6.1.2 Gebrochen rationale Funktionen

Beispiel 1: $$\mathbf{y = f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-4} = 1 + \frac{5}{x^2-4}}$$

a) Symmetrie zur y-Achse: $\mathbf{f(x) = f(-x)}$

b) Asymptoten:

b1) waagrechte Asymptoten:

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 1 + 0$, d.h. die Bildkurve nähert sich von oben an

die Asymptote $y_{as} = 1$ an

b2) senkrechte Asymptoten:

$$x^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2 \quad \text{und} \quad x = -2$$

$$\lim_{x \to 2+} f(x) = \lim_{h \to 0} f(2+h) = +\infty \text{ mit } h > 0$$

$$\lim_{x \to 2-} f(x) = \lim_{h \to 0} f(2-h) = -\infty \text{ mit } h > 0$$

$$\lim_{x \to -2+} f(x) = \lim_{h \to 0} f(-2+h) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -2-} f(x) = \lim_{h \to 0} f(-2-h) = +\infty$$

Es liegen also an den Stellen $x = -2$ und $x = 2$ Pole vor

c) Gebietseinteilung :

$$f(x)>0 \text{ für } (x^2-4)>0 \Rightarrow |x|>2 \Leftrightarrow x<-2 \text{ oder } x>2$$

$$f(x)<0 \text{ für } (x^2-4)<0 \Rightarrow |x|<2 \Leftrightarrow -2<x<2$$

d) Nullstellen:

Es gibt keine Nullstellen, weil $(x^2+1)=0$ keine reelle Lösung hat

e) Schnittpunkte mit y Achse: $y(0)=-\frac{1}{4}$

f) Extremwerte:

$$y=1+\frac{5}{x^2-4} \Rightarrow y'=-\frac{10x}{(x^2-4)^2}=0 \Rightarrow x=0$$

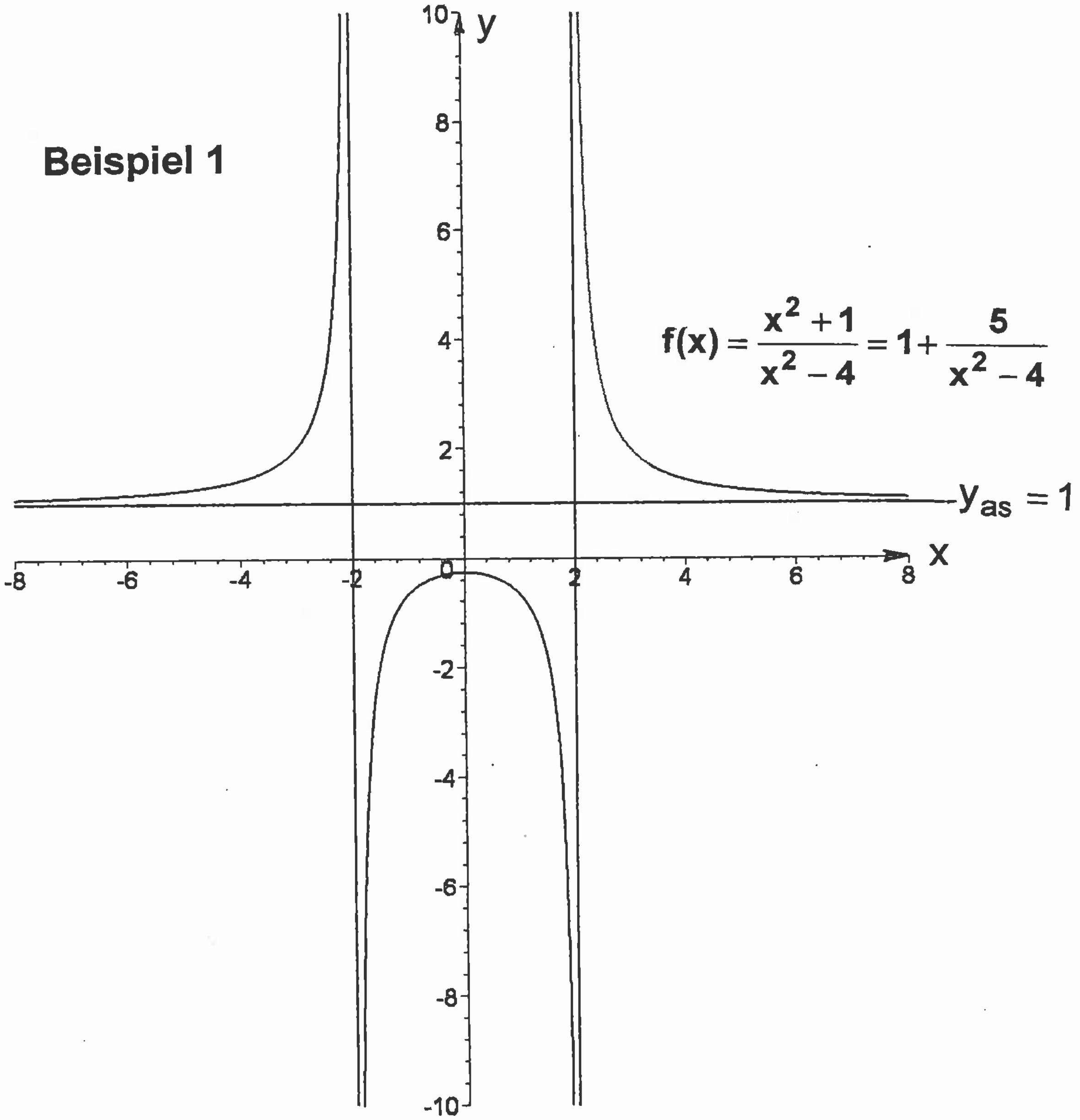
Wegen $y'(x<0)>0$ und $y'(x>0)<0$, d.h. Vorzeichenwechsel von $y'(x)$ von + nach – beim Durchgang durch $x=0$ liegt ein Hochpunkt $H(0/-\frac{1}{4})$ vor.

g) Wendepunkte:

$$y''=-10\left\{\frac{(x^2-4)^2\cdot 1-x\cdot 2(x^2-4)\cdot 2x}{(x^2-4)^4}\right\}$$

$$y''=-10\left\{\frac{(x^2-4)-4x^2}{(x^2-4)^3}\right\}=10\frac{(3x^2+4)}{(x^2-4)^3}$$

Die notwendige Bedingung $y''(x)=0$ kann wegen $(3x^2+4)\neq 0$ für alle $x\in R$ nicht erfüllt werden; also gibt es keinen Wendepunkt.




```
plot({(x*x+1)/(x*x-4),1},x=-8..8,y=-10..10,thickness=2,
numpoints=10000,color=black,scaling=constrained);
```

Beispiel 2: $$y = f(x) = \frac{2x-2}{x^2-2x-3} = \frac{2(x-1)}{(x+1)(x-3)}$$

a) Nullstellen: $x = 1 \quad \Rightarrow \quad S_1(1/0)$

b) Schnittpunkt mit der y Achse: $y(x=0) = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad S_2\left(0/\frac{2}{3}\right)$

c) Asymptoten:

c1) waagrechte Asymptoten:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty} f\left(\frac{2}{x}\right) = 0+$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{x}\right) = 0-$$

Die Bildkurve der Funktion $y = f(x)$ nähert sich also für $x \to \infty$ von oben $(y>0)$ und für $x \to -\infty$ von unten $(y<0)$ an die waagrechte Asymptote $\mathbf{y_{as} = 0}$ an.

c2) senkrechte Asymptoten: $\mathbf{x = -1}$ und $\mathbf{x = 3}$

$$\lim_{x\to-1-0} f(x) = \lim_{h\to 0} f(-1-h) = -\infty \quad \text{mit } h>0$$

$$\lim_{x\to-1+0} f(x) = \lim_{h\to 0} f(-1+h) = +\infty \quad \text{mit } h>0$$

$$\lim_{x\to 3-} f(x) = \lim_{h\to 0} f(3-h) = -\infty \quad \text{mit } h>0$$

$$\lim_{x\to 3+} f(x) = \lim_{h\to 0} f(3+h) = +\infty \quad \text{mit } h>0$$

d) Gebietseinteilung :

$$f(x) > 0 \text{ für } x > 3 \text{ und für } -1 < x < 1$$

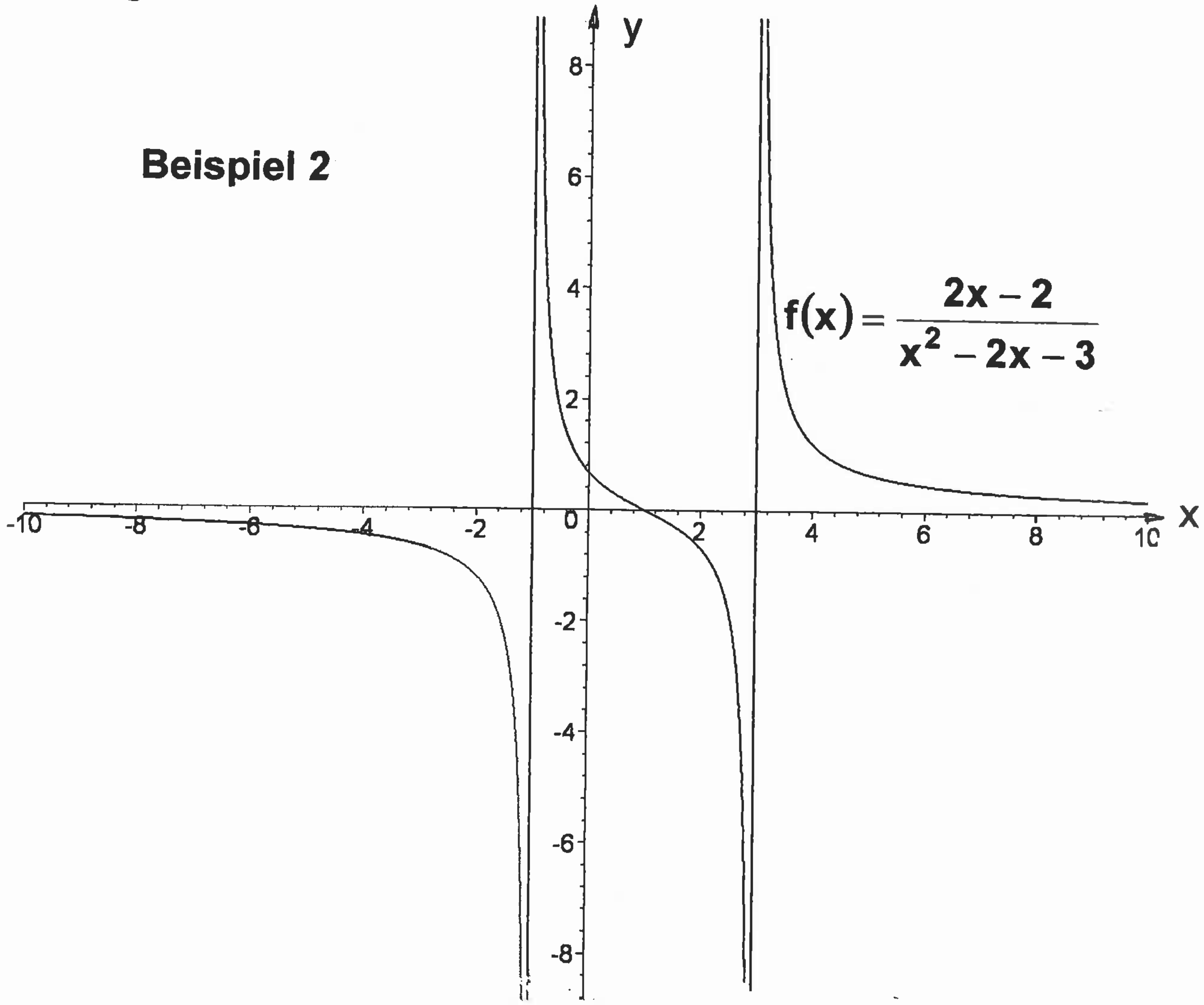
$$f(x) < 0 \text{ für } x < -1 \text{ und für } 1 < x < 3$$

e) Extremwerte:

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{(x^2 - 2x - 3) \cdot 1 - (x-1)(2x-2)}{(x^2 - 2x - 3)^2}$$

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{(-x^2 + 2x - 5)}{(x^2 - 2x - 3)^2} = 0 \Rightarrow \quad x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{-4}$$

Es gibt also keine Extremwerte




```
plot((2*x-2)/(x*x-2*x-3),x=-10..10,y=-10..10,
thickness=2,numpoints=10000,color=black,scaling=constrained);
```

Beispiel 3: $y = f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 + 1} = 1 + \frac{3x}{x^2 + 1}$

a) Nullstellen: $x^2 + 3x + 1 = 0 \Rightarrow$

$$x_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = \left(-3 - \sqrt{5}\right)/2 = -2{,}618 \\ x_2 = \left(-3 + \sqrt{5}\right)/2 = -0{,}382 \end{array}$$

b) Schnittpunkte mit der y-Achse: $y(0) = 1$

c) Asymptoten:

c1) waagrechte Asymptoten: $y_{as} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1 + 0$, d.h. die Bildkurve von $f(x)$ nähert sich für $x \to +\infty$ der Asymptote $y_{as} = 1$ von oben her an $(f(x) > 1)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1 - 0$, d.h. die Bildkurve von $f(x)$ nähert sich für $x \to -\infty$ der Asymptote $y_{as} = 1$ von unten her an $(f(x) < 1)$.

d) Symmetrien:

Aus $y = 1 + \frac{3x}{x^2 + 1}$ folgt $y - 1 = \frac{3x}{x^2 + 1}$

Das bedeutet, dass man die Bildkurve der Funktion $y = f(x)$ erhält, wenn man die Bildkurve der punktsymmetrischen Funktion $y = \frac{3x}{x^2 + 1} = -y(-x)$ um 1 in die positive Richtung verschiebt: $y - 1 = \frac{3x}{x^2 + 1}$

Damit ist aber dann $f(x)$ nicht mehr zum Ursprung $O(0/0)$ sondern zum Punkt $P(0/1)$ symmetrisch.

e) Extremwerte:

$$y' = 3\left\{\frac{(x^2+1)\cdot 1 - x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}\right\} = \frac{3(1-x^2)}{(x^2+1)^2} \quad \Rightarrow$$

$$y' = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x_1 = -1\ ,\ x_2 = +1$$

Ferner gilt:

$$\left.\begin{array}{l} y'(1-\varepsilon^2) > 0 \\ y'(1+\varepsilon^2) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \textbf{Hochpunkt } \mathbf{H(1/2{,}5)}$$

Dabei kann die positive Größe $\varepsilon^2 \neq 0$ beliebig nahe an Null heranrücken, d.h. es gilt$\varepsilon^2 \to 0$:

Entsprechend gilt

$$\left.\begin{array}{l} y'(-1-\varepsilon^2) < 0 \\ y'(-1+\varepsilon^2) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \textbf{Tiefpunkt } \mathbf{T\left(-1/-\tfrac{1}{2}\right)}$$

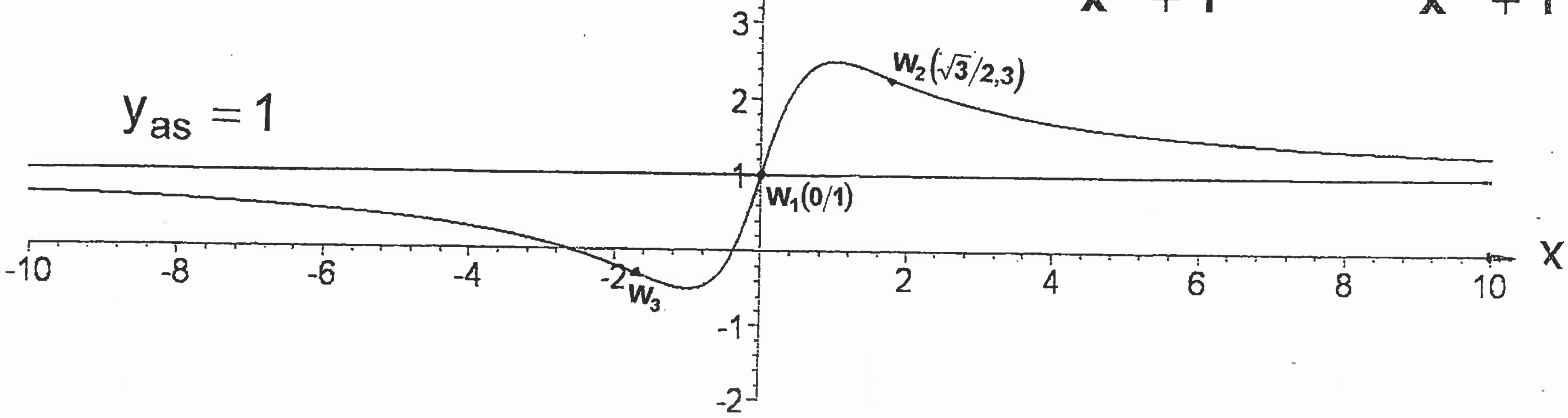
f) Wendepunkte:

$$y' = 3\cdot\frac{(1-x^2)}{(x^2+1)^2} \quad \Rightarrow \quad y'' = 3\left\{\frac{(x^2+1)^2(-2x) - (1-x^2)2(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4}\right\}$$

$$y'' = 3\left\{\frac{(x^2+1) + 2(1-x^2)}{(x^2+1)^3}\right\}(-2x)$$

Beispiel 3

$$y = f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 + 1} = 1 + \frac{3x}{x^2 + 1}$$



$$y'' = \frac{-6x(3 - x^2)}{(x^2+1)^3} = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 0 \ , \ x_{2/3} = \pm\sqrt{3}$$

Für $x_1 = 0$ gilt:

$$\left.\begin{array}{l} y''(0 - \varepsilon^2) > 0 \Rightarrow \text{Linkskurve} \\ y''(0 + \varepsilon^2) < 0 \Rightarrow \text{Rechtskurve} \end{array}\right\} \Rightarrow \textbf{Wendepunkt } \mathbf{W_1(0/1)}$$

Für $x_2 = +\sqrt{3}$ folgt:

$$\left.\begin{array}{l} y''(\sqrt{3} - \varepsilon^2) < 0 \Rightarrow \text{Rechtskurve} \\ y''(\sqrt{3} + \varepsilon^2) > 0 \Rightarrow \text{Linkskurve} \end{array}\right\} \Rightarrow \textbf{Wendepunkt } \mathbf{W_2(\sqrt{3}/2{,}3)}$$

Für $x_3 = -\sqrt{3}$ ergibt sich:

$$\left.\begin{array}{l} y''(-\sqrt{3} - \varepsilon^2) < 0 \Rightarrow \text{Rechtskurve} \\ y''(-\sqrt{3} + \varepsilon^2) > 0 \Rightarrow \text{Linkskurve} \end{array}\right\} \Rightarrow \textbf{Wendepunkt } \mathbf{W_3(-\sqrt{3}/-0{,}3)}$$

Beispiel 4:

$$y = f(x) = \frac{x^2(4-x^2)}{(x^2-1)} = \frac{x^2(2-x)(2+x)}{(x-1)(x+1)}$$

a) Symmetrie zur y Achse:

b) Nullstellen:

$x_1 = x_2 = 0$, d.h. die Bildkurve von $f(x)$ berührt im Punkt $O(0/0)$ die x Achse:
$x_3 =$, $x_4 =$

c) Asymptoten:

c1) Polynomdivision $(-x^4 + 4x^2):(x^2-1)$ ergibt:

$$f(x) = \frac{-x^4 + 4x^2}{(x^2-1)} =$$

Wegen $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{3}{x^2-1} = 0$ folgt für $x \to \pm\infty$ die Asymptote:

$$y_{as} =$$

Wegen $3/(x^2-1) > 0$ für $|x| > 1$ folgt $f(x) > y_{as}$ für $|x| > 1$

c2) senkrechte Asymptoten $x_{1/2} = \pm 1$

Mit $y = f(x) = -x^2 + 3 + \dfrac{3}{x^2 - 1}$ folgt:

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{h \to 0} f(1-h) =$$

$$\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{h \to 0} f(1+h) =$$

$$\lim_{x \to -1-} f(x) = \lim_{h \to 0} f(-1-h) =$$

$$\lim_{x \to -1+} f(x) = \lim_{h \to 0} f(-1+h) =$$

d) Gebietseinteilung:

Mit $y = f(x) = \dfrac{x^2(4 - x^2)}{(x-1)(x+1)}$ folgt:

$f(x) > 0$ für und für

$f(x) < 0$ für und für

e) Extremwerte:

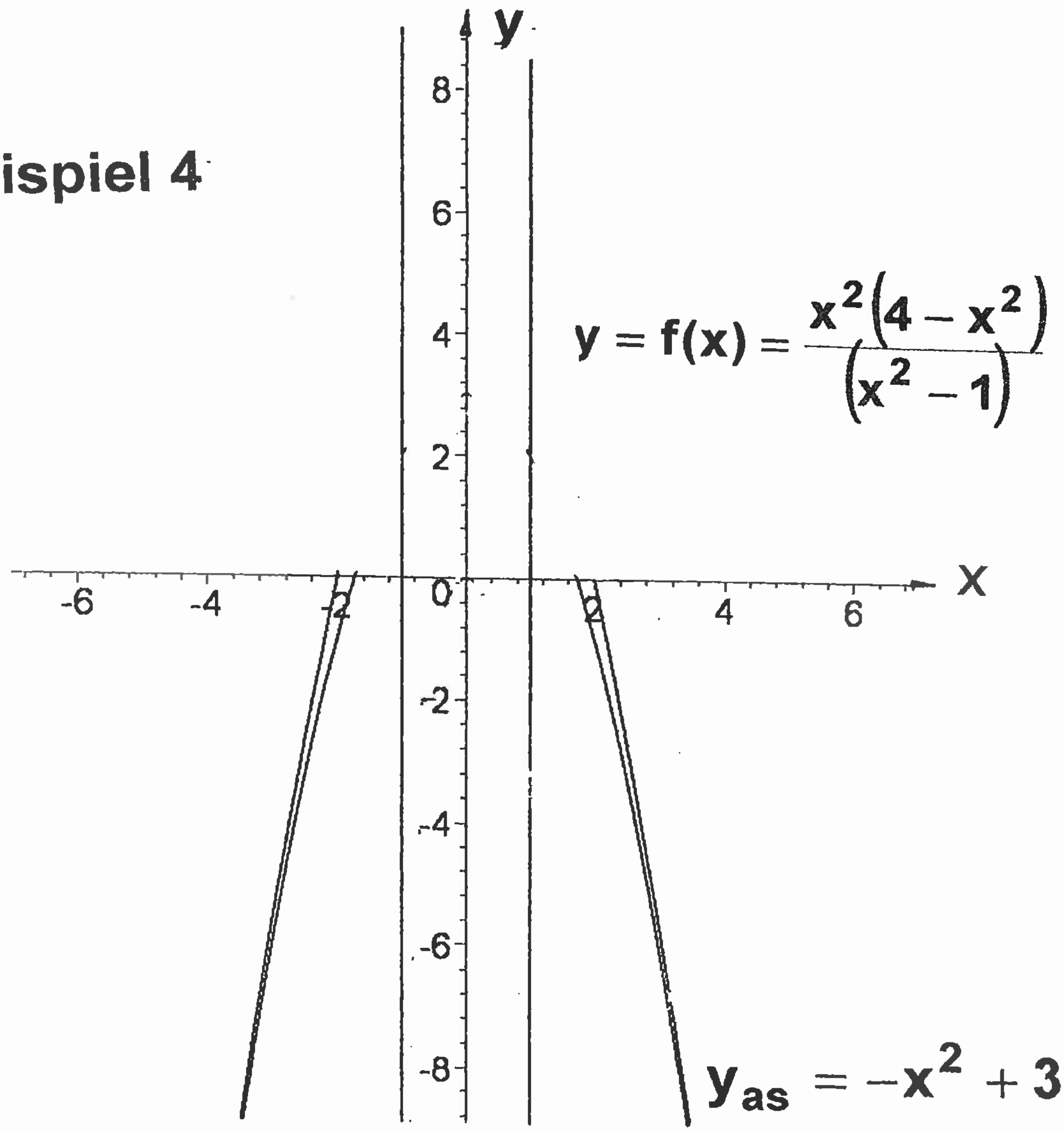
$$y = f(x) = -x^2 + 3 + \frac{3}{x^2 - 1} \Rightarrow$$

$y' =$

$$y' = -2x\left\{\frac{\qquad}{\qquad}\right\} = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} y'\left(0-\varepsilon^2\right) > 0 \\ y'\left(0+\varepsilon^2\right) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Beispiel 4




```
plot({x*x*(4-x*x)/(x*x-1),-x*x+3},x=-7..7,y=-9..9,
thickness=2,numpoints=20000,color=black,scaling=constrained);
```