

Zahlenfolgen (Grenzwertsätze)

Satz 1: Seien (a_n) und (b_n) zwei konvergente Folgen mit den Grenzwerten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \quad (|b| < \infty, |a| < \infty).$$

Dann gilt:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot b_n) = c \cdot b$
- 4) Wenn $a_n = C$ für alle n , so $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = C$
- 5) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n / b_n) = a / b$ falls $b \neq 0$
- 6) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^k = a^k$
- 7) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}$

Satz 2: Seien (a_n) , (b_n) , (c_n) und (d_n) 4 Folgen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm\infty$ (bestimmt divergent), $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, $|b| < \infty$ (konvergent), $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ (Nullfolge) und (d_n) sei beschränkt!

Dann gilt:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n / a_n) = 0$
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (d_n / a_n) = 0$
- 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n / b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = \pm\infty$
- 5) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n / d_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = \pm\infty$
- 6) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/c_n) = \begin{cases} \infty & \text{falls } c_n \geq 0 \\ -\infty & \text{falls } c_n < 0 \end{cases}$
(und divergent, falls (c_n) alterniert)

7) Sei (g_n) eine weitere Folge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = \pm\infty$ (bestimmt divergent). Dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot g_n = \pm\infty$$

Satz 3:

- 1) Sei $q > 0$. Dann gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{q} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n+c]{q} = 1$ für alle $c \in \mathbb{N}$.
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$
- 3) Sei $|q| < 1$. Dann gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$
- 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$