4.1.1c Physikalisch-technische Anwendungen der linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

I.) Herleitung der Differentialgleichung der freien Schwingung

Beispiel 1: Die freie Feder-Masse-Schwingung mit geschwindigkeitsproportionaler Dämpfungskraft
$F_R = -b \cdot v(t) = -b \cdot \dot{y}(t)$ mit $b \geq 0$

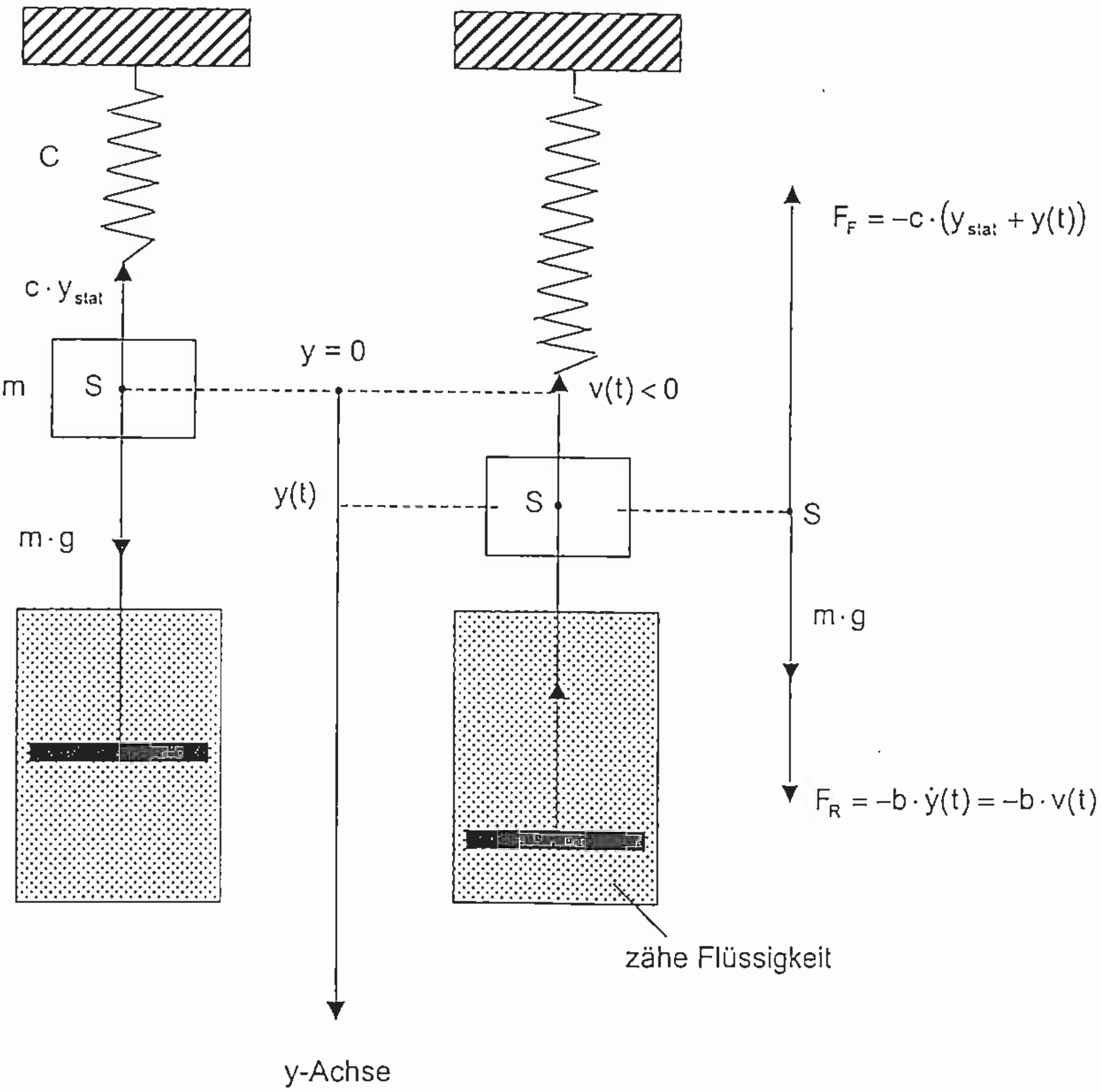


Abbildung 1a

Abbildung 1b

Herleitung der Differentialgleichung :

In Abbildung 1a) ist das Feder-Masse-System mit Dämpfung im Ruhezustand dargestellt. Die Masse ist kräftefrei, weil sich die Gewichtskraft $m \cdot g$ und die nach oben zeigende Rückstellkraft $c \cdot y_{stat}$ der Feder gerade kompensieren. Es gilt also

$$m \cdot g = c \cdot y_{stat} \tag{1}$$

Dabei wurde der Nullpunkt y=0 der y-Achse in den Schwerpunkt S der ruhenden Masse m gelegt.

In Abbildung 1b) befinde sich S im Zeitpunkt t am Ort y und bewege sich mit der momentanen Geschwindigkeit $v(t) = \dot{y}(t)$ in Richtung der negativen y-Achse noch oben (also $\dot{y}(t) = v(t) < 0$). Da die Reibungskraft F_R immer in die zur Bewegungsrichtung der Masse m entgegengesetzte Richtung weist, zeigt F_R in diesem Fall nach unten, d.h. in positive y-Richtung (d.h. $F_R = F_{Ry} > 0$) und es gilt die Beziehung

$$F_R = -b \cdot \dot{y}(t) \tag{2}$$

Diese Gleichung gilt auch für den Fall, dass sich die Masse in Abb. 1a) gerade nach unten in Richtung der positiven y-Achse bewegt (d.h. $\dot{y}(t) > 0$). F_R zeigt dann nach oben in Richtung der negativen y-Richtung (d.h. $F_R < 0$).
Zur Berechnung der auf m wirkenden Federkraft F_F ist neben der Federkonstanten c die gesamte Auslenkung $(y + y_{stat})$ der entspannten Feder maßgebend. Dabei ist $y_{stat} > 0$ die statische Auslenkung, welche die Feder durch die Gewichtskraft $m \cdot g$ erfährt und $y(t)$ die momentane Auslenkung aus der Gleichgewichtslage y=0.

Somit gilt nach Abb.1b:

$$F_F = -c \cdot (y_{stat} + y) \qquad (3)$$

Diese Gleichung gilt auch für den Fall $y < -y_{stat}$ bzw $(y + y_{stat}) < 0$ einer zusammengedrückten Feder. In diesem Fall zeigt die an der Masse m angreifende Federkraft F_F in positive y-Richtung, d.h. F_F ist positiv. Genau dieser positive Wert ergibt sich nach Gleichung (3).
Somit folgt für die Bewegung der Masse m die Newton´sche Gleichung:

$$\boxed{\mathbf{m \cdot \ddot{y}(t) = m \cdot g - c \cdot (y_{stat} + y(t)) - b \cdot \dot{y}(t)}} \qquad (4)$$

Nach Gleichung (1) gilt aber

$$\boxed{\mathbf{m \cdot g - c \cdot y_{stat} = 0}}$$

Damit ergibt sich die Schwingungsdifferentialgleichung:

$$\boxed{\mathbf{m \cdot \ddot{y}(t) + b \cdot \dot{y}(t) + c \cdot y(t) = 0}} \qquad (5a)$$

$$\boxed{\mathbf{\ddot{y}(t) + \left(\frac{b}{m}\right) \cdot \dot{y}(t) + \left(\frac{c}{m}\right) \cdot y(t) = 0}} \qquad (5b)$$

$$\boxed{\mathbf{\ddot{y}(t) + 2 \cdot \delta \cdot \dot{y}(t) + \omega_0^2 \cdot y(t) = 0}} \qquad (5c)$$

Die in Gleichung (5c) vorkommenden Größen sind wie folgt definiert:

$\delta = \dfrac{b}{2m}$ = Abklingkonstante (bzw. Dämpfung)

$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$ = Eigenkreisfrequenz der freien ungedämpften Schwingung

Häufig wird an Stelle der Abklingkonstanten δ mit der Dimension s^{-1} der dimensionslose Dämpfungsgrad D folgendermaßen definiert:

$$\boxed{D = \frac{\delta}{\omega_0}} \qquad (6)$$

Es läßt sich zeigen, dass die Beschreibung anderer mechanischer Systeme auch auf die Differentialgleichung (5c) einer freien gedämpften Schwingung führt. Zum Beispiel gilt dies für

1) Drehschwingungen der Scheibe

2) Schwingungen eines mathematischen oder physikalischen Pendels.

Beispiel 2: **Elektrischer Reihen-Schwingkreis**

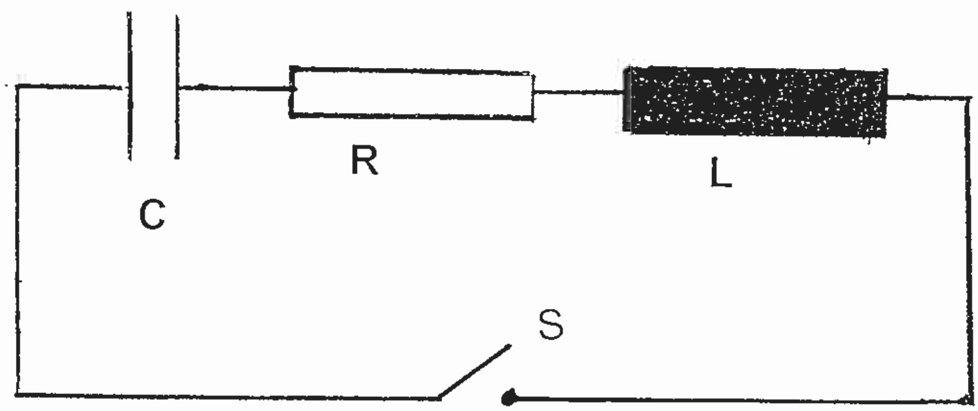


Abbildung 2

Bei offenem Schalter S wird der Kondensator mit der Kapazität C aufgeladen und dann anschließend Schalter S geschlossen. Aus dem Kirchhoff´schen Gesetz folgt für die Spannungen $U_C(t)$ am Kondensator, $U_R(t)$ am Ohm´schen Widerstand R und U_L an der Spule mit der Induktivität L:

$$U_L + U_R(t) + U_C(t) = 0 \tag{7}$$

Mit $$U_L(t) = \frac{L \cdot di(t)}{dt}\ ,\ U_R(t) = R \cdot i(t)\ ,$$

folgt weiter:

$$\frac{L \cdot di(t)}{dt} + R \cdot i(t) + U_C(t) = 0 \tag{8}$$

Nach Definition gilt für die Stromstärke $i(t)$:

$$i(t) = \frac{dQ_C}{dt} \tag{9}$$

Wegen des Zusammenhangs

$$Q_C(t) = C \cdot U_C(t) \tag{10}$$

zwischen Ladung Q_C und Spannung U_C am Kondensator der Kapazität C folgt weiter

$$i(t) = C \cdot \frac{dU_C(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{di(t)}{dt} = C \cdot \frac{d^2U_C(t)}{dt^2} \tag{11}$$

Einsetzen der Gleichungen (11) in die Gleichung (8) ergibt:

$$\boxed{(L \cdot C) \cdot \frac{d^2U_C(t)}{dt^2} + (R \cdot C)\frac{dU_C(t)}{dt} + U_C(t) = 0} \qquad (12a)$$

$$\boxed{\ddot{U}_C(t) + \left(\frac{R}{L}\right) \cdot \dot{U}_C(t) + \frac{U_C(t)}{(L \cdot C)} = 0} \qquad (12b)$$

mit $2 \cdot \delta = \frac{R}{L}$ und $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$

Aus Gleichung (8) erhält man durch Differenzieren nach der Zeit t und Berücksichtigung der aus Gleichung (11) folgenden Beziehung

$$\frac{dU_C(t)}{dt} = \frac{i(t)}{C}$$

eine Differentialgleichung für die unbekannte Größe Stromstärke $i(t)$:

$$\boxed{L \cdot \frac{d^2i(t)}{dt^2} + R \cdot \frac{di(t)}{dt} + \frac{i(t)}{C} = 0} \qquad (13a)$$

$$\boxed{\frac{d^2i(t)}{dt^2} + \left(\frac{R}{L}\right) \cdot \frac{di(t)}{dt} + \frac{i(t)}{(L \cdot C)} = 0} \qquad (13b)$$

$$\boxed{\frac{d^2i(t)}{dt^2} + 2 \cdot \delta \cdot \frac{di(t)}{dt} + \omega_0^2 \cdot i(t) = 0} \qquad (13c)$$

II) Lösung der Differentialgleichung der freien gedämpften Schwingung

$$\boxed{\ddot{y}(t)+2\cdot\delta\cdot\dot{y}(t)+\omega_0^2\cdot y(t)=0} \qquad (5c)$$

Mit dem Ansatz $y(t)=e^{k\cdot t}$ folgt die charakteristische Gleichung

$$k^2+2\cdot\delta\cdot k+\omega_0^2=0$$

mit den Lösungen

$$k_{1/2}=-\delta\pm\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}$$

Für die Berechnung der Lösung müssen die verschiedenen Fälle untersucht werden:

Fall 1: $\delta=0\Leftrightarrow D=\dfrac{\delta}{\omega_0}=0$, **d.h. ungedämpfte Schwingung** (periodischer Fall)

$$\boxed{\ddot{y}(t)+\omega_0^2\cdot y(t)=0} \qquad (14)$$

$$k^2+\omega_0^2=0 \quad\Rightarrow\quad k_{1/2}=\sqrt{-\omega_0^2}=\pm j\cdot\omega_0$$

$$\boxed{y(t)=C_1\cdot\sin(\omega_0\cdot t)+C_2\cdot\cos(\omega_o\cdot t)} \qquad (15)$$

Zur Bestimmung der Konstanten C_1 und C_2 benötigt man die Anfangsbedingungen:

$$y(0) = y_0 \quad \text{und} \quad \dot{y}(0) = v_0$$

$$y(0) = y_0 = C_2 \cdot \cos 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{C_2 = y_0}$$

$$\dot{y}(t) = C_1 \cdot \omega_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) - C_2 \cdot \omega_0 \cdot \sin(\omega_o \cdot t) \quad \Rightarrow$$

$$\dot{y}(0) = v_0 = C_1 \cdot \omega_0 \cdot \cos 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{C_1 = \frac{v_0}{\omega_0}}$$

Damit ergibt sich als Lösung

$$\boxed{y(t) = \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right) \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) + y_0 \cdot \cos(\omega_o \cdot t)} \qquad (16)$$

mit $y(t) = y(t + T_0)$ für alle $t \in R$

$$T_0 = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_0} = \frac{1}{f_0} = \text{Periode}$$

f_0 = Frequenz

$\omega_0 = 2 \cdot \pi \cdot f_0$ = Kreisfrequenz der freien ungedämpften Schwingung

Die allgemeine Lösung

$$\boxed{y = c_1 \sin(\omega_0 t) + c_2 \cos(\omega_0 t)} \tag{15}$$

der Differentialgleichung (5c) stellt eine Überlagerung zweier harmonischer Schwingungen derselben Frequenz f_0 bzw. Kreisfrequenz $\omega_0 = 2\pi f_0$ dar, welche sich bekanntlich (siehe z. Bsp. komplexe Rechnung) in Form einer phasenverschobenen Sinusschwingung

$$\boxed{y = \hat{y} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi)} \tag{17}$$

oder einer phasenverschobenen Kosinusschwingung darstellen lässt:

$$\boxed{y = \hat{y} \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \phi)} \tag{18}$$

An Stelle der Größen $\mathbf{c_1}$ und $\mathbf{c_2}$ in Gleichung (15) treten jetzt die Amplitude $\hat{y}$, die nach Definition positiv sein soll, und der Nullphasenwinkel φ bzw. ϕ auf.

Fall 2:

$$\boxed{0 < \delta < \omega_0} \Leftrightarrow 0 < \frac{\delta}{\omega_0} = D < \frac{\omega_0}{\omega_0} \Leftrightarrow \boxed{0 < D < 1} \Leftrightarrow \boxed{\left(\delta^2 - \omega_0^2\right) < 0}$$

d.h. schwache Dämpfung, gedämpfte Schwingungen

Aus $k_{1/2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$ folgt für $\left(\delta^2 - \omega_0^2\right) < 0$ die Beziehung

$$k_{1/2} = -\delta \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

Mit $\left(\omega_0^2 - \delta^2\right) = \omega_d^2$ folgt als Kreisfrequenz der freien gedämpften Schwingung

$$\boxed{\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \omega_0\sqrt{(1 - D^2)} = \frac{2\pi}{T_d} < \omega_0} \qquad (19)$$

$$k_{1/2} = -\delta \pm j\omega_d$$

Als Lösung folgt dann

$$\boxed{y(t) = e^{-\delta t}\{c_1 \sin(\omega_d \cdot t) + c_2 \cos(\omega_d \cdot t)\}} \qquad (20)$$

Mit $y(0) = y_0$ ergibt sich:

$$\mathbf{y_0 = c_2 \cos 0} \Rightarrow \boxed{c_2 = y_0}$$

$$\dot{y}(t) = e^{-\delta t}\{c_1\omega_d \cos(\omega_d \cdot t) - c_2\omega_d \sin(\omega_d \cdot t)\}$$
$$- \delta\, e^{-\delta t}\{c_1 \sin(\omega_d \cdot t) + c_2 \cos(\omega_d \cdot t)\}$$

$$\dot{y}(0) = v_0 = c_1\omega_d - c_2\delta = c_1\omega_d - y_0\delta \Rightarrow$$

$$\boxed{c_1 = \frac{v_0 + y_0\delta}{\omega_d} = \frac{\delta y_0 + v_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}}$$

$$\boxed{\mathbf{y(t) = e^{-\delta t}\left\{\left(\frac{\delta y_0 + v_0}{\omega_d}\right)\sin(\omega_d \cdot t) + y_0 \cos(\omega_d \cdot t)\right\}}} \quad \mathbf{(21a)}$$

mit $\boxed{\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - D^2}}$ **(21b)**

Diese Gleichung lässt sich umschreiben, in dem der Ausdruck in der geschweiften Klammer in eine phasenverschobene Sinus- bzw. Cosinusschwingung umgewandelt wird:

$$\left(\frac{\delta y_0 + v_0}{\omega_d}\right)\sin(\omega_d \cdot t) + y_0 \cos(\omega_d \cdot t) = \hat{y}_0 \cos(\omega_d \cdot t + \phi)$$

Mit $\cos(\omega_d \cdot t + \phi) = \cos\phi \cos(\omega_d \cdot t) - \sin\phi \sin(\omega_d \cdot t)$ folgt durch Vergleich der Koeffizienten von $\sin(\omega_d \cdot t)$ und $\cos(\omega_d \cdot t)$ auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens:

$$y_0 = \hat{y}_0 \cos\phi \tag{22}$$

$$\frac{-(\delta y_o + v_0)}{\omega_d} = \hat{y}_0 \sin\phi \tag{23}$$

Aus den Gleichungen (22) und (23) folgt:

$$\boxed{\hat{y}_o = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{\delta y_0 + v_0}{\omega_d}\right)^2} > 0} \tag{24}$$

$$\boxed{\tan\phi = \frac{-(\delta y_0 + v_0)}{y_0 \omega_d}} \tag{25}$$

$$\boxed{y(t) = e^{-\delta t} \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{\delta y_0 + v_0}{\omega_d}\right)^2} \cos(\omega_d \cdot t + \phi)} \tag{26a}$$

Aus Gleichung (22) folgt, dass das Vorzeichen von $\cos\phi$ wegen $\hat{y}_0 > 0$ identisch mit dem Vorzeichen von y_0, d. h. dem Nenner von Gleichung (25) ist. Aus Gleichung (23) folgt, dass das Vorzeichen von $\sin\phi$ identisch mit dem Vorzeichen von $-(\delta y_0 + v_0)$, also dem Zähler von Gleichung (25) ist. Durch die Vorzeichen von $\sin\phi$ und $\cos\phi$ ist aber der Winkel ϕ im Winkelbereich $0 \le \phi < 2\pi$ eindeutig festgelegt und damit die ursprüngliche Zweideutigkeit der Lösung von Gleichung (25) beseitigt.

Will man an Stelle von Gleichung (26a) eine gedämpfte phasenverschobene Sinusschwingung, so formt man um:

$$\cos(\omega_d \cdot t + \phi) = \sin\left(\omega_d \cdot t + \phi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(\omega_d \cdot t + \varphi)$$

mit $\quad \varphi = \phi + \frac{\pi}{2}$

Wegen $\tan\varphi = \tan\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan\phi}$ folgt aus Gleichung(25):

$$\boxed{\tan\varphi = \frac{y_0 \omega_d}{\delta y_0 + v_0}} \qquad (27)$$

$$\boxed{y(t) = e^{-\delta t} \cdot \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{\delta y_0 + v_0}{\omega_d}\right)^2} \cdot \sin(\omega_d \cdot t + \varphi)} \qquad (28.a)$$

In abgekürzter Form lassen sich die Gleichungen (26.a) und (28.a) mittels Gleichung (30) folgendermaßen schreiben:

$$\boxed{y(t) = \hat{y}_0 \; e^{-\delta t} \cdot \cos(\omega_d \cdot t + \phi)} \qquad (26b)$$

$$\boxed{y(t) = \hat{y}_0 \; e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_d \cdot t + \varphi)} \qquad (28.b)$$

III) Diskussion der Lösung $y(t)$ der Differentialgleichung der freien gedämpften Schwingung

Aus Gleichung (26b) erhält man die Betragsgleichung

$$|y(t)| = \hat{y}_0 \cdot e^{-\delta t} \underbrace{|\cos(\omega_d \cdot t + \varphi)|}_{\leq 1} \Rightarrow |y(t)| \leq \hat{y}_0 \cdot e^{-\delta t} \text{ bzw.} \qquad (29a)$$

$$\boxed{-\hat{y}_0 \cdot e^{-\delta t} \leq y(t) \leq +\hat{y}_0 \cdot e^{-\delta t}} \qquad (29b)$$

Gleichung (35b) sagt aber aus:

Die beiden Funktionen $-\hat{y}_0 \cdot e^{-\delta t}$ und $+\hat{y}_0 \cdot e^{-\delta t}$ sind die Einhüllenden der Bildkurve der Funktion $y(t)$

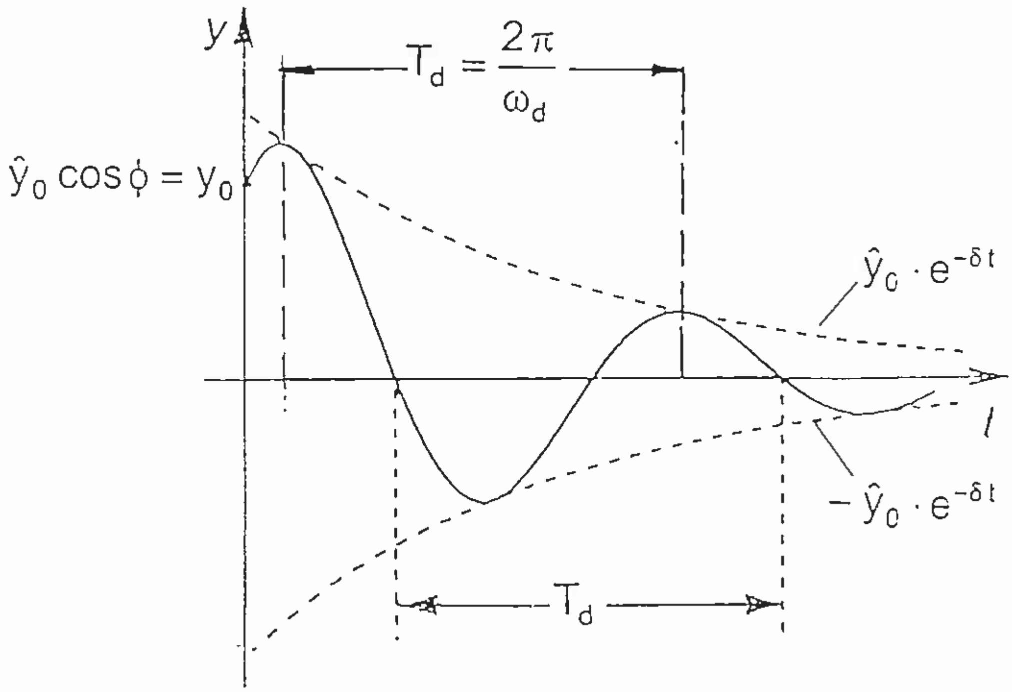
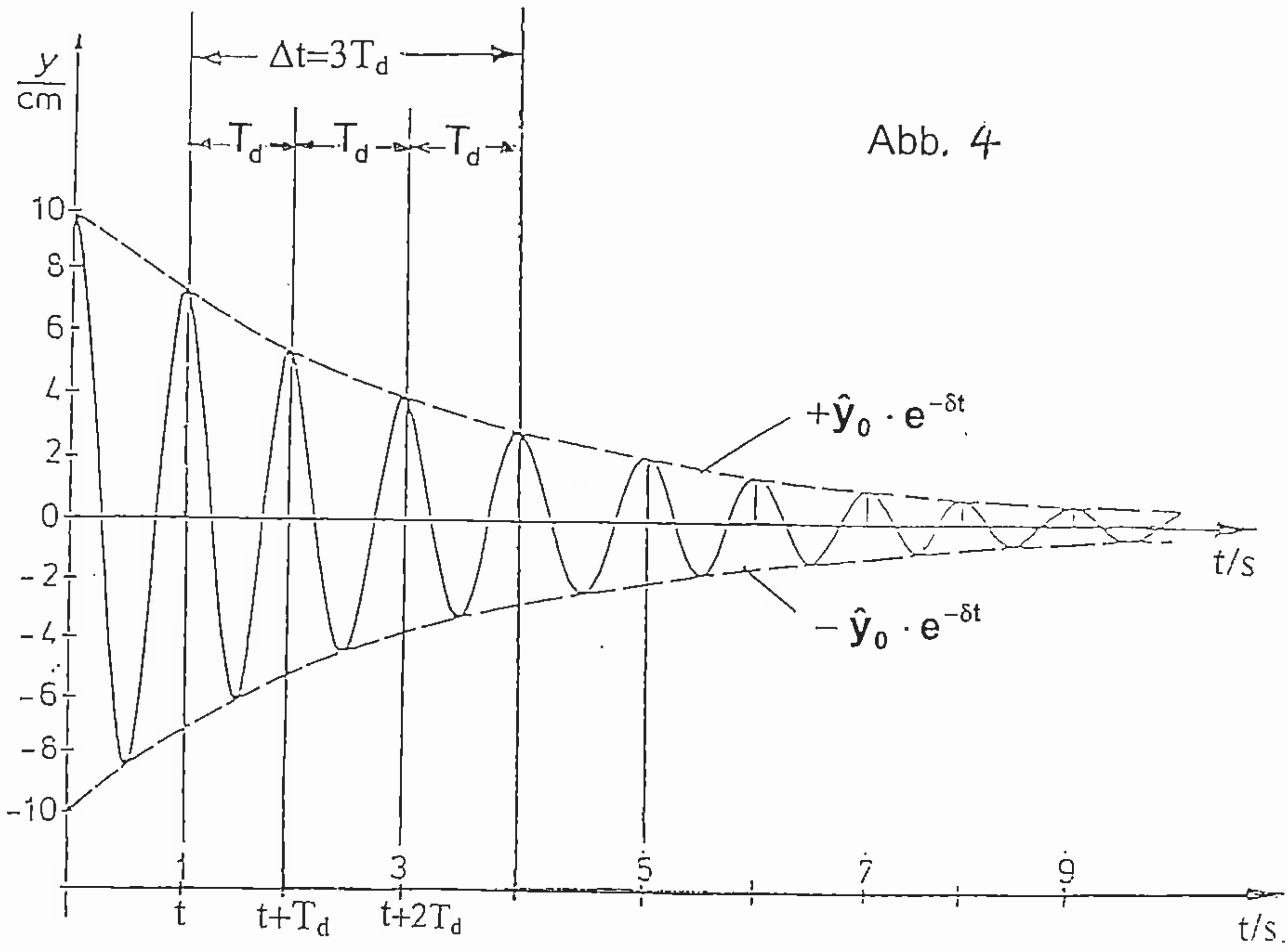


Abb. 3: $y = \hat{y}_0 \cdot e^{-\delta t} \cdot \cos(\omega_d \cdot t + \phi)$

mit $y(0) = y_0 > 0$ und $\dot{y}(0) = v_0 > 0$

Eine für die Messung der Abklingkonstanten δ bzw. der Dämpfung D wichtige Beziehung soll nun an Hand von Abbildung 5 abgeleitet werden:



$$\boxed{y(t) = \hat{y}_0 \cdot e^{-\delta t} \cdot \cos(\omega_d \cdot t + \phi)}$$

mit

$$y(0) = y_0 = 10\,cm$$

$$\dot{y}(0) = v_0 = 0\,\frac{cm}{s}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi \cdot s^{-1}$$

$$\boxed{y(t) = 10{,}01\,cm \cdot e^{-0{,}314\,s^{-1} \cdot t} \cdot \cos\left(2\pi s^{-1} \cdot t - 0{,}05\right)}$$

Ist T_d die Zeitspanne zwischen 2 aufeinanderfolgenden Maxima (bzw. Minima) von $y(t)$, so folgt aus Gleichung (26b) für einen beliebigen Zeitpunkt t und natürliche Zahlen n:

$$\frac{y(t)}{y(t+nT_d)} = \frac{\hat{y}_0 \cdot e^{-\delta t} \cdot \cos(\omega_d \cdot t + \phi)}{\hat{y}_0 \cdot e^{-\delta(t+nT_d)} \cdot \cos\{\omega_d \cdot (t+nT_d)+\phi\}} \qquad (30)$$

Aus $\cos\{\omega_d \cdot (t+nT_d)+\phi\} = \cos\{(\omega_d \cdot t+\phi)+n\,\omega_d\,T_d\}$
folgt wegen $\omega_d \cdot T_d = 2\pi$ die Gleichung

$$\cos\{\omega_d(t+nT_d)+\phi\} = \cos\{\omega_d \cdot t+\phi\}$$

Damit erhält man aus Gleichung (30) **die von der Zeit unabhängige Beziehung**

$$\boxed{\frac{y(t)}{y(t+nT_d)} = e^{n\cdot\delta\cdot T_d}} \qquad (31a)$$

Mit $T_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$ und $\omega_d = \omega_0\sqrt{1-D^2}$ (siehe Gleichung 21b) folgt:

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-D^2}} \quad \text{bzw.} \quad T_d \approx \frac{2\pi}{\omega_0} = T_0 \quad \text{für } D \ll 1$$

$$\boxed{\frac{y(t)}{y(t+nT_d)} \approx e^{n\cdot\delta\cdot T_0} \quad \textbf{für D} \ll \textbf{1}} \qquad (31b)$$

Dabei ist T_0 die Schwingungsdauer der freien ungedämpften Schwingung.

Der Exponent δT_d in Gleichung (31a) lässt sich mittels $\delta = D\omega_0$ und Gleichung (27b) umschreiben:

$$\delta T_d = D\omega_0 \cdot \frac{2\pi}{\omega_d} = 2\pi \cdot D \cdot \frac{\omega_0}{\omega_d} = \frac{2\pi D}{\sqrt{1-D^2}}$$

Damit erhält man aus Gleichung (37a) die Beziehung:

$$\boxed{\frac{y(t)}{y(t+nT_d)} = e^{n \cdot \frac{2\pi D}{\sqrt{1-D^2}}}} \qquad (32a)$$

Für sehr schwache Dämpfung D<<1 gilt dann offenbar:

$$\boxed{\frac{y(t)}{y(t+nT_d)} \approx e^{n \cdot 2\pi D}} \qquad (32b)$$

Aus Gleichung (32a) bzw. (32b) lässt sich bei gegebenem Dämpfungsgrad D berechnen, auf welchen Bruchteil die Auslenkung y im Zeitintervall $\Delta t = n \cdot T_d$ zwischen den Zeitpunkten t und $(t + nT_d)$ absinkt. Der Zeitpunkt ist dabei ganz beliebig. Für das Absinken der Auslenkung ist nur die Zeitspanne $\Delta t = n \cdot T_d$ maßgebend. Von besonderem Interesse ist der Fall, dass der Zeitpunkt t so gewählt wird, dass gerade ein Maximum vorliegt (siehe Abb.5).

<u>Bsp. 1</u>:

Es sei der Dämpfungsgrad $D = 0{,}05 << 1$ und die Zeitspanne $\Delta t = n \cdot T_d = 3\,T_d$. Dann erhält man aus Gleichung (32b)

$$\frac{y(t+3\,T_d)}{y(t)} = \frac{1}{e^{3\cdot 2\pi\cdot D}} = \frac{1}{e^{6\pi\cdot 0{,}05}} = \frac{1}{2{,}57}$$

Nach 3 Schwingungsperioden der schwach gedämpften Schwingung ist die Auslenkung auf den Bruchteil $(1/2{,}57)$ gesunken. War z. Bsp. die anfängliche Auslenkung $y(t) = 6\,\mathrm{cm}$, so ist die Auslenkung nach 3 Schwingungsperioden $(\Delta t = 3\,T_d)$ der gedämpften Schwingung nur mehr

$$y(t+3\,T_d) = \frac{6\,\mathrm{cm}}{2{,}57} = 2{,}33\,\mathrm{cm}$$

Umgekehrt lässt sich aus dem beobachteten Absinken der Amplitude der gedämpften Schwingung während einer vorgegebenen Zeitspanne $\Delta t = n \cdot T_d$ der Dämpfungsgrad D des Systems auf folgende Weise ermitteln:

Durch Logarithmieren der Gleichungen (32a) und (32b) folgt:

$$\boxed{\frac{n\cdot 2\pi D}{\sqrt{1-D^2}} = \ln\left\{\frac{y(t)}{y(t+n\,T_d)}\right\}} \qquad (33a)$$

$$\boxed{D \approx \frac{1}{n\cdot 2\pi}\cdot \ln\left\{\frac{y(t)}{y(t+n\,T_d)}\right\} \quad \text{für } D << 1} \qquad (33b)$$

Der Logarithmus $\ln\left\{\frac{y(t)}{y(t+nT_d)}\right\}$ zweier **aufeinanderfolgender**

Maxima der Schwingung $y(t) = \hat{y}_0 \cdot e^{-\delta t} \cdot \cos(\omega_d \cdot t + \phi)$ wird als logarithmisches Dekrement Λ bezeichnet:

$$\boxed{\Lambda = \ln\left\{\frac{y(t)}{y(t+T_d)}\right\} \Leftrightarrow \frac{y(t)}{y(t+T_d)} = e^{\Lambda}} \tag{34}$$

Aus Gleichung (32a) bzw. (31a) folgt für $n = 1$:

$$\frac{y(t)}{y(t+T_d)} = e^{\frac{2\pi D}{\sqrt{1-D^2}}} = e^{\delta T_d} \tag{32b}$$

Durch Vergleich von (34) und (32b) erhält man

$$\Lambda = \delta T_d = \frac{2\pi D}{\sqrt{1-D^2}} \tag{35}$$

Weiter folgt mittels der Gleichung (32a) und (35)

$$\frac{y(t)}{y(t+nT_d)} = \left(e^{\frac{2\pi D}{\sqrt{1-D^2}}}\right)^n = e^{n\cdot\Lambda} = \left(e^{\Lambda}\right)^n \tag{36a}$$

$$\frac{y(t)}{y(t+nT_d)} = \left\{\frac{y(t)}{y(t+1\cdot T_d)}\right\}^n \tag{36b}$$

Fall 3: $\delta = \omega_0 \Leftrightarrow \left(\delta^2 - \omega_0^2\right) = 0 \Leftrightarrow D = 1$**, d. h. aperiodischer Grenzfall zwischen schwacher Dämpfung** $\delta < \omega_0$ **bzw.** $D < 1$ **und starker Dämpfung** $\delta > \omega_0$ **bzw.** $D > 1$

$$k_{1/2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \Rightarrow \qquad \boxed{k_1 = k_2 = -\delta}$$

$$\boxed{y(t) = \left(c_1 + c_2 t\right) \cdot e^{-\delta t}} \tag{37}$$

$$\Rightarrow \qquad y(0) = \boxed{y_0 = c_1}$$

$$\dot{y}(t) = c_2 e^{-\delta t} - \delta\left(c_1 + c_2 t\right) e^{-\delta t}$$

$$\dot{y}(t) = e^{-\delta t} \cdot \left\{c_2\left(1 - \delta t\right) - \delta c_1\right\}$$

$$\dot{y}(0) = v_0 = c_2 - \delta c_1 = c_2 - y_0 \delta \Rightarrow c_2 = v_0 + y_0 \delta$$

$$\boxed{y(t) = \left\{y_0 + \left(v_0 + \delta y_0\right) t\right\} e^{-\delta t}} \tag{38}$$

Bild 5 a) zeigt mögliche Bewegungsabläufe im aperiodischen Grenzfall für verschiedene Anfangswerte

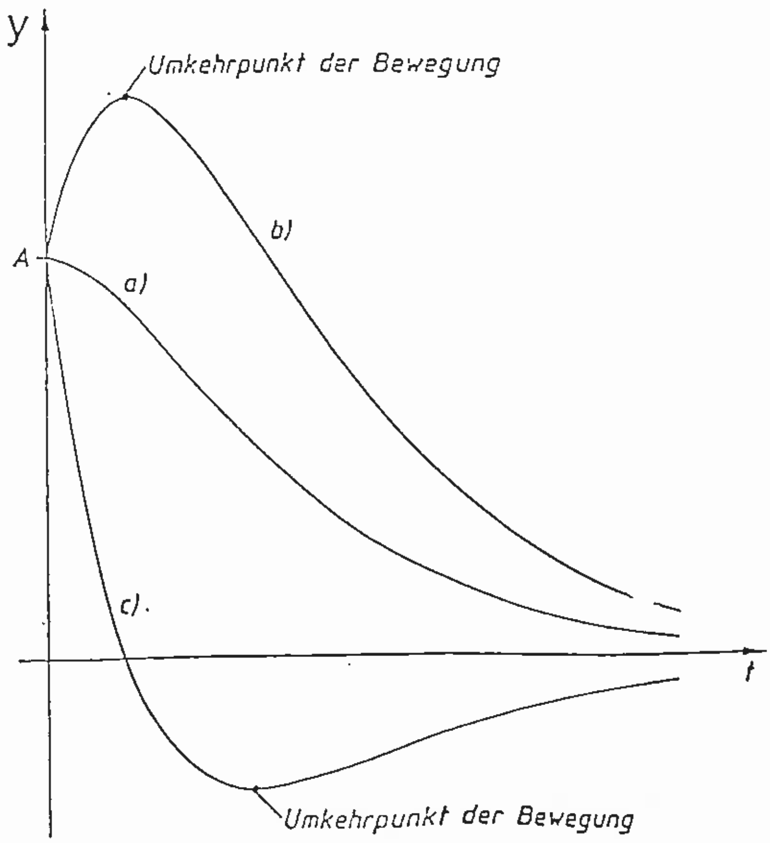
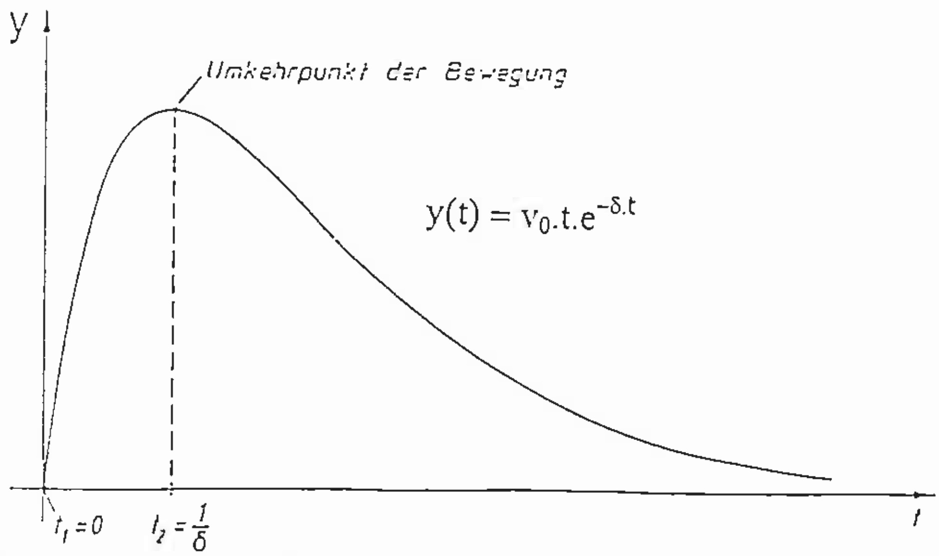


Bild 6a:
Zeitlicher Verlauf einer Schwingung im aperiodischen Grenzfall für verschiedene Anfangsbedingungen. Die Anfangslage $y(0) = y_0 > 0$ ist in allen 3 Fällen (a-c) dieselbe.

a) $(v_0 = 0)$, d. h. aus der Anfangslage $y_0 > 0$ ohne Stoß einfach loslassen
b) $v_0 > 0$, d. h. Anfangsgeschwindigkeit in positive y-Richtung, d. h. anfängliche Bewegung von der Gleichgewichtslage y=0 weg
c) $v_0 < 0$, d. h. Anfangsgeschwindigkeit in negative y-Richtung, d. h. anfängliche Bewegung auf die Gleichgewichtslage zu mit $v_0 < -\delta \cdot y_0$

Bild 5 b) Zeitlicher Verlauf einer Schwingung im aperiodischen Grenzfall für die Anfangswerte $y(0) = 0, v(0) = v_0 > 0$



Fall 4: $\delta > \omega_0 \Leftrightarrow \left(\delta^2 - \omega_0^2\right) > 0 \Leftrightarrow D > 1$
d. h. starke Dämpfung, aperiodischer Fall, Kriechfall

$$k_{1/2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

sind beide reel und wegen $\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} < \delta$ beide negativ

$$\boxed{\mathbf{y(t) = c_1\, e^{\left(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\right)t} + c_2\, e^{\left(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\right)t}}} \qquad (39)$$

$$y(0) = \boxed{y_0 = c_1 + c_2}$$

$$\dot{y}(t) = c_1\left(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\right)e^{\left(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\right)t}$$

$$+ c_2\left(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\right)e^{\left(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\right)t}$$

$$\boxed{\dot{y}(0) = v_0 = c_1\left(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\right) + c_2\left(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\right)}$$

Mit $c_2 = y_0 - c_1$ folgt

$$v_0 = c_1\left(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\right) + \left(y_0 - c_1\right)\left(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\right)$$

$$c_1\left\{-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} + \delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\right\} = v_0 + y_0\left\{\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\right\}$$

$$c_1 = \frac{v_0 + y_0\left\{\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\right\}}{2 \cdot \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}}$$

$$\boxed{c_1 = \frac{v_0 + y_0\,\delta}{2\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} + \frac{y_0}{2}}$$

$$\boxed{c_2 = y_0 - c_1 = \frac{y_0}{2} - \frac{(v_0 + \delta\,y_0)}{2\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2}\left\{y_0 + \frac{(v_0 + \delta y_0)}{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}}\right\} e^{\left(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\right)t} \\ &+ \frac{1}{2}\left\{y_0 - \frac{(v_0 + \delta y_0)}{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}}\right\} e^{\left(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\right)t} \end{aligned}} \qquad (40)$$

speziell folgt für $y_0 = 0$ und $v_0 \neq 0$:

$$y(t) = \frac{v_0}{2\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}}\left\{e^{\left(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\right)t} - e^{\left(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\right)t}\right\}$$

(siehe Abb. 6b)

Bild 6a:
Zeitlicher Verlauf einer aperiodischen Schwingung (D>1) für verschiedene Anfangsbedingungen. Die Anfangslage $y(0) = y_0 > 0$ ist in allen 3 Fällen (a-c) dieselbe.

b) $(v(0) = v_0 = 0)$, d. h. aus der Anfangslage $y_0 > 0$ ohne Stoß einfach loslassen
d) $v_0 > 0$, d. h. Anfangsgeschwindigkeit in positive y-Richtung, d. h. anfängliche Bewegung von der Gleichgewichtslage y=0 weg
e) $v_0 < 0$, d. h. Anfangsgeschwindigkeit in negative y-Richtung, d. h. anfängliche Bewegung auf die Gleichgewichtslage zu mit ausreichender Geschwindigkeit $v_0 < 0$

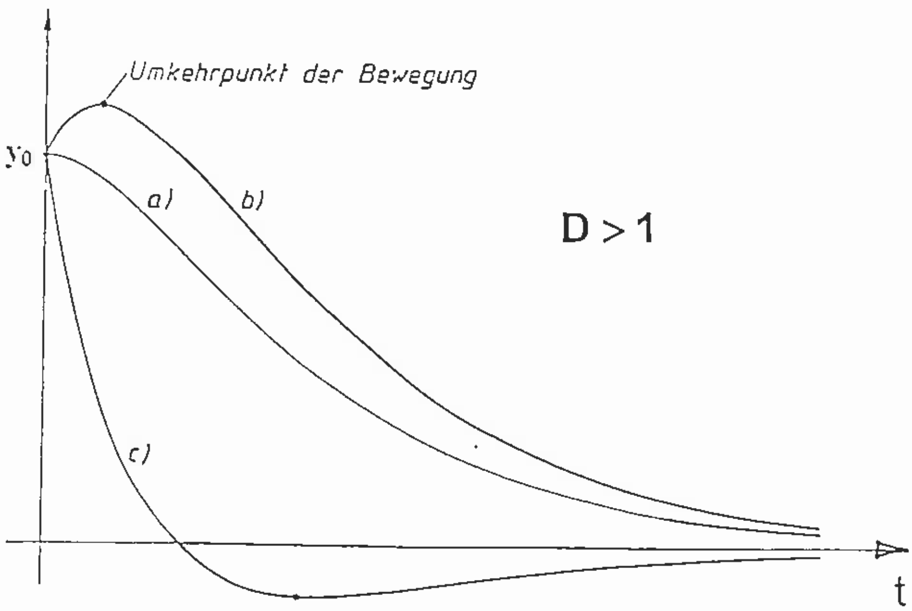
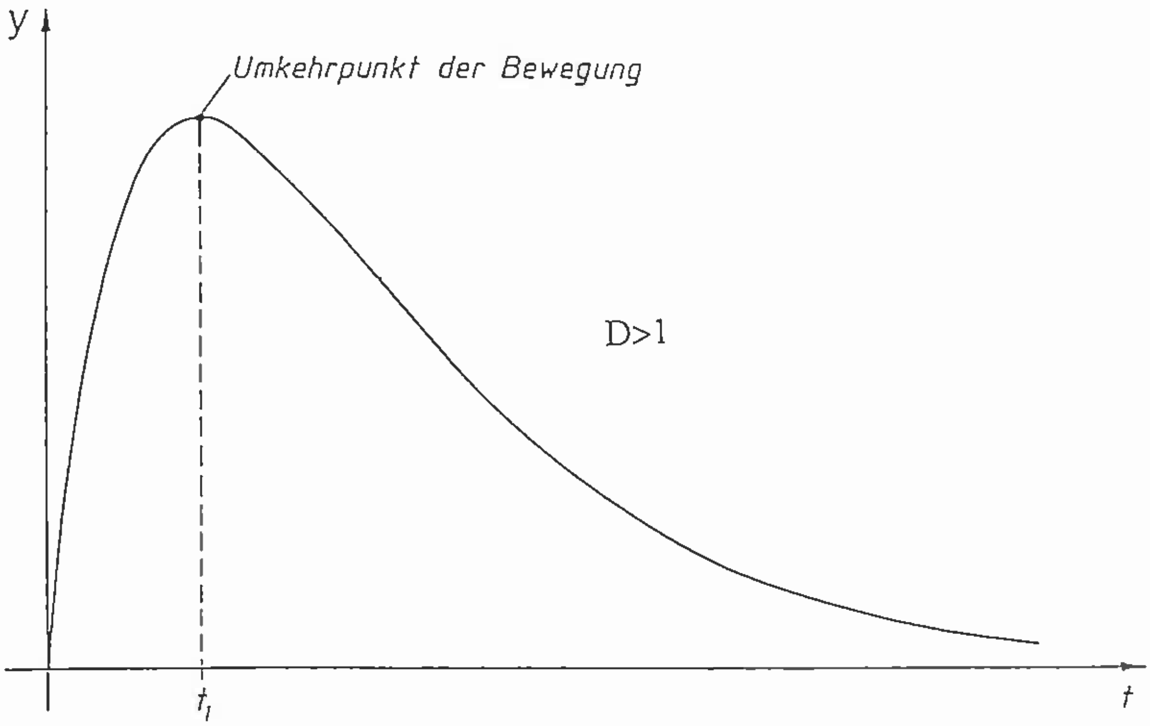
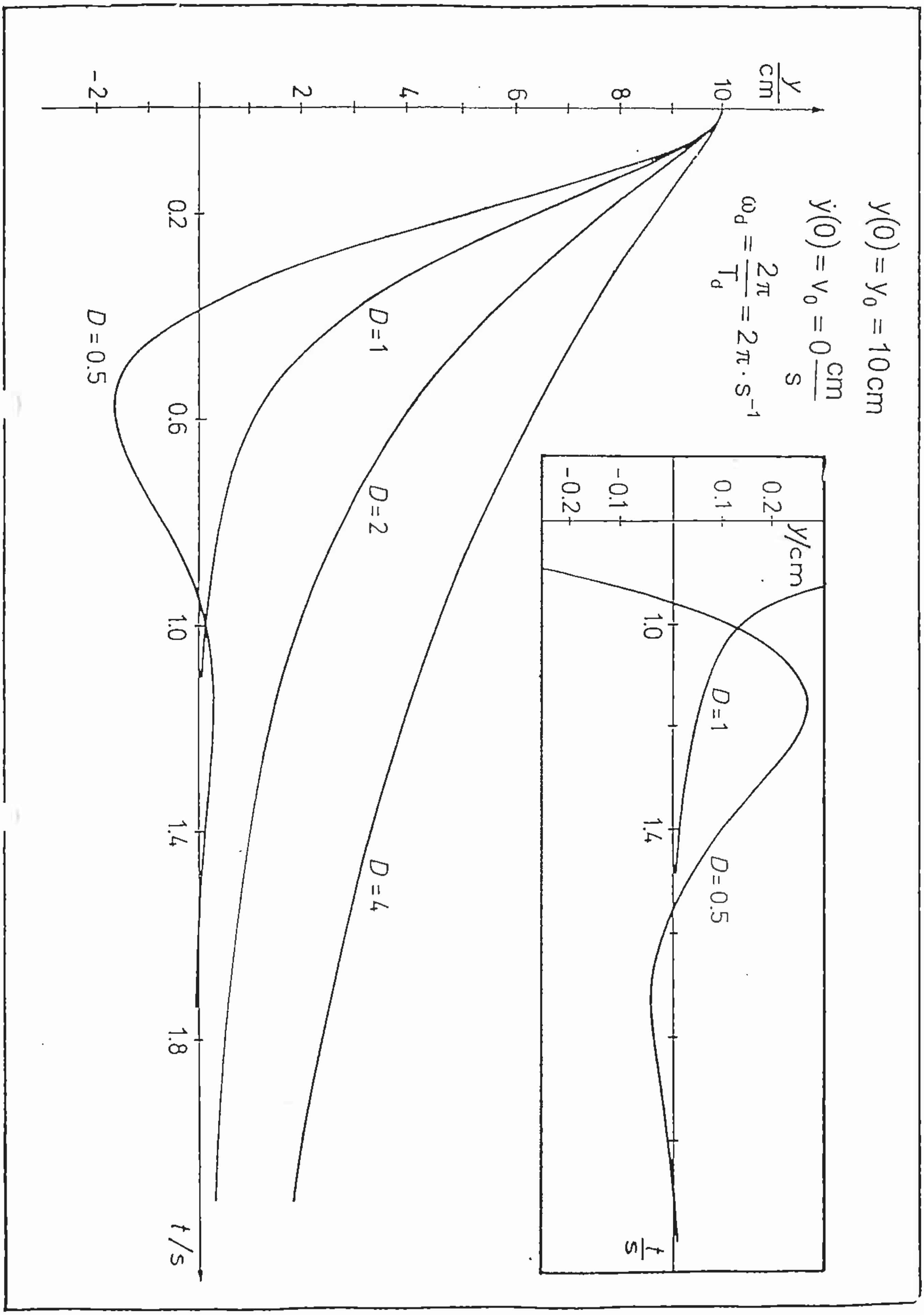


Bild 6 b) Zeitlicher Verlauf einer aperiodischen Schwingung für die Anfangswerte $y(0) = 0,\ v(0) = v_0 > 0$



$$y(t) = \frac{v_0}{2\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} \left\{ e^{\left(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\right)t} - e^{\left(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\right)t} \right\}$$


$y(0) = y_0 = 10\,\mathrm{cm}$
$\dot{y}(0) = v_0 = 0\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$
$\omega_d = \frac{2\pi}{T_d} = 2\pi \cdot \mathrm{s}^{-1}$
$\frac{y}{\mathrm{cm}}$
10
8
6
4
2
-2
0.2
0.6
1.0
1.4
1.8
t/s
D = 0.5
D = 1
D = 2
D = 4
y/cm
0.2
0.1
-0.1
-0.2
1.0
1.4
D = 1
D = 0.5
$\frac{t}{s}$