RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG

Hyperbelfunktionen

Simone kopp

Ausarbeitung zum Vortrag im *Proseminar Analysis*
(Wintersemester 2008/09, Leitung PD Dr. Gudrun Thäter)

Zusammenfassung: Die Hyperbelfunktionen sind Funktionen, die von ihrer Namensgebung und von ihren charakteristischen Eigenschaften her auf Verwandtschaft mit den trigonometrischen Funktionen schließen lassen. Wie wir von den trigonometrischen Funktionen wissen, lassen diese sich am Einheitskreis geometrisch herleiten. Gleiches geschieht bei den Hyperbelfunktionen an der Einheitshyperbel. Zudem gibt es viele weitere ähnliche Eigenschaften, wie beispielsweise bei den Differentiationsregeln. Die Nähe der Verwandtschaft erschließt sich erst richtig bei der Betrachtung der Funktionen über den komplexen Zahlen.

Aber nicht nur allein dieser Zusammenhang zu den trigonometrischen Funktionen macht die Hyperbelfunktionen so interessant, sondern der Kosinus Hyperbolicus beschreibt durch seine Gleichung die Funktion der Kettenlinie, welche wir in unserer Umwelt häufig finden. Vor allem im Gebiet der Konstruktion von Hochspannungsleitungen, Brücken oder von antiken Tempelsäulen kann man dies sehen, aber auch in der Natur in Form von Spinnweben.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

1 Einleitung

Inwiefern können für uns Menschen Hyperbelfunktionen interessant sein? Helfen uns Hyperbelfunktionen um etwas Bestimmtes zu berechnen?

Ja, das tun sie. Hyperbelfunktionen kommen in den verschiedensten Bereichen unserer Umwelt vor. Sie werden nicht nur von uns Menschen dazu benötigt um diverse Kräfte auszurechnen, sondern auch in der Tierwelt kommen Hyperbelfunktionen vor. Wenn die Spinne beispielsweise ein symmetrisches Spinnennetz (siehe Abbildung 1.1) baut, bilden die diversen Bögen zwischen den Fäden eine Kosinus Hyperbolicus Form.

Abbildung 1.1 – Spinnennetz

Des Weiteren werden Hyperbelfunktionen auch dafür benutzt, um die Kraft zu messen, die auf eine Hochspannungsleitung wirkt und man benötigt Hyperbelfunktionen für die Konstruktion von Brücken und Brückenpfeilern. Die Seilkonstruktion der Golden Gate Bridge beispielsweise bildet, wie in der Abbildung 1.2 zu sehen, die sogenannten Kettenlinie.

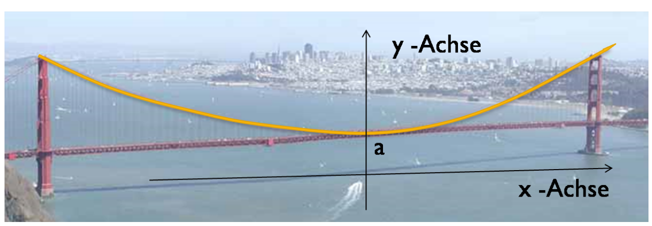

Abbildung 1.2 – Golden Gate Bridge

Zudem wurden auch in der Antike schon griechische Säulen in Form einer Hyperbolicus Kurve gebaut. Hierbei geht man aber davon aus, dass es nicht beabsichtigt war eine mathematische Funktion dafür auszuwählen, sondern eher weil die Form der Säulen hübsch aussah.

Definition 1.1: Die *Kettenlinie*(auch Seilkurve genannt) beschreibt die Kurve eines homogenen Seils ohne Biegesteifigkeit, welches nur aufgrund der Eigenlast durchhängt. Sie wird durch eine Hyperbelfunktion beschrieben, nämlich durch

$$f(x) := \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{\frac{-x}{a}})$$

mit folgender Ableitung

$$f(x)' := \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} - e^{\frac{-x}{a}})$$

wobei a eine positive Konstante ist, die die Steigung und den y-Achsenabschnitt beeinflusst.

2 Hyperbelfunktionen

Wie zuvor schon angedeutet, hat die Kettenlinie etwas mit unseren Hyperbelfunktionen zu tun. Genauer gesagt beschreibt die Kettenlinie die sogenannte Kosinus Hyperbolicus Form.

In meiner Arbeit gehe ich auf die Hyperbelfunktionen Kosinus Hyperbolicus (cosh), Sinus Hyperbolicus (sinh), Tangens Hyperbolicus (tanh), Cotangens Hyperbolicus (coth) näher ein.

Im folgenden Abschnitt möchte ich die Hyperbelfunktionen mit Hilfe der Exponentialfunktion herleiten und dies anschaulich darstellen.

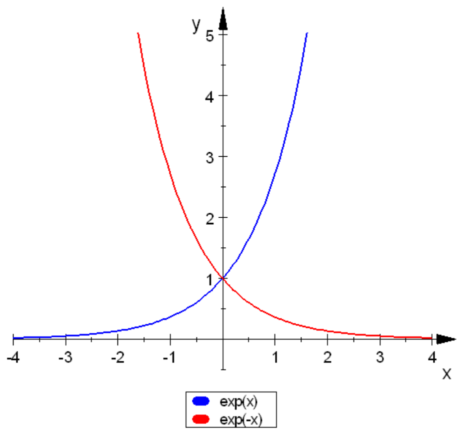

Abbildung 2.1 – Exponentialfunktion

2.1 Kosinus Hyperbolicus

Definition 2.1

$$\cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ für alle } x \in R$$

Es ist schnell festzustellen, dass der *Kosinus Hyperbolicus* eine gerade Funktion ist. Dies bedeutet $f(x) = f(-x)$. Die Funktion besitzt bei (0/-1) einen Tiefpunkt. Daraus folgt, dass der Wertebereich von $1 \leq f(x) < +\infty$ geht und der Definitionsbereich bei $-\infty < x < +\infty$ liegt. Cosh ist eine stetige Funktion. Wenn man sich die Formel der Kettenlinie noch einmal ins Gedächtnis ruft

$$f(x) := \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{\frac{-x}{a}})$$

stellt man fest, dass dies eine cosh- Funktion beschreibt. Setzt man die Konstante $a = 1$ ist dies die Gleichung von cosh. Gleiches bei der Ableitung der Kettenlinie

$$f(x)' := \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} - e^{\frac{-x}{a}}).$$

Diese ergibt für $a = 1$ den sinh.

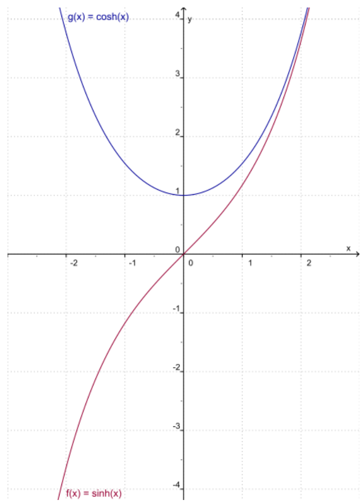

Abbildung 2.2 – sinh, cosh

2.2 Sinus Hyperbolicus

Definition 2.2 Daraus ergibt sich nun für den *Sinus Hyperbolicus* folgende Gleichung

$$\sinh(x) := \frac{e^x - e^{(-x)}}{2}$$

Hier bemerkt man schnell, dass der sinh eine ungerade Funktion ist, denn $f(x) = -f(-x)$. Der sinh ist ebenfalls wie der cosh eine stetige Funktion und besitzt am Punkt (0/0) einen Wendepunkt. Der Werte- und Definitionsbereich des sinh erstreckt sich über alle Zahlen. Auch den Sinus Hyperbolicus kann man sich gut anhand der Exponentialfunktion herleiten. Für die positiven x-Werte ähnelt der Graph stark der normalen $f(x) = e^x$ Funktion. Für die negativen x-Werte beschreibt der Graph die Funktion $f(x) = -e^{-x}$. Nun fügt man die beiden Funktionen zusammen und streckt sie wieder um $\frac{1}{2}$ und erhält nun den Sinus Hyperbolicus.

2.3 Tangens Hyperbolicus

Definition 2.3 Bei den trigonometrischen Funktion ist der Tangens der Quotient aus Sinus und Kosinus, dies ist beim *Tangens Hyperbolicus* genauso:

$$\tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Der tanh ist ebenfalls eine stetige Funktion mit einem Wertebereich von $-1 < f(x) < +1$ und einem Definitionsbereich von $-\infty < x < +\infty$.

2.4 Cotangens Hyperbolicus

Definition 2.4 Ebenso wie der Tangens Hyperbolicus wird auch der *Cotangens Hyperbolicus* aus seinem Äuivalent der trigonometrischen Funktionen definiert.

$$\coth(x) := \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \text{ für alle } x \neq 0$$

Der coth ist an der Stelle $x = 0$ nicht definiert, da er dort einen Pol hat. Somit erhalten wir für den Definitionsbereich von coth: $-\infty < x < +\infty;\ x \neq 0$ und den Wertebereich: $-\infty < f(x) < -1;\ 1 < f(x) < +\infty$

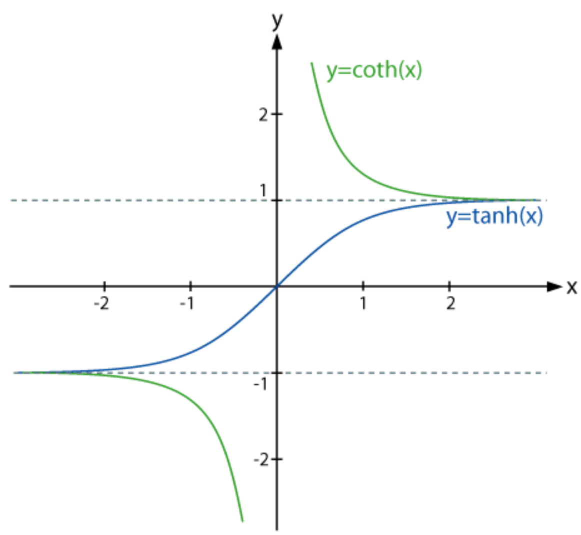

Abbildung 2.3 – tanh, coth

2.5 Ableitungen

$$\begin{aligned}(\cosh(x))' &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}\\ &= \frac{e^x}{2} + (-)\frac{e^{-x}}{2}\\ &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}\\ &= \sinh(x)\\ \Rightarrow (\cosh(x))' &= \sinh(x)\end{aligned}$$

Für die weiteren Ableitungen gilt:

$$(\sinh(x))' = \cosh(x)$$

$$(\tanh(x))' = \frac{1}{\cosh^2(x)}$$

$$(\coth(x))' = -\frac{1}{\sinh^2(x)}$$

Beim Kosinus- und Sinus Hyperbolicus kann man sich folgendes trivialerweise herleiten:

$$(\cosh(x))^{(n)} = \begin{cases} \sinh(x) \text{ für ungerades } n \\ \cosh(x) \text{ für gerades } n \end{cases}$$

$$(\sinh(x))^{(n)} = \begin{cases} \cosh(x) \text{ für ungerades } n \\ \sinh(x) \text{ für gerades } n \end{cases}$$

2.6 Zusammenhang zu trigonometrischen Funktionen

Die Hyperbelfunktionen heißen nicht ohne Grund Sinus, Kosinus, Tangens,usw Hyperbolicus. Sie weisen viele ähnliche Merkmale auf, die die trigonometrischen Sinus und Kosinus Funktionen auch besitzen.

Trigonometrische Funktionen	**Hyperbelfunktionen**
$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$	$\sinh^2(x) - \cosh^2(x) = 1$
Additionstheoreme:	
$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha)$	$\sinh(\alpha+\beta) = \sinh(\alpha)\cosh(\beta) + \sinh(\beta)\cosh(\alpha)$
$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$	$\cosh(\alpha+\beta) = \cosh(\alpha)\cosh(\beta) + \sinh(\alpha)\sinh(\beta)$

Tabelle 1 – Ähnlichkeiten der trigonometrischen Funktionen und der Hyperbelfunktionen

In Tabelle 1 sind nur drei der vielen Ähnlichkeiten zwischen diesen Funktionen dargestellt.

3 Umkehrfunktionen

Definition 3.1.

Die Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen werden als *Areafunktionen* bezeichnet und mit den Buchstaben ar- abgekürzt.

Berechnung des arcosh:

$$x = \cosh(A)$$

in dieser Gleichung muss man nun nach A auflösen

$$x = \frac{e^A + e^{-A}}{2}$$

$$0 = e^A - 2x + e^{-A}$$

$$0 = e^{2A} - 2xe^{A} + 1$$

$$e^{A}_{1/2} = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$$

$$A = ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1})$$

$$A = ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) =: \text{arcosh}(x)$$

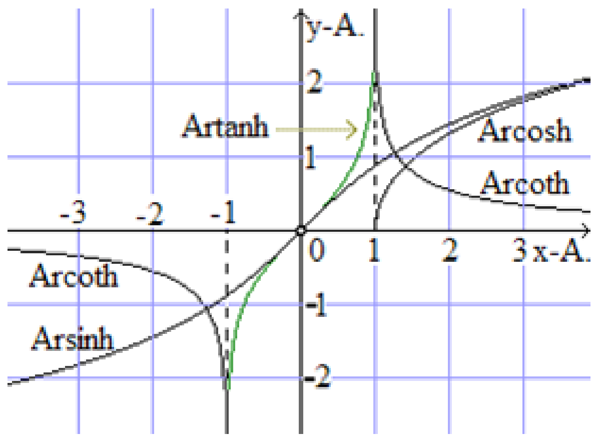

Abbildung 3.1 – arcosh, arsinh, artanh, arcoth

Auf dieselbe Art und Weise erhält man auch die anderen Umkehrfunktionen.

$$\text{arsinh}(x) := ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

$$\text{artanh}(x) := \frac{1}{2} ln(\frac{1+x}{1-x}) \text{ für } |x| < 1$$

$$\text{arcoth}(x) := \frac{1}{2} ln(\frac{x+1}{x-1}) \text{ für } |x| > 1$$

4 Geometrische Definition

Man kann die Hyperbelfunktionen nun nicht nur mit Hilfe der Exponentialfunktion definieren, sondern man kann sie, wie auch den normalen Sinus und Kosinus, geometrisch definieren. Beim Sinus und Kosinus geschieht dies am Einheitskreis $x^2 + y^2 = 1$ und bei den Hyperbelfunktionen kann man dies an der Einheitshyperbel $x^2 - y^2 = 1$ konstruieren. Die folgende Abbildung soll dies verdeutlichen.

In Abb. 4.1 kann man den rechten Ast der Einheitshyperbel (grün) erkennen. Nun legt man eine Gerade durch den Nullpunkt, die die Einheitshyperbel in einem Punkt schneidet. Man erhält dann einen Punkt, bei dem der y-Achsenabschnitt gleich dem Sinus Hyperbolicus ist und der x-Achsenabschnitt der Kosinus Hyperbolicus. Den Tangens Hyperbolicus erhält man, indem man von der x-Achse aus eine Tangente an die Einheitshyperbel anlegt und diese dann die Gerade schneidet. Im rechten der beiden

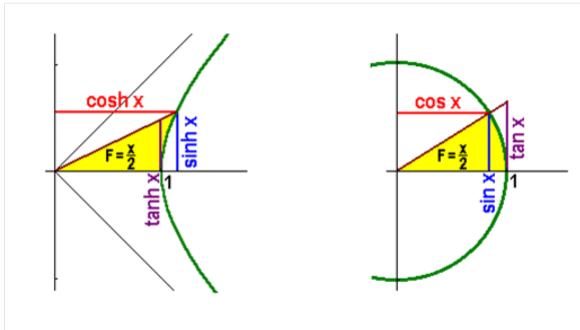

Abbildung 4.1 – Einheitshyperbel vs. Einheitskreis

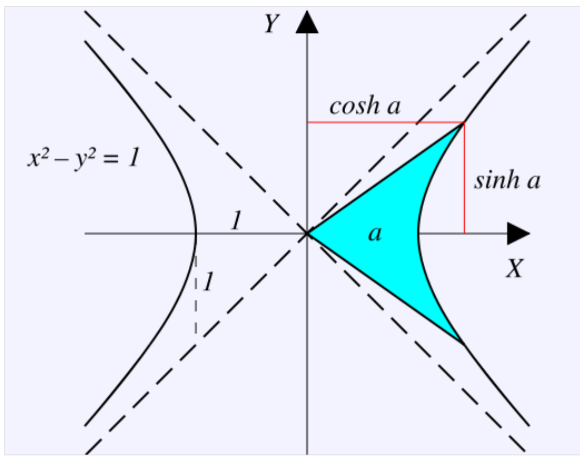

Abbildung 4.2 – Einheitshyperbel

Bilder sieht man die geometrische Definition der Sinus, Kosinus und Tangensfunktion am Einheitskreis (grün).

In Abbildung 4.2 kann man die Einheitshyperbel in vollem Ausmaße sehen. Hier soll noch einmal die geometrische Herleitung verdeutlicht werden. Die Fläche a in dieser Abbildung lässt sich mit der Formel $a = \frac{1}{2} ln \frac{1+\tanh(x)}{1-\tanh(x)}$ berechnen.

5 Erweiterung auf Komplexe Zahlen

Bemerkung 5.1. Die Komplexen Zahlen sind so aufgebaut: $z = a + ib \; mit \; a, b \in R$, wobei a der Realteil und b der Imaginärteil von z ist. Für die Zahl i gilt:

$$i^2 = -1 \; ; \; i^3 = -i \; ; \; i^4 = 1 \; ; \; i^5 = i \; ; ...$$

Da die Hyperbelfunktionen mit der Exponentialfunktion definiert werden können, wie zu Beginn meiner Arbeit gezeigt, betrachten wir im folgenden die Exponentialreihe e^x und ersetzen x durch eine imaginäre Größe $i\varphi$, wobei φ aber in den reellen Zahlen liegt. Betrachtet man nun diese Exponentialreihe, indem man den Realteil vom Imaginärteil trennt erhält man:

$$e^{i\varphi} = (1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + - ...) + i(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - + ...)$$

oder auch

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\ .$$

Aus dem MOIVRE*schen Theorem*

$$(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))(\cos(\psi) + i\sin(\psi)) = \cos(\varphi + \psi) + i\sin(\varphi + \psi)$$

kann man nun für die EULER*sche Relation* folgern, dass

$$e^x * e^y = e^{x+y}$$

für imaginäre Werte $x = i\varphi$ und $y = i\psi$ gilt.

Ersetzt man nun für $\cos(x)$ in der Potenzreihe x durch ix, erhält man die Reihe für $\cosh(x)$:

$$\Rightarrow \cosh(x) = \cos(ix)$$

und

$$\sinh(x) = \frac{1}{i}\sin(ix).$$

Ebenso gilt dies auch für:

$$\tanh(x) = \frac{1}{i}\tan(ix)$$

und

$$\coth(x) = i\coth(ix).$$

6 Resümee

Abschließend kann ich feststellen, dass die Hyperbelfunktionen sehr interessante und abwechslungsreiche Funktionen sind, die man teilweise auch schon in der Schule behandeln könnte. Wenn man die trigonometrischen Funktionen einführt, kann man die Hyperbelfunktionen auch gleich einführen. Zudem bin ich der Meinung, dass die Schüler bestimmt genauso beeindruckt wären wie ich, wenn man ihnen erzählen würde, dass die wohl bekannteste Brücke der Welt, die Golden Gate Bridge, eine Kosinus Hyperbolicus Funktion beinhaltet. Oder dass die Spinne beim Bau eines symmetrischen Netzes hunderte von Hyperbelfunktionen einbaut. So bleiben einem die Hyperbelfunktionen, oder zumindest ihr Aussehen, wahrscheinlich für immer im Kopf. Interessant fand ich zudem, dass es sehr verschiedene Wege gibt, wie man die Hyperbelfunktionen definieren und herleiten kann. Entweder über die Exponentialfunktion, die geometrische Darstellung oder sogar über die Potenzreihendarstellung der Exponentialfunktion. Hierauf möchte ich auch das weitere Augenmerk des Lesers lenken, sich mit dieser Art und Weise, die Hyperbelfunktionen sich im Komplexen vorzustellen, weiter zu beschäftigen.

Literatur

[1] *R. Courant:* **Vorlesungen über Differential und Integralrechnung 1**, Springer Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 4.Auflage, 1971

[2] *H. Heuser:* **Lehrbuch der Analysis Teil 1**, Teubner Verlag, Wiesbaden, 16.Auflage, 2006

[3] I. *Bronstein, K. Semendjajew, G. Musiol, H. Muehlig:* **Taschenbuch der Mathematik**, Harri Deutsch Verlag, 5.Auflage, 2000

[4] *E. Freitag:* **Analysis 1**, Skript

Abbildungen:
1.1: *http://www.maeterra.at/links_ i.htm*
1.2: *http://research.microsoft.com/users/sumitg/Pictures/Golden-Gate-Area/Golden-Gate-Bridge.JPG*
2.1: *http://math-www.upb.de/ thilop/wiwi1.06/graph/graph-Dateien/mnb7.png*
2.2: *http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/e/e7/Sinh-cosh-r-12pt.svg/425px-Sinh-cosh-r-12pt.svg.png*
3.1: *http://www.geocities.com/lightvolcano/study/hyp.htm*
4.1: *http://www.thphys.uni-heidelberg.de/ hefft/vk1/k4/gif/b4233.gif*
4.2: *http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/f3/Hyperbolic_functions.svg*
Letzter Stand: 02.11.08