B(4/1)$; $C(3/2)$ unter der Abbildung $\underline{x}^* = \underline{M} \cdot \underline{x}$. Skizzieren Sie Dreieck ABC und Bilddreieck $A^*B^*C^*$

B108

Aufgabe 48

Gegeben ist die Matrix $\underline{A} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$.

Untersuchen Sie das zugehörige Eigenwertproblem $\underline{A} \cdot \underline{x} = \lambda \underline{x}$ in folgenden Teilschritten:

a) Schreiben Sie das Gleichungssystem ausführlich an.

b) Ermitteln Sie die Eigenwerte λ_1, λ_2.

c) Bestimmen Sie die zugehörigen Eigenvektoren $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$.

d) Zeigen Sie, dass diese Vektoren aufeinander senkrecht stehen.

B109

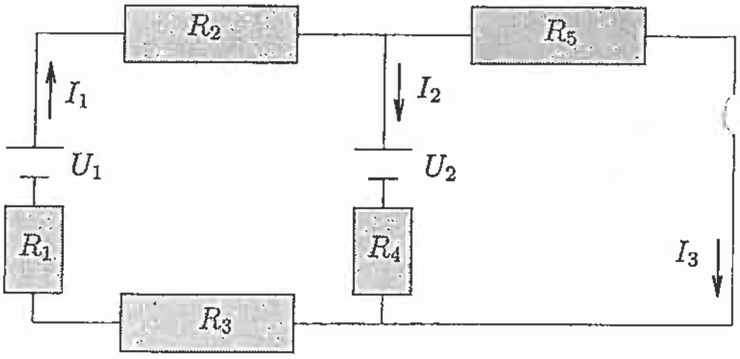
Aufgabe 49

Die Matrix $\underline{B}$ besitze die beiden (einfachen) Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$ mit den zugehörigen Eigenvektoren $\underline{x}_1 = (1, -1)$ und $\underline{x}_2 = (1, 1)$. Wie lautet die Matrix $\underline{B}$?

B110

Aufgabe 50

Im skizzierten Netzwerk sind die Widerstände $R_1, R_2, \ldots R_5$ und die Spannungen U_1, U_2 gegeben. Stellen Sie mit Hilfe der Kirchhoffschen Regeln ein Gleichungssystem für die unbekannten Ströme I_1, I_2, I_3 auf und ermitteln Sie diese Ströme.



6 Ergebnisse

1) $\underline{X} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

2) $\underline{X} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; $\underline{Y} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$

BERUFSAKADEMIE
STUTTGART
University of Cooperative Education

Ingenieurmathematik I für E-Techniker
Lösungen (zu B61 – B110)

Dipl.-Math. M.Baum
E-Mail: micbaum@de.ibm.com

---

1) bzw. B61 : $\underline{X} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

2) bzw. B62 : $\underline{X} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ und $\underline{Y} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$

b. w.

3) $\underline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ 4) $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ 5) $s = 4$

6) a) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ b) (13) c) existiert nicht

d) $\begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}$ e) existiert nicht f) $\begin{pmatrix} 15 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

g) existiert nicht h) existiert nicht i) $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

k) existiert nicht l) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ m) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

n) existiert nicht o) existiert nicht p) existiert nicht

q) $\begin{pmatrix} 3 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

7) Beweis durch Einsetzen

8) a) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 &= 3 \\ -x_1 + 5x_2 &= 2 \\ 4x_2 &= 1 \end{aligned}$

9) Beweis durch Einsetzen 10) $d_{23} = 8 - 3q$ 11) $p = q$

12) $\underline{A}^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 13) $\underline{A}^6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6a & 1 \end{pmatrix}$ 14) $\underline{B}^2 = \begin{pmatrix} xz & 0 & 0 \\ 0 & y^2 & 0 \\ 0 & 0 & xz \end{pmatrix}$

15) $\{ p = 1,\ q = -1\}$ oder $\{p = -1, q = 1\}$

16) $\underline{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 17) $c = -6$

18) a) $x_{1,2} = \frac{a+c \pm \sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2}$; b) $y_1 = 2; y_2 = 3$;
c) $z_{1,2} = 1; z_3 = -2$

19) a) 1 ; b) 0 ; c) $-2x$ 20) a) 144 ; b) -315 21) $D = 4$

22) $x = \ln 3$ 23) $x = a\cos\alpha + b\sin\alpha$; $y = -a\sin\alpha + b\cos\alpha$

24) a) $\underline{x}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$; b) $\underline{x}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$; c) $\underline{x}_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$

Multiplikation mit den "Einheitsvektoren" liefert die Spalten der Matrix

25) Lösungen existieren für $p = -3$; alle Punkte der Geraden $3x - 2y = 1$

26) a) Schnittpunkt $S(3/0)$; b) kein gemeinsamer Punkt

27) a) eindeutige Lösung $(2 \,;\, -\frac{5}{7} \,;\, -\frac{11}{7})$ b) keine Lösung
c) unendlich viele Lösungen z.B. $(-2t + \frac{4}{7} \,;\, t \,;\, 2t - \frac{1}{7})$, $t \in R$

28) $p = -2$: Widerspruch, keine Lösung
$p = 1$: ∞ viele Lösungen $(1 - \lambda - \mu \,;\, \mu \,;\, \lambda)$, $\lambda, \mu \in R$
$p \neq 1$, $\neq -2$: eindeutige Lösung $\left(\frac{(p+1)^2}{p+2} \,,\, \frac{1}{p+2} \,,\, -\frac{p+1}{p+2} \right)$

29) $\underline{x} = (\lambda \,,\, -\lambda \,,\, \lambda \,,\, -\lambda \,,\, \lambda\,)$; $\lambda \in R$

30) a) $2p + 3q - r = 0$; b) $r = 2$ c) $\underline{x} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4/3 \\ 1/3 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda \in R$

31) a) $p = 0$: $\underline{x} = (\lambda \,,\, -2\lambda \,, \lambda\,)^T$; $\lambda \in R$
b) $p_1 = 2$; $p_{2,3} = 1$. $p = 2 \longrightarrow$ $\underline{x} = (\lambda \,,\, 2\lambda \,,\, 3\lambda\,)^T$; $\lambda \in R$

32) a) $a = -3$ b) $a = 2$ (∞^1Lösungen, $r = 2$) c) $a \in R \setminus \{-3,\, 2\}$

33) a) $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$; $\underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$; $\underline{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$;

$\underline{a} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\underline{b} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$;

$\underline{A} = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$; $\underline{B} = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$;

$\underline{C} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$; $\underline{D} = \begin{pmatrix} 3/4 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\underline{z} = (\underline{C} \cdot \underline{A}^{-1} \cdot \underline{B} + \underline{D}) \cdot \underline{x} + \underline{C} \cdot \underline{A}^{-1} \cdot \underline{a} + \underline{b}$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

c) $x_1 = \frac{8}{13}$; $x_2 = -\frac{2}{13}$; $x_3 = \frac{6}{13}$

34) $p = 1$, $q = 0$, $r = 1$

35) $r = 4\lambda$, $s = 5\lambda$, $t = \lambda$; $\lambda \in R$

36) a) $\underline{X} = \underline{A}^{-1} \cdot \underline{B} = \begin{pmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$; b) $\underline{Y} = \underline{D} \cdot \underline{C}^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 9 & 13 \end{pmatrix}$

37) Lösung: $x = 1$, $y = -2$, $z = 3$
Rechenaufwand bei b) am geringsten, bei c) am größten

38) a) $\underline{z} = (\underline{A} \cdot \underline{B})^{-1} \cdot \underline{x} = (\underline{B}^{-1} \cdot \underline{A}^{-1}) \cdot \underline{x}$
b) $\underline{z} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \underline{x}$

39) a) $a_{11}x_1^{\,2} + a_{22}x_2^{\,2} + a_{33}x_3^{\,2}$
b) $\underline{x}^T \cdot \underline{A} \cdot \underline{y}$ oder $\underline{y}^T \cdot \underline{A} \cdot \underline{x}$

40) a) 3 Zeilen, 3 Spalten

b) $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$; $\underline{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

c) $\lambda_1 = 1$; $\lambda_{2,3} = \frac{1}{2}(-5 \pm \sqrt{33})$

41) a) $a_{22} = 3$ b) $\underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda \in R$

42) $\text{Rg } \underline{A} = 3$ für $k \neq 0$; $\text{Rg } \underline{A} = 2$ für $k = 0$

43) $\text{Rg } \underline{A} = \text{Rg } (\underline{A; b}) = 2$; Gl.system lösbar, ∞ viele Lösungen

44) $\text{Rg } \underline{A} = 3$; $\text{Rg } \underline{B} = 2$

45) $\underline{A} \cdot \underline{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -4 & -10 \end{pmatrix} \Longrightarrow (\underline{A} \cdot \underline{B})^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

$\underline{B}^{-1} \cdot \underline{A}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot (-\frac{1}{2}) \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

46) $\underline{C}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; $\underline{D}^{-1} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 8 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

47) a) Streckung von O aus mit dem Faktor 2
b) Bilddreieck $A^*(2/2)$; $B^*(8/2)$; $C^*(6/4)$

48) b) Eigenwerte $\lambda_1 = 4$; $\lambda_2 = -6$
c) Eigenvektoren $\underline{x}_1 = p \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\underline{x}_2 = p \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$; $p \in R$
d) Skalarprodukt $\underline{x}_1^T \cdot \underline{x}_2 = 0$

49) $\underline{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

50) $I_1 = -[R_4U_1 + R_5(U_1 + U_2)] \ / \ D$
$I_2 = -[R_5(U_1 + U_2) + (R_1 + R_2 + R_3)U_2)] \ / \ D$
$I_3 = [(R_1 + R_2 + R_3)U_2 - R_4U_1] \ / \ D$
mit $D = (R_1 + R_2 + R_3)(R_4 + R_5) + R_4R_5$

6 Matrizen

6.1 Bezeichnungen

Eine (m,n)–Matrix A ist ein rechteckiges Zahlenschema, das aus $m \cdot n$ Zahlen – *Elemente* genannt – besteht, die in m *Zeilen* (Zeilenvektoren) und n *Spalten* (Spaltenvektoren) angeordnet sind:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}), \quad \begin{matrix} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{matrix} .$$

Das Element a_{ij} steht in der i–ten Zeile und in der j–ten Spalte.
i heißt *Zeilenindex* und j heißt *Spaltenindex*,
m heißt *Zeilenzahl* und n heißt *Spaltenzahl* der Matrix A.

6.1

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ ist eine $(3,2)$–Matrix aus 3 Zeilen und 2 Spalten, es ist z.B. $a_{21} = 2$, $a_{12} = -1$, die zweite Zeile (der zweite Zeilenvektor) ist $(2,3)$.

$B = (1 \; -1 \; 2)$ ist eine $(1,3)$–Matrix[12] aus 1 Zeile und 3 Spalten.

$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ ist eine (quadratische) $(2,2)$–Matrix.

$D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -4 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ ist eine (symmetrische) $(3,3)$–Matrix.

$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist die $(2,3)$–Nullmatrix.

Sind alle Elemente von A gleich 0, so heißt A eine **Nullmatrix**, Bez.[13]: O.
Ist $A = (a_{ij})$ eine (m,n)–Matrix , so heißt die (n,m)–Matrix $A^{\top} := (a_{ji})$ die zu A *transponierte* oder *gespiegelte* Matrix. Es ist $(A^{\top})^{\top} = A$.
$A^{\top}$ geht aus A durch Vertauschen der Zeilen mit den Spalten hervor.

6.2

Zu A, B, C, D, O des vorigen Beispiels bilde man die Transponierten:

$$A^{\top} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}^{\top} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B^{\top} = (1,-1,2)^{\top} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$C^{\top} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad D^{\top} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -4 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} = D, \quad O^{\top} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

---

[12] Statt $(1 \; -1 \; 2)$ schreibt man auch $(1,-1,2)$.

[13] Gehen Zeilenzahl m und Spaltenzahl n nicht aus dem Zusammenhang hervor, müssen sie angegeben werden!

BERUFSAKADEMIE
STUTTGART
University of Cooperative Education

Ingenieurmathematik I für E-Techniker
Lineare Abbildungen
Lineare Transformationen

Dipl.-Math. M.Baum
E-Mail: micbaum@de.ibm.com

B 111 bis B 118

Beispiel 9 Sei $T: R^3 \to R^3$ der lineare Operator, der jeden Vektor um den Winkel θ im Uhrzeigersinn um die z-Achse rotiert, dann an der yz-Ebene spiegelt und schließlich auf die xy-Ebene projiziert. Man bestimme die Darstellungsmatrix von T.

Lösung. Wir erhalten T als Komposition

$$T = T_C \circ T_B \circ T_A = T_{CBA},$$

wobei T_A die Rotation um die z-Achse, T_B die Spiegelung an der yz-Ebene und T_C die Projektion auf die xy-Ebene beschreibt. Nach den Tabellen 4.3, 4.5 und 4.7 sind

$$[T_A] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [T_B] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [T_C] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

also ergibt sich nach (22)

$$CBA = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Übungen zu 4.2

B111

1. Man bestimme Definitions- und Wertebereich der durch das Gleichungssystem definierten Transformation und entscheide, ob sie linear ist.

a) $w_1 = 3x_1 - 2x_2 + 4x_3$
$w_2 = 5x_1 - 8x_2 + x_3$

b) $w_1 = 2x_1x_2 - x_2$
$w_2 = x_1 + 3x_1x_2$
$w_3 = x_1 + x_2$

c) $w_1 = 5x_1 - x_2 + x_3$
$w_2 = -x_1 + x_2 + 7x_3$
$w_3 = 2x_1 - 4x_2 - x_3$

d) $w_1 = x_1^2 - 3x_2 + x_3 - 2x_4$
$w_2 = 3x_1 - 4x_2 - x_3^2 + x_4$

B112

2. Man bestimme die Standarddarstellungsmatrix der linearen Transformation.

a) $w_1 = 2x_1 - 3x_2 + x_4$
$w_2 = 3x_1 + 5x_2 - x_4$

b) $w_1 = 7x_1 + 2x_2 - 8x_3$
$w_2 = -x_2 + 5x_3$
$w_3 = 4x_1 + 7x_2 - x_3$

c) $w_1 = -x_1 + x_2$
$w_2 = 3x_1 - 2x_2$
$w_3 = 5x_1 - 7x_2$

d) $w_1 = x_1$
$w_2 = x_1 + x_2$
$w_3 = x_1 + x_2 + x_3$
$w_4 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$

B 113 Man bestimme die Standarddarstellungsmatrix der durch

$$w_1 = 3x_1 + 5x_2 - x_3$$
$$w_2 = 4x_1 - x_2 + x_3$$
$$w_3 = 3x_1 + 2x_2 - x_3$$

definierten linearen Transformation $T: R^3 \to R^3$ und berechne $T(-1,2,4)$ durch direktes Einsetzen und durch Matrixmultiplikation.

B 114 Man bestimme die Standarddarstellungsmatrix von T.

a) $T(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, x_1 + x_2)$
b) $T(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$
c) $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 + 5x_2, x_3)$
d) $T(x_1, x_2, x_3) = (4x_1, 7x_2, -8x_3)$

B 115 Man bestimme die Darstellungsmatrix von T.

a) $T(x_1, x_2) = (x_2, -x_1, x_1 + 3x_2, x_1 - x_2)$
b) $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (7x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4, x_2 + x_3, -x_1)$
c) $T(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0, 0, 0)$
d) $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_4, x_1, x_3, x_2, x_1 - x_3)$

B 116 Man berechne $T(\mathbf{x})$.

a) $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}; \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ b) $[T] = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}; \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

c) $[T] = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \\ 6 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ d) $[T] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}; \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

B 117 Man berechne $T(\mathbf{x})$ mit der Darstellungsmatrix $[T]$ und durch direktes Einsetzen.

a) $T(x_1, x_2) = (-x_1 + x_2, x_2)$; $\mathbf{x} = (-1, 4)$
b) $T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 + x_3, x_2 + x_3, 0)$; $\mathbf{x} = (2, 1, -3)$

B 118 Man bestimme das Spiegelbild von $(-1, 2)$ bezüglich

a) der x-Achse,
b) der y-Achse,
c) der Geraden $y = x$

durch Multiplikation mit der zugehörigen Darstellungsmatrix.

BERUFSAKADEMIE
STUTTGART
University of Cooperative Education

Ingenieurmathematik I für E-Techniker
Lösungen (zu B 111 – B 118)

Dipl.-Math. M.Baum
E-Mail: micbaum@de.ibm.com

Übungen zu 4.1

1. a) $(-1, 9, -11, 1)$ b) $(22, 53, -19, 14)$ c) $(-13, 13, -36, -2)$
d) $(-90, -114, 60, -36)$ e) $(-9, -5, -5, -3)$ f) $(27, 29, -27, 9)$

2. $(\frac{6}{5}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{5})$ **3.** $c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = -1, c_4 = 1$

5. a) $\sqrt{29}$ b) 3 c) 13 d) $\sqrt{31}$

6. a) $\sqrt{133}$ b) $\sqrt{30} + \sqrt{77}$ c) $4\sqrt{30}$
d) $\sqrt{1811}$ e) $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{2}{3\sqrt{2}}, \frac{2}{3\sqrt{2}}$ f) 1

8. $= \pm\frac{5}{7}$ **9.** a) 7 b) 14 c) 7 d) 11 **10.** a) $\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$

11. a) $\sqrt{10}$ b) $2\sqrt{14}$ c) $\sqrt{59}$ d) 10

14. a) Ja b) Nein c) Ja d) Nein e) Nein f) Ja

15. a) $k = -3$ b) $k = -2, k = -3$ **16.** $\pm\frac{1}{37}(-34, 44, -6, 11)$

19. $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2$ **20.** -6

33. a) $a_1 a_2 \cdots a_n$
b) Die Diagonale hat die Länge $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$

Lösungen zu

Übungen zu 4.2

R 411. a) Linear, $R^3 \to R^2$
b) Nichtlinear, $R^2 \to R^3$
c) Linear, $R^3 \to R^3$
d) Nichtlinear, $R^4 \to R^2$

R 412. a) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 7 & 2 & -8 \\ 0 & -1 & 5 \\ 4 & 7 & -1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}$

7 d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

[illegible] $\begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$; $T(-1, 2, 4) = (3, -2, -3)$

B114. a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$

B115. a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 7 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

B116. a) $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3 \\ 13 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -2x_1 + x_2 + 4x_3 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 \\ 6x_1 \qquad - x_3 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} -x_1 + x_2 \\ 2x_1 + 4x_2 \\ 7x_1 + 8x_2 \end{bmatrix}$

B117. a) $T(-1,4) = (5,4)$ b) $T(2,1,-3) = (0,-2,0)$

B118. a) $(-1,-2)$ b) $(1,2)$ c) $(2,-1)$

9. a) $(2,-5,-3)$ b) $(2,5,3)$ c) $(-2,-5,3)$

10. a) $(2,0)$ b) $(0,-5)$ **11.** a) $(-2,1,0)$ b) $(-2,0,3)$ c) $(0,1,3)$

12. a) $\left(\frac{3\sqrt{3}+4}{2}, \frac{3-4\sqrt{3}}{2}\right)$ b) $\left(\frac{3-4\sqrt{3}}{2}, \frac{-3\sqrt{3}-4}{2}\right)$

c) $\left(\frac{7\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$ d) $(4,3)$

13. a) $\left(-2, \frac{\sqrt{3}-2}{2}, \frac{1+2\sqrt{3}}{2}\right)$ b) $(0,1,2\sqrt{2})$ c) $(-1,-2,2)$

14. a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

15. a) $\left(-2, \frac{\sqrt{3}+2}{2}, \frac{-1+2\sqrt{3}}{2}\right)$ b) $(-2\sqrt{2},1,0)$ c) $(1,2,2)$

W.

W1 Welche Sätze über Determinanten und LT kennen Sie?

W2 Hat die Matrix eine Inverse?

a) $\underline{B}^T \cdot \underline{B}$ b) $\underline{B} \cdot \underline{B}^T$

wobei $\underline{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

W3 Beschreiben Sie die durch folgende darstellende Matrizen gegebenen LT en geometrisch! (keine Rechnung!)

a) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

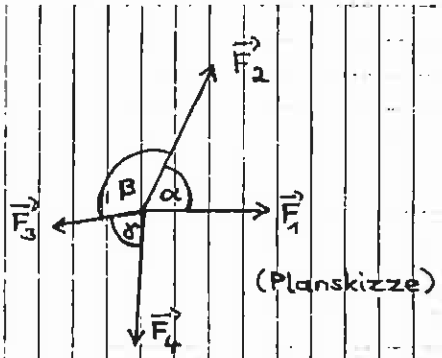
d) $\left(\underline{1}_3 - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1/10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

W4 a) Welche Bedingungen erfüllt die darstellende Matrise einer LOT, Spiegelung (an einer Ebene), Drehung?

b) Wie bestimmt man Orientierung $\underline{\alpha}_0$ und Drehwinkel α einer Drehung in 3D?

W5 .1 Ermitteln Sie die Resultierende
$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$
für $|\vec{F}_1| = 380\,N$, $|\vec{F}_2| = 400\,N$,
$|\vec{F}_3| = 300\,N$, $|\vec{F}_4| = 440\,N$
und $\alpha = 80°$, $\beta = 120°$, $\gamma = 70°$



(Planskizze)

a) zeichnerisch (im kKS!) !
b) rechnerisch !
[$|\vec{F}_R| \approx 224\,N$, $\delta \approx -41{,}6°$ (bez. $\vec{F}_1$)]

.2 Im Punkt A greifen drei Kräfte an:
$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} N$, $\vec{F}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} N$, $\vec{F}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} N$.

a) Berechnen Sie $\vec{F}_R$ und ihren Betrag! [$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} N$, $\sqrt{22}\,N$]

b) Wie groß sind die Winkel (– Beträge!), die $\vec{F}_R$ und $\vec{F}_i$ ($i \in \{1; 2; 3\}$) einschließen, kurz: Wie groß sind $\measuredangle(\vec{F}_R, \vec{F}_i)$?
[$\approx 20{,}82°$, $\approx 174{,}27°$, $\approx 63{,}19°$]

.3 Drei Einsvektoren, d.h. Einheitsvektoren $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ liegen in einer Ebene mit $\measuredangle(\vec{i}, \vec{j}) = 30°$, $\measuredangle(\vec{j}, \vec{k}) = 60°$, und sind im Uhrzeigersinn in alphabetischer Reihenfolge angeordnet.

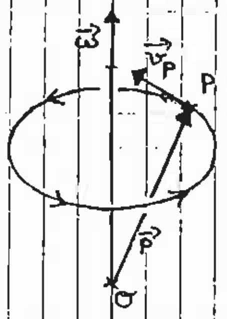
Zeichnen Sie $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ und $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ und berechnen Sie $\measuredangle(\vec{a}, \vec{i})$! [$\approx 36{,}2°$]

.4 Was folgt für die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aus den folgenden Aussagen (aussagenlogische Formeln!)?

a) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{o} \quad \wedge \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
b) $|\vec{a} \times \vec{b}| = \vec{a} \cdot \vec{b} \quad \wedge \quad \vec{a} \neq \vec{o} \quad \wedge \quad \vec{b} \neq \vec{o}$
c) $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \vec{b}^2 \quad \wedge \quad \vec{a} \neq \vec{o} \quad \wedge \quad \vec{b} \neq \vec{o}$

.5 Ein starrer Körper dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ um eine durch den Ursprung O gehende Drehachse.
P sei ein Punkt mit dem Ortsvektor $\vec{p}$.
Dann ist $\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{p}$

die Momentangeschwindigkeit von P.
(Tangentialgeschwindigkeit)



a) Berechnen Sie $\vec{v}_P$, $|\vec{v}_P|$, beschreiben Sie die Lage von $\vec{v}_P$ und $\vec{p}$ für $\vec{\omega} = \vec{e}_3 \cdot s^{-1}$ und $\vec{p} = (3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3) \cdot m$! [$(-4|3|0)^T \frac{m}{s}$, $5\frac{m}{s}$]

b) Bei der Drehung um die z-Achse mit $\omega > 0$ hat der Punkt P(1 m | 2 m | 1 m) eine Tangentialgeschwindigkeit vom Betrag
$|\vec{v}_P| = 5\ m \cdot s^{-1}$.
Ermitteln Sie ω und (die Koordinatendarstellung von) $\vec{v}_P$!
[$\sqrt{5}\ s^{-1}$, $\sqrt{5}\,(-2|1|0)^T \cdot m \cdot s^{-1}$]

Vgl. Hohloch-Kümmerer: „Brücken zur Mathematik", Cornelsen, Bd. 3, Abschn. 3 (+4)

W6 Lösen Sie das LGS

$$\begin{aligned} 5x + 2y + z &= 4 \\ -x + y + z &= 0 \\ -3x - 2y + 2z &= 7 \end{aligned}$$

a) mittels Cramer Regel !

b) per Gauß-Algorithmus !

c) durch Matrixinversion mithilfe der Adjunkten (Inversenformel !) !

W7 a) Wie muss x gewählt werden, damit die Determinante

$$\begin{vmatrix} \exp(-x) & 1 & -1 \\ 0 & 3\cdot\exp(x) & \exp(-x) \\ 0 & \exp(x) & \exp(-2x) \end{vmatrix}$$

den Wert Null annimmt ?

b) Für welche p-Werte ($\in \mathbb{R}$) ist das LGS $\underline{A}_p \cdot \underline{x} = \underline{b}_p$ mit

$$\underline{A}_p = \begin{pmatrix} 1 & 1 & p \\ 1 & p & 1 \\ p & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \underline{b}_p = \begin{pmatrix} 1 \\ p \\ p^2 \end{pmatrix}$$

lösbar, wann nicht ?

Bestimmen Sie jeweils die Lösung !

c) Vereinfachen Sie die folgende Determinante möglichst geschickt und so weit wie möglich :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & x & y \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Für welche x, y $\in \mathbb{R}$ ist sie Null ? (Bedingungen ?)

W8 Beantworten Sie für das LGS folgende Fragen :

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline 1 & 5 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 2 & 8 & 1 \\ -1 & 14 & 4 & -a^2 & a-1 \\ 9 & 7 & 14 & 22 & -1 \end{array}$$

a) Für welche a $\in \mathbb{R}$ ist es unlösbar?

b) Für welche a $\in \mathbb{R}$ existiert eine von einem frei wählbaren Parameter abhängige Lösung ? Wie lautet sie ?

c) Für welche a $\in \mathbb{R}$ ist es eindeutig lösbar ? Wie lautet in diesem Fall die eine Lösung ?

d) Geben Sie in b) einen Parameterwert so an (nicht a!), so dass alle Lösungskoordinaten ganzzahlig („whole numbers") sind !

W9 Gegeben sind die Punkte A(-1|0|2), B(1|1|-3), C(0|3|2), D(2|-1|4)

a) Geben Sie eine Gleichung für die Ebene (ABC) an !

b) Berechnen Sie alle Innenwinkel, Umfang und Flächeninhalt des Dreiecks ABC !

c) Berechnen Sie den Anteil $\overrightarrow{AD}_s$ von $\overrightarrow{AD}$ senkrecht zum Δ ABC !

d) Ist ABCD ein ebenes Viereck oder nicht ? Begründen Sie durch eine kurze Rechnung !

e) Berechnen Sie im Fall „ABCD ist ebenes Viereck" Umfang und Flächeninhalt, falls „ABCD ist Tetraeder" O und V !

W10

Jemand kauft 100 Stück Vieh: Schweine, Ziegen und Schafe für 100 Taler. Ein Schwein kostet $3\frac{1}{2}$ Taler, eine Ziege $1\frac{1}{3}$ Taler und ein Schaf $\frac{1}{2}$ Taler. Wie viele sind es von jeder Gattung? **(EULER)**

(Anleitung: Man löse das System zuerst für $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$ und sondere daraus die Lösungen $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{N}_0^3$ aus.)

W11

Roberts Markensammlung besteht aus drei Alben. Ein Fünftel seiner Marken sind in dem ersten Album, mehrere Siebtel im zweiten, und im dritten sind 303 Marken. Wie viele Marken hat Robert ? **(POLYA)**

W12

Ein Lehrling erhält den Auftrag, insgesamt 100 Briefmarken zu 30 Cent, 40 Cent und 50 Cent einzukaufen und dafür genau 40 Euro auszugeben. Auf wie viele Arten kann er diesen Auftrag erledigen, wenn jedesmal alle Sorten gekauft werden sollen?

W13

a) Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ eine Basis des } \mathbb{R}^3 \text{ bilden!}$$

b) Ermitteln Sie daraus eine orthogonale Basis $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$
per Ansatz:

$$\vec{b}_1 := \vec{a}_1 \wedge \vec{b}_2 := \vec{a}_2 - \vec{b}_1 r \wedge \vec{b}_3 := \vec{a}_3 - \vec{b}_1 s - \vec{b}_2 t \qquad (r,s \in \mathbb{R})$$

c) Können Sie auch, und zwar mithilfe von b), eine ONB angeben?

W14

Lösen Sie A24 (Rückstrahlerprinzip) für beliebige einfallende Lichtstrahlen $s: \vec{x} = \vec{a} + \vec{r}_0 \cdot c_0 \cdot t$ (in b) nur Outputrichtungsvektor $\vec{r}_0''' = ?$)!

K.

Berufsakademie Stuttgart . Staatliche Studienakademie

Ausbildungsbereich:	Technik
Fachrichtung:	Elektrotechnik
Studienjahrgang:	2006
Studienhalbjahr:	1

Klausur

Studienfach:	Mathematik
Dozent:	Baum, Kessler, Schmid
Datum:	09.02.2006
Bearbeitungszeit:	90 Minuten
Hilfsmittel:	1. Nicht graphikfähiger und nicht programmierbarer Taschenrechner mit einem Einzeilenausgabendisplay 2. Die verteilte Formelsammlung

Bitte Überprüfen Sie vor Beginn der Prüfung:

- ob Sie gesund und prüfungsfähig sind.
- ob Ihre Taschen und sämtliche Unterlagen, insbesondere alle nicht erlaubten Hilfsmittel seitlich an der Wand zum Gang und nicht in Ihrer Reichweite abgestellt sind.

Hinweise:

- Alle Aufgaben dürfen bearbeitet werden.
- Bitte verwenden Sie keinen Rotstift.
- Für die Lösung jeder Aufgabe verwenden Sie ein neues Blatt. Benutzen Sie das Papier nur einseitig.
- Schreiben Sie auf alle Lösungsblätter Ihren Namen.
- Bitte geben Sie Ihre Lösung für die Aufgaben jedes Dozenten getrennt ab.

Viel Erfolg

Lösung zu ..

(W6) $\underline{x} = \underline{A}^{-1}\begin{pmatrix}4\\0\\7\end{pmatrix} = \frac{1}{23}\begin{pmatrix}4 & -6 & 1\\ -1 & 13 & -6\\ 5 & 4 & 7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\0\\7\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}}}$

(W7) a) $x = \ln(3) \approx 1{,}0986$

b) $\mathbb{L}: \begin{cases}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\underline{x} = 1 & \text{für } p = 1\\ = \{\} & \text{für } p = -2\\ \frac{1}{p+2}\begin{pmatrix}(p+1)^2\\1\\-(p+1)\end{pmatrix} & \text{für } p \in \mathbb{R}\setminus\{-2;1\}\end{cases}$

c) $\mathbb{L} = \{\} \subseteq \mathbb{R}^2$

(W8) a) unlösbar für $a = 2$ b) für $a = -2$: $\underline{x} = \begin{pmatrix}-5\\0\\0\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-48\\2\\0\\19\end{pmatrix}\cdot s$

c) $\underline{x} = \begin{pmatrix}a+46\\6-4a\\0\\-19\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{19\cdot(a-2)}$ für $a \in \mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$ d) $\begin{pmatrix}-5\\0\\0\\2\end{pmatrix}$ für $s=0$ $(a=-2)$

(W9) a) $\vec{AB}\times\vec{AC} = \begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}\cdot 5 \Rightarrow (ABC): \begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}\bullet\vec{x} + 1 = 0$

b) $\alpha = \arccos\left(\frac{\vec{AB}\bullet\vec{AC}}{|\vec{AB}|\cdot|\vec{AC}|}\right) = \arccos\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right) \approx \underline{\underline{73{,}22^\circ}}$
$= \gamma$ (!)

und $\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma = 180^\circ - 2\alpha \approx \underline{\underline{33{,}56^\circ}}$

$u = |\vec{AB}| + |\vec{BC}| + |\vec{CA}| = 2\sqrt{30} + \sqrt{10} \approx \underline{\underline{14{,}12}}$

$F_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot|\vec{AB}\times\vec{AC}| = \underline{\underline{5\sqrt{11}/2 \approx 8{,}29}}$

c) $\vec{AD}_s = \vec{n}_0\cdot(\vec{n}_0\bullet\vec{AD})$ mit $\vec{n}_0 = \begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{11}}$

$= \underline{\underline{\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}\cdot\frac{12}{11}}}$

d) $(\vec{AB}\times\vec{AC})\bullet\vec{AD} = 60 \neq 0 \Rightarrow$ ABCD ist <u>kein</u> ebenes Viereck!

e) ABCD ist Tetraeder mit $V = \frac{1}{6}|(\vec{AB}\times\vec{AC})\bullet\vec{AD}| = \underline{\underline{10}}$

und $O = \frac{1}{2}\cdot(|\vec{AB}\times\vec{AC}| + |\vec{AB}\times\vec{AD}| + |\vec{BC}\times\vec{BD}| + |\vec{AC}\times\vec{AD}|)$

$= \frac{1}{2}\cdot(5\sqrt{11} + \sqrt{395} + 12\sqrt{5} + 2\sqrt{35}) \approx \underline{\underline{37{,}56}}$

(W10) $\mathbb{L} = \{(0|60|40); (5|42|53); (10|24|66); (15|6|79)\}$
Sc Z S

(W11) $\underline{\underline{3535}}$

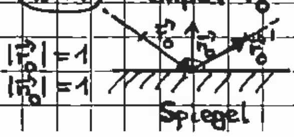
(W12) $\mathbb{L} = \{(n|100-2n|n) \mid n \in [1;49] \cap \mathbb{N}\}$
30Ct 40Ct 50Ct

(W13) a) $(\vec{a}_1\times\vec{a}_2)\bullet\vec{a}_3 = \det(\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3) = 5 \neq 0 \overset{\text{l.u}}{\underset{\text{in 3D}}{\Longrightarrow}}$ Basis von $(\mathbb{R}^{3\times 1}, +, \cdot)$!

b) OGB $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}10\\-7\\2\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{9}; \begin{pmatrix}2\\2\\-3\end{pmatrix}\cdot\frac{5}{17}\right\}$

c) ONB $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\frac{1}{3}; \begin{pmatrix}10\\-7\\2\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{3\sqrt{17}}; \begin{pmatrix}2\\2\\-3\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{17}}\right\}$

(W14) Input $\vec{r}_0$ gespiegelt an $E: \vec{n}_0\bullet\vec{x} = 0$ ... a) ... ergibt $\vec{r}_0\,' = (1_3 - 2\vec{n}_0\vec{n}_0^T)\cdot\vec{r}_0$



b) ... hintereinander an allen drei Koordinatenebenen:
$\vec{r}_0\,''' = (1_3 - 2\vec{e}_m e_m^T)(1_3 - 2\vec{e}_\ell\vec{e}_\ell^T)(1 - 2\vec{e}_k\vec{e}_k^T)\vec{r}_0 \overset{..}{=} -\vec{r}_0$!

BERUFSAKADEMIE
STUTTGART
University of Cooperative Education

Mathematik I
Klausur

Dipl.-Math. M. Baum, Febr. 07

Fachrichtung
Elektrotechnik

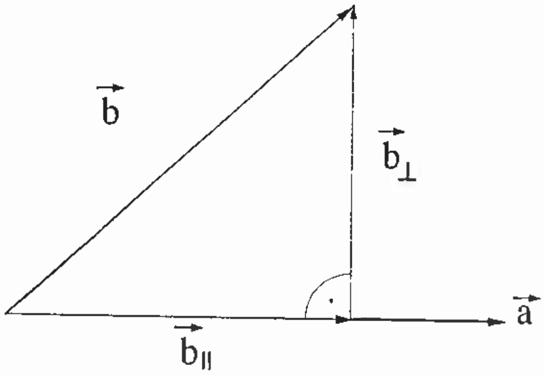
Aufgabe 1 – M. Baum (17 Minuten, max. 17 Punkte)

a) **(4P)** Gegeben seien die beiden Vektoren $\vec{a},\vec{b}\in\mathbb{R}^{3\times 1}$ mit $\vec{a}\neq\vec{0}$ und $|\vec{b}|=\sqrt{2}$.
Welche Winkel $0\leq\varphi\leq\pi$ können die beiden Vektoren miteinander einschließen, damit der Vektor $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ dieselbe Länge hat wie der Vektor $\vec{a}$?

b) **(4P)** Gegeben ist der Vektor $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$.

Von einem Vektor $\vec{b}$ ist die Normalkomponente $\vec{b}_\perp:=\vec{b}-\vec{b}_\parallel=\begin{pmatrix}-3\\1\\1{,}5\end{pmatrix}$ bezüglich $\vec{a}$ bekannt.

(Zerlegung des Vektors $\vec{b}$ in die Parallelkomponente $\vec{b}_\parallel$ und Normalkomponente $\vec{b}_\perp$ bzgl. $\vec{a}$ (siehe Skizze)).
Für das Skalarprodukt der beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gelte $\vec{a}\cdot\vec{b}=10$.
Berechnen Sie die Vektoren $\vec{s}=\vec{a}+\vec{b}$ und $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}$.



c) **(4P)** Gegeben seien die drei Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ und $\vec{c}=\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}$.

Stellen Sie $\vec{a}$ als Linearkombination aus $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dar.

d) **(5P)** Berechnen Sie den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{p}$ und $\vec{q}$, wenn $\vec{a}=2\vec{p}+\vec{q}$ und $\vec{b}=-4\vec{p}+5\vec{q}$ senkrecht sind und $|\vec{p}|=|\vec{q}|$ gilt.

Aufgabe 2 – M. Baum (13 Minuten, max. 13 Punkte)

Gegeben seien die drei linearen Transformationen $f_i : \mathbb{R}^{3x1} \to \mathbb{R}^{3x1}$ (i = 1, 2, 3). f_1 sei eine Drehung von 45^0 um die x-Achse, f_2 sei eine Drehung von 90^0 um die y- Achse und f_3 eine Drehung von 120^0 um die z-Achse.

a) **(3P)** Ermitteln Sie die Drehmatritzen $[f_3], [f_2]$ und $[f_1]$ der Abbildungen f_3, f_2 und f_1 (mit Angabe exakter Werte !).

b) **(3P)** Bestimmen Sie die darstellende Matrix $[f_3 \circ f_2 \circ f_1]$ der Verkettung $f_3 \circ f_2 \circ f_1$ (mit Angabe exakter Werte !).

c) **(7P)** Welche Eigenschaften hat die verkettete Funktion $f_3 \circ f_2 \circ f_1$?

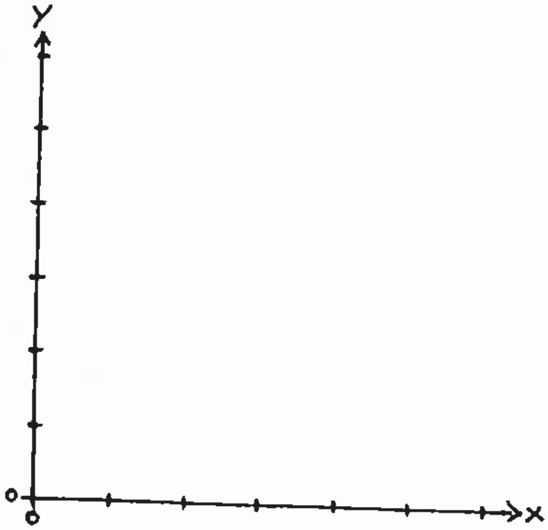
Klausur Teil : Kessler 30 min (30 VP)

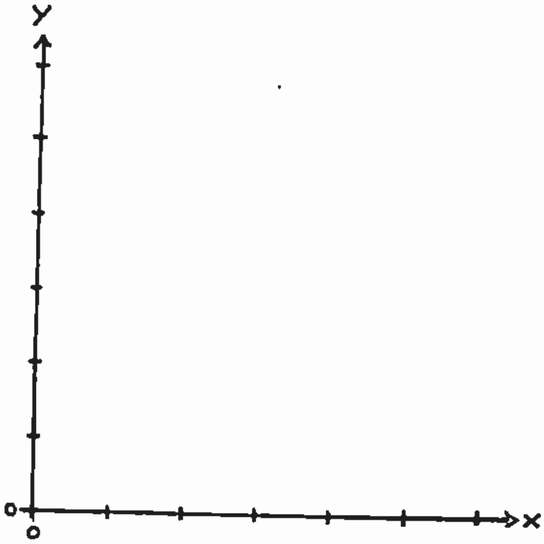
K1 Gegeben ist die Grundmenge $\mathbb{G} = \mathbb{R}^{1\times 2}$.
$\mathbb{D}$ soll dann die Definitionsmenge des Terms $\frac{x_1 \cdot x_2}{x_1 + x_2}$ sein.
Ergänzen Sie nun sinnvoll !

$\mathbb{D} = \boxed{\{(x_1|x_2) \in \mathbb{R}^{1\times 2} | \qquad\qquad \}}$ und

$\mathbb{G} \setminus \mathbb{D} = \boxed{\qquad\qquad\qquad}$! (2 VP)

K2 Gegeben ist $f(x) = 3 - 2 \cdot \cos(x)$; $x \in [0;\pi]$.
Skizzieren Sie f und f^{-1} in zwei verschiedenen, geeignet skalierten Koordinatensystemen !
Dabei sind jeweils 5 Punkte von f bzw. f^{-1} exakt anzugeben und einzuzeichnen !





$P_1(\ | \ ), P_2(\ | \ ), P_3(\ | \ ),$
$P_4(\ | \ ), P_5(\ | \ )$

$Q_1(\ | \ ), Q_2(\ | \ ), Q_3(\ | \ ),$
$Q_4(\ | \ ), Q_5(\ | \ )$

(7 VP)

K3 Gegeben ist f durch $f(x) = \tan(x) \wedge x \in [0;\pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$.
Ist f^{-1} eine Funktion ? Begründung !

(2VP)

Schmid

Aufgabe

(a) (10 p) Begründen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen. Die Angabe von 'ja' oder 'nein' ohne Begründung ergibt keine Punkte (je 2 P). In dieser Aufgabe ist A immer eine $n \times n$ Matrix mit den Koeffizienten $a_{ij}, i, j = 1..n$:

(1) Sei A eine obere Dreiecksmatrix, das heißt $a_{ij} = 0$ für $i > j$, dann ist A invertierbar.

(2) A ist invertierbar $\Rightarrow A^2$ ist invertierbar.

(3) Das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{x}$ ist immer lösbar.

(4) Sei A invertierbar, dann gilt: $A\vec{x} = A\vec{y} \;\Rightarrow\; \vec{x} = \vec{y}$.

(5) Sei B eine $n \times m$ Matrix mit $n \neq m$, dann ist es möglich, dass das lineare Gleichungssystem genau eine Lösung hat.

(b) (2 P) Gegeben sei die Matrix $B = (2/0/3) \in \mathbb{R}^{1\times 3}$. Berechnen Sie $B^T \cdot B$.

(c) (2 P) Gegeben sei die Matrix $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Geben Sie eine Formel für C^n an (ohne Beweis).

(d)

$$\text{Sei} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Geben Sie die allgemeine Lösung für das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{0}$ an (4 P). Welche Eigenschaften muss $\vec{b}$ erfüllen, damit das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ lösbar ist (1 P)?

(e)

$$\text{Sei} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie $\det(A)$ (3 P) und $\det(A^{-1})$ (1 P). Sei $B = A^{-1}$ mit den Koeffizienten b_{ij}. Bestimmen Sie b_{23} (3 P).

(f) (4 P) Seien A, B, X $n \times n$ Matrizen. Lösen Sie folgende Gleichung nach X auf:

$$3X^T + (B \cdot X)^T = X^T \cdot A^{-1}.$$

Vorausgesetzt sei, dass die dabei entstehenden inversen Matrizen immer existieren.

Bei allen Lösungen wird eine Begründung erwartet - nur richtige (oder falsche) Ergebnisse sind wertlos. Eine Begründung kann z.B. die Angabe einer Formel sein, die in der Vorlesung bewiesen (und in der Aufgabe nicht ausgeschlossen) wurde. Sinnvolle nicht zu Ende geführte Ansätze können bepunktet werden. Streichen Sie eine Lösung erst dann durch, wenn Sie dafür Ersatz haben. Wenn Sie nicht weiter kommen: Wechseln Sie die Aufgabe. Für jeden Punkt haben Sie rund 1 Minute Zeit.

K4 Bestimmen Sie einen Term für eine ganzrationale Funktion möglichst niedrigen Grades, welche die Punkte $P(-3|13)$, $Q(-1|-1)$, $R(1|81)$ enthält!

(6 VP)

K5 Gegeben ist die ganzrationale Funktion f mit dem Term $f(x) = 3x^4+17x^3+33x^2+24x+4$ (Normalform). Ermitteln Sie nun nur mittels Horner Schema die Werte $f(-2)$, $f'(-2)$ und $f''(-2)$!

Bestimmen Sie dann alle reellen Nullstellen von f ohne Verwendung gerundeter Werte (exakte Angabe!)!

(8 VP)

K6 Jemand fragt Sie, ob nach Definition $x_1 \| x_2 := \frac{x_1 \cdot x_2}{x_1 + x_2}$ für alle $x_1 > 0$ und alle $x_2 > 0$ stets gilt:

$$x_1 \| (x_2 + x_3) = (x_1 \| x_2) + (x_1 \| x_3) \qquad ?$$

Antworten Sie ihm mit schlüssiger Begründung, also mit einem allgemeinen Beweis oder per Gegenbeispiel!

(5 VP)

1 Grundlegendes

Potenzen

$$\begin{aligned} a^0 &= 1 \\ a^{-n} &= \frac{1}{a^n} \\ a^m \cdot a^n &= a^{m+n} \\ \frac{a^m}{a^n} &= a^{m-n} \\ a^n \cdot b^n &= (a \cdot b)^n \end{aligned}$$

Wurzeln (a,b ≥ 0)

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{a} &= b \Longleftrightarrow b^n = a \\ a^{\frac{1}{n}} &= \sqrt[n]{a} \\ \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a} &= \sqrt[m \cdot n]{a^{m+n}} \\ \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} &= \sqrt[n]{a \cdot b} \\ \sqrt[n]{a^m} &= (\sqrt[n]{a})^m \\ \sqrt[n]{a^m} &= \sqrt[nk]{a^{mk}} \end{aligned}$$

Logarithmen (u,v,a,b > 0)

$$\begin{aligned} \log_a b &= c \Longleftrightarrow a^c = b \\ a^{\log_a b} &= b \\ \log_a(u \cdot v) &= \log_a u + \log_a v \\ \log_a(\frac{u}{v}) &= \log_a u - \log_a v \\ \log_a u^r &= r \log_a u \\ log_a b &= \frac{\ln b}{\ln a} = \frac{\lg b}{\lg a} \end{aligned}$$

Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \quad (1) \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \quad (2) \\ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha &= 1 \quad (3) \end{aligned}$$

Kosinussatz

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma \tag{5}$$

Mitternachtsformel

$$\begin{gathered} a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 \\ x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{gathered} \tag{4}$$

Sinussatz

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c} \tag{6}$$

2 Vektoren

Lineare Unabhängigkeit

$$\begin{aligned} s_1\vec{u}_1 + s_2\vec{u}_2 + \ldots + s_n\vec{u}_n &= \vec{0} \quad (7) \\ \Longleftrightarrow \quad \text{für alle i gilt:} \; s_i &= 0 \end{aligned}$$

Einheitsvektoren der Länge 1

(Betrag!)

$$\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \quad \text{für } |\vec{a}| > 0 \tag{8}$$

Vektor der Länge $\lambda = |\vec{a}| > 0$

(Betrag!)

$$\vec{a} = \lambda \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \vec{a} \cdot \frac{\lambda}{|\vec{a}|} \tag{9}$$

Skalarprodukt (ein Euklidisches ~)

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \tag{14}$$

Senkrechte Projektion

$$\begin{aligned} \vec{a_{||}} &= \vec{b} \cdot \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \quad (16) \\ \vec{a_\perp} &= \vec{a} - \vec{a}_{||} \quad (17) \end{aligned}$$

Vektor aus Punkten

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{0Q} - \overrightarrow{0P} \quad (10) \\ |\overrightarrow{PQ}| &= \sqrt{(x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2 \ldots} \quad (11) \end{aligned}$$

Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \cdot |\vec{a}| \quad (12) \\ \vec{a} &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix} \cdot |\vec{a}| \quad (13) \\ \cos\alpha &= \frac{a_1}{|\vec{a}|} \ldots \end{aligned}$$

Vektorprodukt

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \tag{15}$$

Länge von Vektoren

$$\begin{aligned} |\vec{a}| &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \quad (18) \\ &= \sqrt{\vec{a} \bullet \vec{a}} \quad (18') \end{aligned}$$

Geradendarstellung

$$\vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{r} \qquad (19)$$

$$\vec{r} \times (\vec{x} - \vec{p}) = \vec{0} \qquad (20)$$

Kugeldarstellung

$$(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2 = r^2 \qquad (24)$$

$$\Leftrightarrow \quad |\vec{x}|^2 - 2\vec{m} \bullet \vec{x} + \vec{m} \bullet \vec{m} = r^2 \qquad (24')$$

Winkelberechnung

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \qquad (27)$$

$$\sin\alpha = \frac{det(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|} \qquad (28)$$

Ebenendarstellung

$$\vec{x} = \vec{p} + t_1 \cdot \vec{r} + t_2 \cdot \vec{s} \qquad (21)$$

$$(\vec{x} - \vec{p}) \bullet \vec{n} = 0 \qquad (22)$$

$$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = e \qquad (23)$$

Hessesche Normalenform $(\vec{x} - \vec{p}) \bullet \vec{n}_0 = 0$ (22')

$$\Rightarrow d(X,\mathcal{E}) = |(X - P) \cdot \vec{n}_0| \qquad (25)$$

$$= \left| \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 - e}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} \right| \qquad (26)$$

Winkel zwischen Geraden, Ebenen

$$\delta(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = \arccos\left(\frac{|\vec{n}_1 \bullet \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}\right) \qquad (29)$$

$$\delta(\mathcal{E}, g) = 90° - \arccos\left(\frac{|\vec{n} \bullet \vec{r}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{r}|}\right) \qquad (30)$$

$$\delta(g_1, g_2) = \arccos\left(\frac{|\vec{r}_1 \bullet \vec{r}_2|}{|\vec{r}_1| \cdot |\vec{r}_2|}\right) \qquad (3$$

Abstände

Gerade-Punkt $(P \in g)$

$$d(Q,g) = \frac{|\vec{r} \times (\vec{q} - \vec{p})|}{|\vec{r}|}$$

Ebene-Punkt $(P \in \mathcal{E}\text{(bene)})$

$$d(Q,\mathcal{E}) = \frac{|\vec{n} \bullet (\vec{q} - \vec{p})|}{|\vec{n}|}$$

Windschiefe Geraden $(P_i \in g_i)$

$$d(g_1, g_2) = \frac{|(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2) \bullet (\vec{p}_1 - \vec{p}_2)|}{|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2|}$$

Spiegelung Allgemein

$$\vec{p}\,' = \vec{p} + 2\overrightarrow{PS} \qquad (\text{... an } S) \qquad (32)$$

Spatprodukt $[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\,] = (\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{c} = det(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})$ (3reihige Determinante)

Spatvolumen $V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{c}| = |(\vec{c} \times \vec{a}) \bullet \vec{b}| = |(\vec{b} \times \vec{c}) \bullet \vec{a}|$ (33)

Cramer Regel (in $\mathbb{R}^{3\times1}$)

$$\vec{d} = \vec{a} \cdot x_1 + \vec{b} \cdot x_2 + \vec{c} \cdot x_3$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\vec{d}\ \vec{b}\ \vec{c}\,] \\ [\vec{a}\ \vec{d}\ \vec{c}\,] \\ [\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{d}\,] \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\,]} \qquad (34)$$

nur für $[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\,] = (\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{c} \neq 0$ gültig !
($\{\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}\}$ linear unabhängig !)

3 Matrizen

Falkschema

·	B
A	A · B
C	C·A·B

Multiplikation von Matrizen

$$A_{m\times n}\cdot B_{n\times q} = C_{m\times q} \quad (35)$$

$$A\cdot B \neq B\cdot A \quad (36)$$

$$A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = E \quad (37)$$

Rechenregeln

$$A\cdot A = A^2 \quad (38)$$

$$(A\cdot B)^T = B^T\cdot A^T \quad (39)$$

$$(A^T)^T = A \quad (40)$$

$$(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1} \quad (41)$$

Inverse Matrizen

2x2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ regulär } \Longleftrightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad \text{existiert} \quad (42)$$

3x3 mit $A = (\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})$ regulär bzw. invertierbar

$$\Longleftrightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{det(A)}\begin{pmatrix} [\vec{e}_1\vec{b}\,\vec{c}] & [\vec{e}_2\vec{b}\,\vec{c}] & [\vec{e}_3\vec{b}\,\vec{c}] \\ [\vec{a}\,\vec{e}_1\vec{c}] & [\vec{a}\,\vec{e}_2\vec{c}] & [\vec{a}\,\vec{e}_3\vec{c}] \\ [\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{e}_1] & [\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{e}_2] & [\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{e}_3] \end{pmatrix} \quad (43)$$

4 determinanten

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \quad \text{für } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}. \quad (44)$$

$$3\times 3: \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - c_1b_2a_3 - c_2b_3a_1 - c_3b_1a_2 \quad (45)$$

$$= (b_1c_2 - c_1b_2)\cdot a_3 - (a_1c_2 - c_1a_2)\cdot b_3 + (a_1b_2 - b_1a_2)\cdot c_3 \quad (45')$$

oder <u>nach Skript</u> rekursiv <u>allgemein</u> :

$$\det(a_{11}) := a_{11} \quad \wedge \quad \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \underbrace{(-1)^{1+2}\cdot\det(a_{21})}_{\substack{\text{algebraisches} \\ \text{Komplement} \\ \text{zu } a_{12}\text{, kurz } A_{12} \\ \text{(nur ein Name!)}}}\cdot a_{12} + (-1)^{2+2}\cdot\det(a_{11})\cdot a_{22} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\wedge \quad \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{3}\underbrace{(-1)^{i+3}\cdot\det(S_{i3})}_{\substack{\text{kann man auch} \\ A_{i3}\text{ nennen !}}}\cdot a_{i3}$$

$$\overset{!}{=} \underbrace{\left[\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}\right]\bullet\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}}_{\text{Spatprodukt}}$$

mit S_{ik} = Matrix A <u>ohne</u> i. Zeile und <u>ohne</u> k. Spalte. Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ analog:

$$\det(A) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} A_{in}\cdot a_{in}}_{\substack{\text{nach n. Spalte} \\ \text{entwickelt}}} \overset{!}{=} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} A_{ik}\cdot a_{ik}}_{\substack{\text{nach k. Spalte} \\ (1\leq k\leq n)}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} A_{li}\cdot a_{li}}_{\substack{\text{nach l. Zeile} \\ (1\leq l\leq n)}}$$

Determinantenregeln $(\underline{A}, \underline{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}, r \in \mathbb{R})$

$$\det(\underline{A}\cdot\underline{B}) = \det(\underline{A})\cdot\det(\underline{B}) \quad (46)$$

$$\det(\underline{A}^{-1}) = (\det(\underline{A}))^{-1} \quad (47)$$

$$\det(\underline{A}) = \det(\underline{A}^T) \quad (48)$$

$$\det(r\underline{A}) = r^n \det(\underline{A}) \quad (49)$$

$$\det(\underline{A}) \neq 0 \Leftrightarrow \underline{A} \text{ ist regulär} \Leftrightarrow \underline{A}^{-1} \text{ existiert} \Leftrightarrow \underline{A} \text{ ist invertierbar} \quad ! \quad \underline{(50)}$$

5 Lineare Transformation

... ist eine Funktion $f \subseteq \mathcal{V}_x \times \mathcal{V}_y$ mit Vektorräumen $(\mathcal{V}_x, +, \cdot)$, $(\mathcal{V}_y, +, \cdot)$ und Linearität

$$\boxed{f(\vec{u} + \vec{v}\cdot s) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})\cdot s} \quad \underline{(51)}$$

... bei $\mathcal{V}_x = \mathbb{R}^{m\times 1}, \mathcal{V}_y = \mathbb{R}^{n\times 1}$:

$$\Longleftrightarrow f(\vec{x}) = [f]\cdot\vec{x} \text{ mit } [f] \in \mathbb{R}^{n\times m}$$

LOT - Lineare Orthogonale Transformation (Spezialfall $m = n$, $[f] = \underline{M} \in \mathbb{R}^{n\times n}$)

$$\boxed{\underline{M}\cdot\underline{M}^T = \underline{E} = \mathbb{1}_n}, \text{ d.h. } \underline{M}^T = \underline{M}^{-1}, \text{ für } \underline{M} = [f] \overset{\text{z.B.}}{=} (\vec{a}_1|\vec{a}_2|\vec{a}_3) \in \mathbb{R}^{3\times 3}:$$

$$\vec{a}_1 \bullet \vec{a}_2 = 0 \quad (52) \qquad |\vec{a}_1| = 1 \quad (55) \qquad |\det(\underline{M})| = 1 \quad (58)$$

$$\vec{a}_1 \bullet \vec{a}_3 = 0 \quad (53) \qquad |\vec{a}_2| = 1 \quad (56) \qquad \boxed{\underline{M}\cdot\underline{M}^T = \underline{E}} \quad \underline{(59)} \text{ (reicht !)}$$

$$\vec{a}_2 \bullet \vec{a}_3 = 0 \quad (54) \qquad |\vec{a}_3| = 1 \quad (57) \qquad \underline{M}^T = \underline{M}^{-1} \quad (60)$$

Spiegelung: **An der Ebene mit** σ und Einheitsnormalenvektor $\vec{n}_0$

$$\underline{(61)} \quad \boxed{f(\vec{x}) = (\underline{E} - 2\vec{n}_0\cdot\vec{n}_0^T)\cdot\vec{x}}$$

$\underline{M}\cdot\underline{M}^T = \mathbb{1}_3 \Longleftrightarrow$ LOT (!)

$\det(\underline{M}) = 1 \rightarrow$ Drehung

$\det(\underline{M}) = -1 \rightarrow$ Spiegelung

Drehung: **mit Orientierung** $\vec{\alpha}_0$ **und Winkel** $\alpha \in [0;\pi]$

$$\boxed{\begin{aligned} f(\vec{x}) &= (\vec{\alpha}_0\cdot\vec{\alpha}_0^T + \cos(\alpha)(\underline{E} - \vec{\alpha}_0\cdot\vec{\alpha}_0^T) + \sin(\alpha)\vec{\alpha}_0\times)\vec{x} \\ \alpha &= \arccos\left(\frac{\vec{s}\bullet f(\vec{s})}{|\vec{s}||\vec{s}|}\right) \text{ mit: } \vec{s}\perp\vec{\alpha}_0 \\ \vec{\alpha}_0 &= \vec{s}\times f(\vec{s})\cdot|\vec{s}\times f(\vec{s})|^{-1} \end{aligned}} \quad \underline{(62)}$$

Drehung um die Achsen (x-, y-, z-Achse): $\varphi \lesseqgtr 0°$ linkshändig / rechtshändig

$$\underline{D}_x(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}, \underline{D}_y(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{pmatrix}, \underline{D}_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6 Funktionen

Newtonsches Tangenten Verfahren
(Nullstellennäherung : $x_n \longrightarrow$ Nst. $(n\to\infty)$)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (63)$$

Newton Interpolation (mit Stützstellen x_i einer Tabelle)

$$g(x) = c_0 + c_1(x - x_1) + ... + c_{n-1}(x - x_{n-1})...(x - x_1) \quad (64)$$

Taylorentwicklung ... einer ganzrationalen Funktion g (maximal) n. Grades um $A(a|g(a))$:
(z.B. per Horner Schema!)

$$g(x) = g(a) + g'(a)\cdot(x-a) + ... + \frac{g^{(n)}(a)}{n!}\cdot(x-a)^n \quad (65)$$

Exponentielle Änderung

$$f(t) = a\cdot e^{kt}$$

$$f'(t) = k\cdot f(t)$$

Beschränkte Änderung

$$f(t) = S - (S-a)\cdot e^{-kt}$$

$$f'(t) = k\cdot(S - f(t))$$

Logistische Änderung

$$f(t) = \frac{aS}{a + (S-a)\cdot e^{-Skt}}$$

$$f'(t) = k\cdot f(t)\cdot(S - f(t))$$

mit Halbwertszeit $T_{1/2}$:

$$k = -\frac{\ln(2)}{T_{1/2}} < 0 \quad \text{(exp. Zerfall)}$$

mit Verdopplungszeit T_2: $k = \frac{\ln(2)}{T_2} > 0$ (exp. Wachstum)